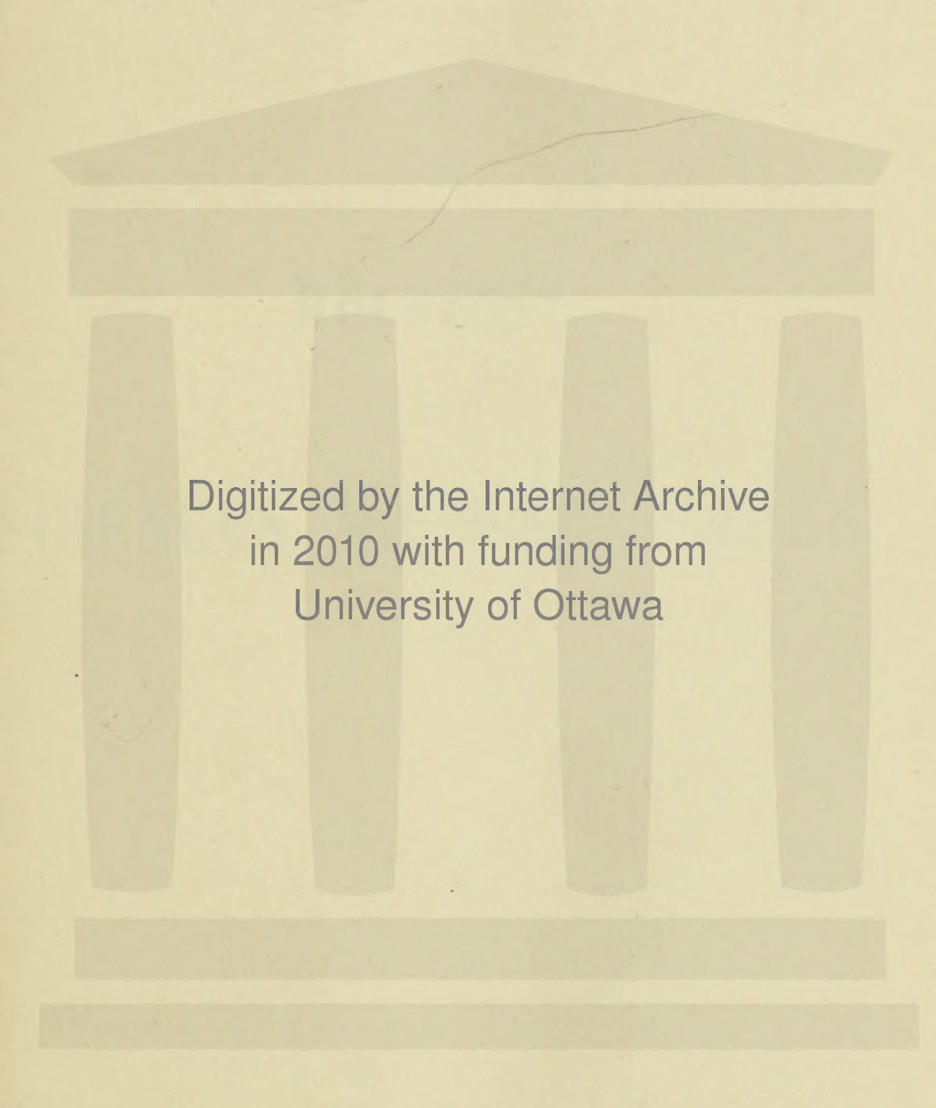


# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

# COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.



## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

15899 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

**Sous la direction de la Commission des Hautes Études.**

**PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL**

ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XIV. — ANNÉE 1890.**

(TOME XXIV DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## PREMIÈRE PARTIE.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUSSINESQ. — Leçons synthétiques de Mécanique générale servant d'introduction au Cours de Mécanique physique de la Faculté des Sciences de Paris, publiées par les soins de MM. *Legay* et *Vigneron*, élèves de la Faculté. 1 vol. in-8°; XII-132 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1889.

Voici les titres des onze Leçons qui composent ce Volume : ils donneront l'idée de la marche suivie par le savant professeur, et du point de vue auquel il se place :

I. But de la Mécanique physique. Notions cinématiques indispensables.

II. Les deux principes fondamentaux de la Mécanique.

III. Forme des équations du mouvement; ce qu'on entend en Mécanique par force, forces motrices, actions mutuelles, etc. — Pesanteur.

IV. Énergie potentielle interne. Action moléculaire.

V. Principes de la conservation des quantités de mouvement et de leurs moments, pour un système matériel indépendant ou sans relations extérieures.

VI. Principe des quantités de mouvement et des moments pour un système partiel, de leur application à la formation des équations du mouvement des corps.

VII. Idées générales sur les pressions.

VIII. Raisons physiologiques et psychologiques des dénominations de forces, actions, tensions, etc., employées en Mécanique. — Forces d'inertie et centrifuge.

IX. Principe des forces vives pour un système partiel. Travail des forces. — Énergie interne.

X. Suite de l'étude des forces vives et du travail ; flux de chaleur. Loi fondamentale de la Thermodynamique.

XI. Application du principe des forces vives aux mouvements visibles ou moyens locaux; rôles qu'y prennent le travail de déformation des pressions exercées sur les particules matérielles et l'énergie potentielle de pesanteur, etc. J. T.

---

## MÉLANGES.

### DISCOURS PRONONCÉ DEVANT LE PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE, LE 5 AOUT, A L'INAUGURATION DE LA NOUVELLE SORBONNE, PAR M. CH. HERMITE, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'INSTITUT.

Monsieur le Président,

Messieurs,

L'enseignement mathématique de la Sorbonne s'ouvre en 1809 avec Lacroix, Poisson, Biot, Francœur et Hachette, qui occupent les chaires de Calcul différentiel et de Calcul intégral, de Mécanique, d'Astronomie, d'Algèbre supérieure et de Géométrie descriptive. Poisson est l'un des grands géomètres de ce siècle, Biot a parcouru avec éclat une longue carrière, remplie de travaux importants sur l'Astronomie et la Physique. Lacroix et Francœur ont, par d'excellents Ouvrages, enseigné à leur temps toutes les parties des Mathématiques, depuis l'Arithmétique élémentaire jusqu'au Calcul intégral. Nous évoquons le souvenir de ces hommes éminents qui ont honoré la Faculté des Sciences à son origine; nous voulons rendre l'hommage qui est dû à leur mémoire, et dans cette circonstance rappeler leurs titres à la reconnaissance du pays.

I. L'œuvre capitale de Lacroix est un Traité, en trois Volumes in-4°, de Calcul différentiel et de Calcul intégral, dont la première édition a paru en 1798 et la seconde en 1814. Cet Ouvrage consciencieux et savant donne le complet résumé de la Science de son époque. La rédaction en est claire et facile; les écrits concernant chaque point traité sont énumérés avec le plus grand soin dans un sommaire des articles qui a conservé toute son importance et qu'on consultera toujours avec le plus grand fruit. La constante préoccupation de l'auteur a été d'établir entre tant de théories qu'il expose, sur des matières si diverses, une succession naturelle, un enchaînement qui en facilite l'étude et contribue à l'intelligence générale de l'analyse. En prenant pour épigraphe de son Traité ce vers de l'*Art poétique*, d'Horace :

*Tantum series rerum juncturaque pollet,*

Lacroix indique la pensée à laquelle il est resté fidèle dans ses autres publications, et qui donne la raison de leur succès.

Le *Traité élémentaire d'Arithmétique* a eu 20 éditions, les *Éléments de Géométrie,* 22, les *Éléments d'Algèbre,* 24. Ce dernier Ouvrage a été suivi d'un complément où, sous la même forme, claire et facile, sont abordées, dans la mesure qui convient aux commençants, des questions intéressantes et plus élevées d'Algèbre supérieure.

Le rare mérite des Ouvrages de Lacroix n'a pas été perdu avec lui. Lefébure de Fourcy, son successeur à la chaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, a publié un Traité de Géométrie descriptive, des Leçons de Géométrie analytique et d'Algèbre, qui ont une réputation bien méritée par la clarté et la précision de leur rédaction. Les Leçons d'Algèbre possèdent à cet égard une incontestable supériorité et sont encore un des meilleurs Ouvrages élémentaires pour l'étude de cette science.

II. Francœur a occupé la chaire d'Algèbre supérieure jusqu'en 1847, en consacrant ses Leçons à la résolution des équations de degrés supérieurs, à la théorie des suites, puis à diverses reprises aux éléments du Calcul des probabilités et de la Géodésie. Parmi les Ouvrages qu'il a publiés, nous mentionnerons tout d'abord un Cours complet de Mathématiques pures, en deux Volumes

in-8°, qui a eu quatre éditions. Le premier Volume renferme l'Arithmétique, l'Algèbre élémentaire, la Géométrie et la Géométrie analytique à deux dimensions ; le second comprend l'Algèbre supérieure, la Géométrie analytique à trois dimensions, le Calcul différentiel, le Calcul intégral et le Calcul des différences. La concision que s'est imposée l'auteur pour réunir tant de matières dans un court espace ne porte jamais atteinte à la clarté. Nous remarquerons qu'une part est même faite à la théorie des nombres ; dans un Chapitre de l'Algèbre supérieure, on trouve une excellente démonstration du théorème célèbre de Lagrange sur la périodicité du développement en fraction continue des irrationnelles du second degré dont les Traités actuels ne donnent que l'énoncé.

Francœur a aussi publié un Traité de Géodésie qui a eu sept éditions, un Traité de Mécanique, des éléments de Statique, des éléments de Technologie, une Astronomie pratique. Son principal Ouvrage, celui qui mérite surtout d'être rappelé à l'attention, a pour titre : *Uranographie* ou *Traité élémentaire d'Astronomie;* voici le jugement qu'en porte notre éminent collègue M. Tisserand :

« L'*Uranographie* est un Ouvrage excellent qui ne se borne pas à la description complète du Ciel, mais cherche à mettre à la portée du lecteur les résultats les plus importants de la Mécanique céleste. L'auteur s'est inspiré dans ce but de l'*Exposition du système du monde* de Laplace et du beau Traité d'Astronomie de L. Herschel. Il a pu ainsi donner en langage ordinaire une explication des perturbations planétaires les plus importantes. Il a reproduit aussi un grand nombre d'aperçus intéressants sur l'Astronomie physique, d'après Arago, le fondateur de cette science qui a pris de nos jours un si grand développement. Francœur donne en outre des renseignements curieux sur l'origine mythologique des constellations et sur l'art de vérifier les dates historiques. »

III. C'est en 1809 que Biot a été appelé à la chaire d'Astronomie de la Faculté des Sciences, dont il est resté titulaire jusqu'en 1846. Les premiers Ouvrages qui ont inauguré sa longue et brillante carrière sont un essai de Géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, un Traité

d'Astronomie physique, et une traduction de la *Physique mécanique* de Fischer, augmentée de Notes sur les anneaux colorés, la double réfraction et la polarisation de la lumière. Le Traité de Géométrie analytique, fort remarquable par la simplicité et la clarté de l'exposition, n'a pas été le seul travail mathématique de l'illustre savant; on lui doit encore des notions élémentaires de Statique et des recherches sur l'intégration des équations avec différences partielles et sur les vibrations des surfaces, publiées dans les *Mémoires de l'Institut*. Mais c'est à la Physique et à l'Astronomie qu'il devait entièrement consacrer son activité scientifique, et, de 1810 à 1826, nous le voyons quitter la chaire d'Astronomie pour professer, à la demande de ses collègues, la partie de la Physique relative à l'acoustique, au magnétisme et à la lumière. C'est en 1815 qu'il reconnut la polarisation rotatoire dans l'essence de térébenthine, découverte d'une importance capitale et qui a été jusqu'à la fin de sa vie l'objet de ses recherches. Le Traité d'Astronomie physique en cinq Volumes, dont la troisième édition a été publiée avec le concours de M. Lefort, est continuellement employé par les astronomes, auxquels il rend les plus grands services (¹). D'autres travaux d'une nature bien différente ont aussi contribué à son illustration.

Biot était un érudit et un écrivain; il a appartenu à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres et à l'Académie française. Il a publié des *Mélanges scientifiques et littéraires* en trois Volumes, un précis de l'histoire de l'Astronomie chinoise, des études sur l'Astronomie indienne, des recherches sur l'Astronomie égyptienne. Le mérite de ces Ouvrages le place, avec ses travaux de Physique et d'Astronomie, parmi les hommes de science les plus considérables et les plus renommés de notre époque.

IV. Les Sciences mathématiques ont été représentées avec éclat, au commencement de ce siècle, par d'illustres géomètres; Poisson figure parmi eux à côté de Laplace, de Lagrange et de Fourier. C'est surtout de l'auteur de la *Mécanique céleste* qu'il se rapproche par la nature de ses travaux, son génie analytique, sa

---

(¹) On trouvera à la fin une Note sur cet important Ouvrage, que notre savant collègue, M. Wolf, a bien voulu écrire, à ma demande.

puissance pour mettre en œuvre toutes les ressources du calcul. Lagrange, à qui l'on doit la *Mécanique analytique* et de grandes découvertes dans la théorie du son et la mécanique céleste, avait consacré une part importante de ses efforts aux mathématiques abstraites; après avoir fondé le calcul des variations, il a laissé la trace de son génie dans l'Algèbre et la théorie des nombres. Pour Laplace et Poisson, l'analyse pure n'est point le but, mais l'instrument; les applications aux phénomènes physiques sont leur objet essentiel, et Fourier, en annonçant à l'Académie des Sciences les travaux de Jacobi, a exprimé le sentiment qui dominait à son époque, dans ces termes que nous reproduisons :

« Les questions de la Philosophie naturelle qui ont pour but l'étude mathématique de tous les grands phénomènes sont aussi un digne et principal objet des méditations des géomètres. On doit désirer que les personnes les plus propres à perfectionner la science du calcul dirigent leurs travaux vers ces hautes applications, si nécessaires aux progrès de l'intelligence humaine. »

Mais, en ayant un autre but, Poisson et Fourier contribuent au développement de l'Analyse, qu'ils enrichissent de méthodes, de résultats nouveaux, de notions fondamentales. Nous allons essayer de montrer l'importance des découvertes de Poisson dans le domaine de la Physique mathématique, en jetant un coup d'œil rapide sur quelques-uns de ses Mémoires.

Le premier des travaux du grand géomètre sur lequel nous appellerons l'attention se rapporte à la théorie de l'attraction. Laplace avait obtenu une équation célèbre, de la plus grande importance, à laquelle satisfait le potentiel de l'attraction de masses attirantes sur un point extérieur. Poisson a donné la nouvelle relation qui convient à un point intérieur, en supposant la densité de la masse attirante constante, et Gauss a étendu ensuite son résultat au cas où la densité varie suivant une loi quelconque.

Un autre Mémoire des plus justement renommés est relatif à la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Poisson se propose, en partant des lois de Coulomb, de déterminer analytiquement la distribution de l'électricité à la surface de ces corps et de comparer le résultat des calculs aux observations. Il expose au début de son Mémoire les bases de sa théorie,

et ces généralités, maintenant classiques, nous sont devenues si familières qu'on néglige souvent d'y associer le nom de leur auteur. Son principe est de ramener le problème de l'équilibre électrique sur un corps à trouver quelle doit être l'épaisseur de la couche fluide en chaque point de la surface, pour que l'action de la couche entière soit nulle à l'intérieur du corps électrisé; il établit aussi que la pression électrostatique en chaque point est proportionnelle au carré de l'épaisseur. Cela étant, et en se fondant sur la condition donnée par Laplace dans le tome III de la *Mécanique céleste,* pour que l'attraction d'une couche limitée par deux surfaces à peu près sphériques soit nulle sur les points intérieurs, Poisson en conclut la distribution de l'électricité à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère. De ses formules il tire une conclusion bien importante, c'est que, pour ces sphéroïdes, l'épaisseur électrique en chaque point est proportionnelle à la force répulsive du fluide. L'illustre auteur ajoute : « Il est naturel de supposer ce résultat général » ; mais la démonstration lui échappe, c'est Laplace qui la lui donne en complétant en un point essentiel le beau Mémoire dont nous faisons l'analyse. Poisson étudie particulièrement le problème de deux sphères parfaitement conductrices, à une distance quelconque l'une de l'autre. La solution très simple qu'il obtient par des intégrales définies, dans le cas où elles se touchent, montre qu'au point de contact l'épaisseur est nulle. Si les sphères viennent à être séparées, chacune emporte la quantité totale d'électricité dont elle était couverte, et, dès qu'elles sont soustraites à leur influence réciproque, cette électricité se distribue uniformément sur chaque sphère. L'analyse de Poisson fait connaître le rapport des épaisseurs moyennes en fonction du rapport des deux rayons; elle montre en particulier qu'après la séparation, l'épaisseur est toujours plus grande dans le plus petit des deux globes. Les résultats du calcul sont comparés aux nombres trouvés par Coulomb, au moyen du plan d'épreuve, et l'accord est aussi satisfaisant que possible, l'erreur ne dépassant jamais un trentième de la grandeur mesurée.

La théorie mathématique de l'électricité statique est peut-être le Chapitre le plus parfait de la *Physique mathématique,* et, nous venons de le voir, c'est à Poisson que revient la gloire d'en

avoir posé les principes, et par conséquent ouvert la voie aux géomètres illustres qui ont porté cette théorie au plus haut point de perfection.

Nous abordons maintenant un autre ordre de phénomènes dans l'étude desquels le grand analyste a encore été un initiateur : je veux parler du magnétisme. Partant de l'hypothèse de Coulomb qu'un corps aimanté est composé d'un nombre immense d'aimants élémentaires, Poisson développe la théorie du potentiel magnétique et démontre ce résultat remarquable que, dans le calcul de l'action d'un corps aimanté sur un point extérieur, on peut substituer à l'aimant réel une double distribution fictive de matière magnétique, l'une superficielle relative à la surface du corps, l'autre relative à son volume. Ces vues, aujourd'hui classiques, se présentaient sans doute assez facilement; mais Poisson eut ensuite la hardiesse d'aborder le problème du magnétisme induit. On sait qu'une masse de fer doux s'aimante en présence de corps magnétiques, et il s'agit de trouver la distribution du magnétisme dans cette masse. Dans ce but, Poisson fait l'hypothèse que le corps est composé de particules magnétiques, séparées par des intervalles où ne pénètre pas le magnétisme, de sorte que la séparation des deux fluides se fait dans chaque élément sans obstacle. Il suppose ensuite, pour pouvoir mettre le problème en équation, que les molécules sont sphériques; il est encore obligé de faire diverses hypothèses, d'ordre analytique cette fois, sur des intégrales multiples indéterminées, auxquelles le conduit son analyse. Quoi qu'il en soit de ces hypothèses et du manque de rigueur de certaines déductions, la forme des équations auxquelles arrive le grand géomètre n'a pas été modifiée par les travaux ultérieurs : il est seulement impossible de conserver à certaines constantes la signification qu'il croyait pouvoir leur donner. Citons, entre autres résultats, cette belle proposition que, quand un aimant est produit par influence, il n'y a de magnétisme libre qu'à sa surface. Poisson applique ses savantes formules à la solution complète du problème de l'induction d'une masse de fer doux, limitée par deux sphères concentriques, sous l'action du magnétisme terrestre, et en conclut une solution aussi simple qu'élégante. N'oublions pas non plus que ses Mémoires servent de base à toutes les études sur le

magnétisme des navires; la pratique vient donc ainsi apporter sa consécration à une œuvre, qui, malgré les difficultés qu'elle présente encore, est assurée de ne pas périr.

Nous quitterons les travaux de Physique mathématique en nous bornant à indiquer, dans l'œuvre si considérable de Poisson, ses recherches sur la capillarité, la théorie de la chaleur, les lois de l'équilibre des surfaces élastiques, la propagation du mouvement dans les fluides élastiques. Nous nous contenterons aussi de mentionner ses Mémoires sur le calcul des variations, le calcul des probabilités, l'invariabilité du jour sidéral, la libration et le mouvement de la Lune autour de la Terre, l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes, et enfin son Traité de Mécanique qu'aucun Ouvrage sur cette science n'a encore surpassé et qui est entre les mains de tous les géomètres. Dans un grand nombre de ses belles et profondes recherches, Poisson a été un continuateur de Laplace et a suivi, en s'inspirant de ses travaux et de son génie, l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*. Mais il se rattache aussi à l'analyse de notre temps dans une question de la plus grande importance et qui présente un intérêt singulier au point de vue de l'invention mathématique. On en jugera par la lettre suivante que Jacobi a adressée au Président de l'Académie des Sciences, en 1850 :

« M. de Humboldt vient de me communiquer un fragment d'une Notice biographique sur M. Poisson, dont la lecture m'a donné envie d'adresser, à vous, Monsieur, et à votre illustre Académie, quelques remarques sur la plus profonde découverte de M. Poisson; mais qui, je crois, n'a bien été comprise ni par M. Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni par son auteur lui-même. Le théorème dont je parle me semble être le plus important de la Mécanique et de cette partie du Calcul intégral qui s'attache à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires; toutefois on ne le trouve ni dans les Traités de Calcul intégral, ni dans la *Mécanique analytique*. Comme ce théorème ne servait qu'à établir une autre proposition dont Lagrange avait donné une démonstration plus simple, celui-ci n'en parlait dans sa *Mécanique analytique* que comme d'une preuve d'une grande force analytique, sans trouver nécessaire de le faire

entrer dans cet Ouvrage. Et depuis, tout le monde ne le regardant que comme un théorème auxiliaire remarquable par la difficulté de le prouver, et personne ne l'examinant en lui-même, ce théorème vraiment prodigieux et jusqu'ici sans exemple est resté en même temps découvert et caché.

» Le théorème en question, énoncé convenablement, est le suivant :

« Un nombre quelconque de points matériels étant tirés par des
» forces et soumis à des conditions telles que le principe de la con-
» servation des forces vives ait lieu, si l'on connaît, outre l'inté-
» grale fournie par ce principe, deux autres intégrales, on en peut
» déduire une troisième, d'une manière directe, et sans même em-
» ployer des quadratures, etc. »

Poisson a été l'honneur de la Faculté des Sciences ; il est mort prématurément, en laissant d'admirables travaux et ayant donné l'exemple d'une activité scientifique extraordinaire. Jacobi aussi est mort avant le temps, et c'est après lui qu'a été publié le Mémoire célèbre intitulé : *Nova methodus æquationes differentiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcumque propositas integrandi*. Le grand analyste, en rappelant la découverte de Poisson dont nous venons de parler, découverte donnée sous la forme la plus explicite dans le Mémoire sur la variation des constantes, s'exprime ainsi : *Habemus hic præclarum exemplum, nisi animo præformata sint problemata, fieri posse ut vel ante oculos posita gravissima inventa non videamus.*

V. Sturm a succédé à Poisson dans la chaire de Mécanique rationnelle de la Faculté des Sciences. Le nom de l'éminent géomètre est attaché à un théorème qui est l'une des plus importantes propositions de la théorie des équations algébriques, et à de savants Mémoires d'Analyse sur les équations différentielles linéaires du second ordre, sur une classe d'équations aux dérivées partielles, sur l'optique, etc. Le théorème de Sturm a eu le bonheur de devenir immédiatement classique et de prendre dans l'enseignement une place qu'il conservera toujours. Sa démonstration, où n'entrent que les considérations les plus élémentaires, est un rare exemple de simplicité et d'élégance. Elle intéresse et frappe vive-

ment les élèves en présentant, sous une forme à la fois mystérieuse et facile, la solution, qui avait longtemps éludé tous les efforts, de cette question capitale : « Déterminer le nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre des limites données ». Au début de leurs études, elle leur permet de goûter le plaisir délicat et élevé que les œuvres du génie n'accordent ordinairement qu'à de grands efforts; aussi le nom de l'inventeur devint-il rapidement populaire en France, en Angleterre où la Société royale de Londres lui décernait la médaille de Copley, et dans toute l'Europe. Le théorème de Cauchy qui a suivi de près celui de Sturm, l'a dépassé en donnant une méthode de même nature pour déterminer le nombre des racines imaginaires d'une équation qui sont à l'intérieur d'un contour. C'était par la voie ardue du Calcul intégral que le grand géomètre avait obtenu sa merveilleuse découverte; Sturm, en collaboration avec Liouville, puis seul dans un autre Mémoire, est parvenu à une démonstration entièrement élémentaire de la proposition de Cauchy. Plus tard, le théorème de Sturm s'est présenté sous un point de vue bien différent de celui de l'inventeur, et a été déduit, indépendamment de toute considération de continuité, des propriétés des formes quadratiques. Cette voie nouvelle, où l'on trouve le nom de Jacobi, a été ouverte par M. Sylvester, et Sturm a tenu à honneur de démontrer le premier les résultats extrêmement remarquables dont l'illustre analyste anglais n'avait donné que l'énoncé. Nous mentionnerons enfin son Cours de Mécanique, publié par M. Prouhet, son Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Ouvrages d'enseignement qui se recommandent par les qualités de clarté et de précision qui se joignaient, dans Sturm, au don de l'invention.

VI. La Faculté des Sciences s'est augmentée en 1838 d'une chaire de Mécanique physique et expérimentale. Elle avait été créée pour Poncelet, qui s'est illustré dans la Science pure et dans les Mathématiques appliquées par de grandes et belles découvertes dont nous présentons une rapide esquisse.

L'œuvre capitale du savant illustre est le Traité des propriétés projectives des figures, qui a paru en 1822 et dont une seconde édition a été publiée en 1865. Voici le jugement qu'en porte

M. Bertrand dans son bel éloge historique de Poncelet, lu à la séance publique de l'Académie des Sciences en 1875 :

« L'étude de toutes les parties du Traité des propriétés projectives peut seule faire apprécier au lecteur géomètre l'art merveilleux qui les fait naître les unes des autres, en conduisant par une voie singulière et nouvelle jusqu'aux vérités les moins prévues au départ. Les formules algébriques sont strictement bannies des démonstrations ; mais l'Algèbre, depuis Descartes, embrasse trop étroitement la Géométrie pour que rien puisse les désunir; et les conceptions les plus subtiles, en guidant, sans se montrer, l'application des principes, en justifient la hardiesse. »

Cette appréciation profonde et si exacte de l'éminent Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Poncelet en a donné les éléments et l'a préparée par l'Ouvrage qui a pour titre : *Applications d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures.*

Je m'arrêterai un moment à cette partie des travaux de l'éminent auteur pour montrer qu'en se livrant à son inspiration géométrique, il se trouve conduit aux plus hautes théories de l'Analyse.

Je remarque tout d'abord qu'une question extrêmement intéressante traitée dans l'article intitulé : *Exposé géométrique des propositions sur les polygones inscrits ou circonscrits d'ordre pair et impair,* s'est présentée à Göpel dont le nom est attaché à l'une des plus grandes découvertes de notre époque, celle des fonctions de deux variables qui sont les inverses des intégrales hyperelliptiques du premier ordre. Elle a fait le sujet du Mémoire du grand géomètre qui a été publié après sa mort : *Ueber Projectivät der Kegelschnitte, als kummer Gebilde.*

J'appelle ensuite l'attention sur les recherches géométriques et analytiques relatives à la projection d'un système de courbes du second degré suivant des circonférences de cercle. Les résultats exposés dans le Traité des propriétés projectives donnent, comme Jacobi l'a montré, la solution complète d'une question analytique importante et difficile, la réduction à la forme la plus simple d'une intégrale double, à laquelle l'illustre analyste a consacré un de ses Mémoires (*Journal de Crelle,* t. 13).

Je signalerai enfin les théorèmes généraux sur les polygones mobiles inscrits à une courbe du second degré, et circonscrits à une ou plusieurs autres. Une belle découverte de Jacobi a révélé le lien intime de cette étude avec la théorie des fonctions elliptiques, et les formules de cette théorie qui concernent la multiplication de l'argument par un nombre entier.

Les travaux de Géométrie pure n'ont occupé qu'une partie de la vie de Poncelet. L'illustre savant est aussi l'inventeur d'une roue hydraulique dont les effets dépassent tout ce qui avait été obtenu avant lui, et d'un système nouveau de pont-levis qui a rendu son nom populaire. Avant d'être appelé à la Sorbonne, il avait été chargé, comme officier du Génie, de l'enseignement de la Mécanique pratique à l'École d'application de Metz; ses Leçons ont eu un éclatant succès et ont encore ajouté à sa célébrité. Réunies et complétées par de nombreuses additions, elles forment maintenant deux Ouvrages d'une haute importance, l'*Introduction à la Mécanique industrielle* et le *Cours de Mécanique appliquée aux machines*, qui ont été publiés après la mort de l'auteur, par les soins dévoués de M. Kretz. Le géomètre inventeur se retrouve dans cet ordre d'études; les questions de pratique le conduisent à des recherches qui appartiennent aux régions élevées de l'Analyse. C'est ainsi qu'il donne au *Journal de Crelle* un Mémoire excellent sur l'application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. Un autre Travail, ayant pour objet la valeur approchée sous forme linéaire de la racine carrée de la somme ou de la différence de deux carrés, a ouvert la voie aux recherches originales et profondes qui ont illustré le nom de M. Tchebicheff.

VII. La carrière scientifique de Delaunay, qui a occupé en 1851, après Poncelet, la chaire de Mécanique physique et expérimentale, s'est ouverte par des travaux d'Analyse. Nous signalerons en premier lieu sa thèse de doctorat sur la distinction des maxima et des minima dans les questions qui dépendent du calcul des variations, puis une étude sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, qui l'a conduit à un résultat très digne d'attention. Delaunay montre qu'en faisant rouler une

ellipse ou une hyperbole sur l'axe, le foyer décrit la courbe méridienne de cette surface. Il s'est ensuite proposé d'obtenir, parmi les diverses courbes isopérimètres tracées sur une surface quelconque, celle qui renferme une aire maximum. Une telle courbe est une circonférence de cercle, lorsque la surface est plane; Delaunay établit, par une analyse habile, ce théorème qu'en tout point de la courbe de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface quelconque, la sphère qui contient le cercle osculateur de la courbe, et dont le centre est sur le plan tangent, a un rayon constant.

Je signalerai encore un Mémoire sur la théorie des marées qui inaugure ses travaux de Mécanique céleste, un Traité de Mécanique rationnelle, un Cours élémentaire de Mécanique théorique appliquée, Ouvrages excellents, qui étaient le fruit de son enseignement à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique. Mais c'est à l'Astronomie que Delaunay devait surtout consacrer sa puissance de travail et son beau talent de géomètre. Une question aussi difficile qu'importante, la théorie de la Lune, a été l'objet constant des ses efforts; voici sur la méthode qu'il a suivie, et à laquelle son nom restera toujours attaché, l'appréciation que notre Collègue M. Tisserand a bien voulu me communiquer :

« Le Verrier a fait une œuvre magistrale en revisant les théories de toutes les planètes et les contrôlant rigoureusement par les observations. Le domaine de Delaunay est plus restreint; on peut dire en effet qu'il s'est occupé presque exclusivement de la Lune. Mais il faut ajouter que la théorie de notre satellite présente des difficultés considérables, en raison de la grandeur de ses perturbations et de la rapidité de son mouvement, qui nous montre le cycle complet des inégalités séculaires et ne permet pas d'employer les mêmes méthodes que dans le cas des planètes. A ce point de vue, la théorie de la Lune se rapproche plus de celles des satellites de Jupiter que des théories des planètes.

» On peut dire que Delaunay a donné une théorie à très peu près complète des perturbations causées par le Soleil dans le mouvement de la Lune, en négligeant toutefois l'action des planètes. Il a résolu ainsi d'une manière très satisfaisante, au point de vue des approximations, le problème des trois corps, dans le

cas où la masse de l'un d'eux peut être considérée comme évanouissante. La méthode qu'il a suivie est remarquable au point de vue analytique; elle diffère entièrement de celles que l'on avait employées jusqu'alors. Elle exige, il est vrai, des calculs considérables qui remplissent deux énormes volumes in-4°; mais le travail est divisé nettement en un grand nombre de parties dont chacune se prête à des vérifications faciles. Un astronome américain distingué, M. Hill, qui a beaucoup pratiqué la méthode de Delaunay, en fait le plus grand éloge. Il reste toutefois à étudier la convergence des séries employées; les beaux travaux de M. Poincaré paraissent devoir projeter une vive lumière sur ce point délicat. Quoi qu'il en soit, on peut affirmer que le travail de Delaunay est le plus satisfaisant et le plus complet de tous ceux qui traitent du même sujet. Delaunay a fait aussi un pas important dans la détermination des inégalités à longue période du mouvement de la Lune qui proviennent de l'action des planètes; mais la question ne semble pas complètement élucidée, et les recherches de Delaunay ne suffisent pas à expliquer complètement toutes les petites irrégularités de la Lune qui causent encore de cruels soucis aux astronomes. »

VIII. La découverte de Neptune a illustré à jamais le nom de Le Verrier : elle a été accueillie par une admiration unanime, que le temps a consacrée; elle a été le plus éclatant témoignage de la puissance de l'Analyse mathématique dans ses applications aux phénomènes célestes. De nombreux et importants travaux l'avaient précédée, mais ceux qui l'ont suivie sont d'un tel prix, qu'on peut assurer que Le Verrier serait, sans son immortelle découverte, le premier astronome de notre époque.

Sa carrière scientifique s'ouvre par des Mémoires concernant les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne, Uranus, et les mouvements des intersections de ces orbites; les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales; les recherches sur l'orbite de Mercure et sur ses perturbations; la détermination de la masse de Vénus et du diamètre du Soleil. Tous contiennent les plus importants résultats et montrent le travail consciencieux et approfondi d'un savant géomètre. Le second de ces Mémoires, auquel je m'arrêterai un moment, a

pour objet principal l'étude d'une équation du septième degré, qui joue le plus grand rôle dans la question de l'équilibre du système du monde, et dont la forme a l'avantage singulier de faire immédiatement reconnaître la réalité des racines en permettant d'évaluer l'influence de petites variations des coefficients sur leurs valeurs numériques. Le beau travail de Le Verrier a appelé l'attention de Jacobi, qui a repris la question afin de la traiter par une méthode plus rigoureuse et en poussant plus loin les approximations; il a été aussi l'origine du Mémoire célèbre que Borchardt a consacré à une équation de même nature plus générale et d'un degré quelconque.

C'est dans les *Annales de l'Observatoire de Paris* que le grand astronome a réuni et coordonné son œuvre qui comprend les théories du Soleil et des huit planètes principales, exposées sous le point de vue du calcul, des observations, de la comparaison de la théorie avec les observations et de la formation des Tables. On demeure confondu devant la perfection et l'immensité d'un tel travail, où la patience et la conscience la plus scrupuleuse se joignent à la plus profonde intelligence des méthodes de la Mécanique céleste. Ces méthodes, qui sont essentiellement celles de Laplace, sont exposées dans une Introduction dont le premier Chapitre résume les connaissances analytiques suffisantes au lecteur; on remarquera qu'elles se réduisent à un petit nombre de points, la trigonométrie rectiligne et sphérique, le développement des fonctions en séries, l'interpolation des suites, le calcul des intégrales par les quadratures et la résolution d'un système d'équations de condition en nombre supérieur au nombre des inconnues. Il a été donné à l'illustre auteur de ne point laisser son œuvre inachevée; Le Verrier a corrigé sur son lit de mort les dernières feuilles de la théorie de Neptune, léguant à l'Astronomie un monument impérissable qui sera l'honneur de son nom et de la Science de notre pays.

IX. Lamé est un des plus beaux génies mathématiques de notre temps. Des découvertes capitales qui ont ouvert de nouvelles voies dans la théorie de la chaleur, la théorie de l'élasticité, l'analyse générale, le placent au nombre des grands géomètres dont la trace reste à jamais dans la Science.

Le Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, dont nous parlons en premier lieu, est un chef-d'œuvre d'invention. Au début, il donne cette découverte capitale, que, lorsqu'on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe solide, limitée par des surfaces du second ordre, les surfaces d'égale température, dans l'intérieur de cette enveloppe, sont encore des surfaces du second ordre ayant les mêmes foyers que les précédentes. Vient ensuite l'idée originale, et qui devait être si féconde, des coordonnées elliptiques, consistant à déterminer un point de l'espace par l'intersection d'un ellipsoïde et de deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, ayant tous trois les mêmes foyers. Lamé démontre que ces surfaces homofocales sont orthogonales et se coupent suivant leurs lignes de courbure, en ouvrant ainsi la voie à de belles et importantes recherches de Géométrie pure, où il s'est rencontré avec Binet et Dupin. Puis il applique à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la théorie de la chaleur les nouvelles variables, qui sont les paramètres de ces surfaces ; sa méthode et les résultats qu'il obtient font l'admiration des analystes. Dans quatre Ouvrages ayant pour titres : *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes ; Sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications ; Sur la théorie analytique de la chaleur ; Sur la théorie mathématique de l'élasticité,* le grand géomètre a complètement et admirablement développé les conséquences des théories qui étaient en germe dans son premier Mémoire. Les Leçons sur l'élasticité, où sont traités les points les plus élevés et les plus difficiles de la théorie de la lumière, servent aussi de fondement à un grand nombre d'applications pratiques ; Lamé était un ingénieur et un physicien. Les Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes contiennent une exposition des découvertes de Jacobi sur la transformation des fonctions elliptiques. L'illustre auteur, après s'être engagé, au début de ses travaux, dans les voies ouvertes par Fourier et Poisson, apportait son concours aux grandes questions de l'Analyse de notre temps. Il a donné un Mémoire extrêmement remarquable sur l'un des plus difficiles sujets de l'Arithmétique, en démontrant ce qu'on nomme le *dernier théorème de Fermat*, dans le cas où l'expo-

sant est égal au nombre sept. On lui doit un Ouvrage de Physique en trois Volumes, un examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie, où l'on reconnaît son beau talent, puis divers Opuscules, parmi lesquels un plan d'écoles générales et spéciales, pour l'agriculture, l'industrie manufacturière, le commerce et l'administration, publié en collaboration avec Clapeyron.

Lamé a consacré sa vie entière à la Science, avec un désintéressement et un dévouement dont le souvenir se joint à notre admiration pour son génie et les découvertes qui ont rendu son nom impérissable.

X. Les travaux mathématiques de Liouville embrassent les diverses parties de l'Analyse, la Mécanique céleste et la Physique mathématique, le Calcul intégral, la Géométrie et l'Algèbre, la théorie des fonctions elliptiques et la théorie des nombres; tous sont le témoignage d'un talent de premier ordre et d'une activité scientifique qui ne s'est jamais interrompue.

Les premiers Mémoires du savant géomètre, publiés dans le *Journal de l'École Polytechnique,* ont pour objet le calcul des différentielles à indices quelconques, entrevu par Leibnitz, des recherches intéressantes sur les équations aux dérivées partielles de la théorie de la chaleur, et la détermination sous forme explicite des intégrales de différentielles algébriques. Sur ce point, Liouville a obtenu un résultat important, qui est devenu classique, en démontrant avec simplicité et élégance la proposition énoncée par Abel, que, dans l'expression de l'intégrale, les logarithmes et les intégrales elliptiques ne peuvent entrer que sous forme linéaire. Ces recherches ont pour conséquence d'établir en toute rigueur que les premières transcendantes de l'Analyse ne peuvent s'exprimer par les éléments algébriques, que les intégrales elliptiques ne peuvent être représentées par des combinaisons, en nombre fini, de fonctions algébriques, de logarithmes et d'exponentielles. La même conclusion est aussi obtenue, dans un cas plus difficile, pour les intégrales elliptiques, de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions du module. Ces questions, comme le remarque Liouville, ont quelque rapport avec la théorie des nombres; c'est en effet dans le même ordre d'idées qu'il

aborde plus tard les transcendantes numériques. Il démontre, le premier, que la base des logarithmes hyperboliques ne peut être la racine d'une équation du second degré ou même d'une équation bicarrée à coefficients entiers; il obtient ensuite un résultat extrêmement digne de remarque, en établissant que des séries numériques d'une loi simple, qui assurent une convergence suffisamment rapide, ne peuvent satisfaire à aucune équation algébrique à coefficients entiers. Le Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques contient des propositions d'un haut intérêt, établies par une méthode facile et élégante; on y remarque entre autres une démonstration très simple des théorèmes donnés par Jacobi dans le Mémoire célèbre qui est intitulé : *Theoremata nova algebrica circa systema duarum equationum, inter duas variabiles propositarum* (tome 14 du *Journal de Crelle*).

Les travaux de Physique mathématique montrent avec éclat le talent de l'illustre analyste; le problème de l'équilibre de la chaleur dans un ellipsoïde homogène, le problème de Gauss sur la distribution à la surface de l'ellipsoïde d'une matière attractive ou répulsive, de manière qu'en chaque point le potentiel ait une valeur donnée, sont traités par une méthode qui est un chef-d'œuvre de clarté et de simplicité. Deux lettres adressées à la même époque à M. Blanchet, sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique, sont un travail admirable qui jette la plus vive lumière sur les découvertes de Lamé, en y ajoutant des résultats entièrement nouveaux et de la plus grande importance.

Liouville a abordé le premier la théorie des fonctions uniformes doublement périodiques, et établi cette importante proposition, que, dans le cas où elles n'ont qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur du parallélogramme des périodes, elles s'expriment par une fonction rationnelle du sinus d'amplitude et de sa dérivée.

Ses recherches arithmétiques contiennent une foule de beaux théorèmes dont il s'est contenté de donner les énoncés, et qui ont été démontrés après lui, sur les fonctions numériques relatives aux diviseurs des nombres, sur les questions les plus difficiles de la théorie des formes quadratiques à deux et à un plus grand nombre d'indéterminées; elles ont montré sous un nouveau point de vue le rôle des identités analytiques dans la théorie des

nombres et contribueront au progrès de cette branche de la Science.

A tant de beaux travaux qui ont illustré sa carrière, le savant géomètre a joint la publication du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, depuis 1836 jusqu'à 1874; c'est, avec le *Journal de Crelle*, le Recueil le plus important pour la Science à cette époque.

XI. Serret a occupé les chaires d'Algèbre supérieure et d'Astronomie, à titre de suppléant de Francœur et de Le Verrier, avant de succéder à Lefébure de Fourcy dans l'enseignement du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Ses Leçons, claires et substantielles, ont eu le plus grand succès, et il a laissé à la Faculté des Sciences le souvenir d'un éminent professeur. C'était aussi un beau talent mathématique; son Cours d'Algèbre supérieure est un excellent Ouvrage, le meilleur qu'on possède sur cette Science et qui se trouve entre les mains de tous les géomètres. Ses Mémoires sur la représentation des intégrales elliptiques par des arcs de courbe offrent, avec une analyse ingénieuse et élégante, des résultats très intéressants, dont Liouville a fait ressortir le mérite et auxquels il a ajouté des remarques importantes. D'autres Mémoires ont pour objet la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraire, les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques, la théorie des intégrales eulériennes, la théorie des courbes à double courbure, l'équation de Kepler et les séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des corps célestes, la théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. Ce dernier travail a paru dans les *Annales de l'Observatoire de Paris;* il simplifie et complète en des points essentiels les recherches de Poisson sur cette grande et difficile question; c'est l'œuvre mathématique la plus importante de Serret. En Algèbre, on lui doit encore des recherches sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme, et sur les équations abéliennes, dans le cas où la relation qui lie deux racines est linéaire par rapport à chacune d'elles. Il faut aussi mentionner une Note sur une question arithmétique à laquelle est attaché le nom célèbre de Dirichlet, et qui présente beaucoup d'in-

térêt. Serret établit de la manière la plus ingénieuse, au moyen des principes élémentaires, ces cas particuliers de la proposition du grand géomètre allemand, qu'il existe une infinité de nombres premiers dans les progressions arithmétiques dont la raison est 8 ou 12. Notre Collègue a couronné sa carrière scientifique par une œuvre considérable qui lui mérite la reconnaissance du monde mathématique. Il s'est consacré avec les soins les plus consciencieux à l'édition, publiée sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, des Œuvres de Lagrange. Une mort prématurée ne lui a pas permis de conduire à sa fin ce grand travail; l'entreprise a été recueillie et continuée par M. Darboux, Membre de l'Académie des Sciences, avec le même zèle, le même dévouement pour la mémoire de l'immortel géomètre.

XII. Duhamel a été pendant vingt années, de 1849 à 1869, professeur d'Algèbre supérieure; voici l'appréciation de sa carrière scientifique dont je suis redevable à M. Bertrand :

« Duhamel, élève et ami de Fourier et d'Ampère, aimait surtout dans les Mathématiques les applications à la Physique. La beauté des problèmes et l'élégance des méthodes d'Analyse l'intéressaient moins que les résultats. C'est par là surtout qu'il différait de Lamé, son condisciple de l'École Polytechnique et son ami.

» La théorie de la chaleur, celle de l'élasticité et de l'étude des cordes vibrantes lui devaient des travaux de premier ordre. Il a le premier, dans l'étude de la propagation de la chaleur, substitué au corps homogène considéré par Fourier un cristal dont la conductibilité n'est pas la même dans toutes les directions. De belles expériences de de Sénarmont ont vérifié les conclusions du calcul. Dans l'étude des cordes vibrantes, Duhamel a été plus heureux encore, et sur ce sujet tant étudié il a su donner des principes nouveaux. Le Mémoire de Duhamel a été admiré et loué par Cauchy, il est devenu classique.

» Duhamel, indépendamment des applications, voyait surtout dans les théories mathématiques un utile exercice de logique. La dialectique dans ses Leçons a souvent tenu une grande place. Sa maxime était qu'il importe moins d'étendre le champ des études

que de plier les esprits à une discipline sévère. Il aimait la clarté, mais exigeait la rigueur. Il reprenait parfois, pour se donner le plaisir de les réfuter, les vieilles objections des sophistes grecs. L'Histoire de la Science ajoutait souvent à l'intérêt de ses Leçons. Chez les plus grands génies qu'il mettait en scène, la méthode surtout le préoccupait. Depuis Archimède jusqu'à Lagrange, il aimait à montrer le progrès, la transformation et souvent l'équivalence des principes. Parmi les beaux Mémoires qu'il a composés et les Ouvrages classiques que la Science lui doit, aucun n'a été écrit avec plus de plaisir et de soin, avec un sentiment plus vif du service rendu à ses successeurs, que son dernier écrit sur les méthodes d'enseignement de la Science.

» Peu de savants aussi éminents ont appliqué avec autant de force un esprit créateur à la perfection de l'art d'enseigner. »

XIII. Chasles est l'une des plus grandes illustrations de la Faculté; ses découvertes en Géométrie, les Ouvrages qu'il a publiés sur cette Science l'ont placé au premier rang parmi les savants de l'Europe et rendu son nom à jamais célèbre. Pendant un demi-siècle, les travaux de notre Collègue se sont succédé sans relâche, accueillis avec admiration, élevant la Géométrie à cette hauteur où elle se rejoint aux théories profondes du Calcul intégral, et contribuant pour la plus importante part à son développement et à ses progrès à notre époque. De grandes et belles découvertes en Mécanique se sont ajoutées à son œuvre principale, ainsi que des recherches d'érudition sur les Mathématiques et l'Astronomie des Indiens et des Arabes; nous indiquerons succinctement ces travaux qui ont jeté tant d'éclat, et sont présents à toutes les mémoires.

C'est dans la question célèbre de l'attraction des ellipsoïdes que Chasles a donné un mémorable exemple de sa puissance d'invention par les méthodes de la Géométrie pure. Maclaurin était parvenu par la voie géométrique à cette belle proposition, que deux ellipsoïdes homogènes homofocaux exercent sur un point d'un de leurs axes principaux des actions dirigées suivant la même droite et proportionnelles à leurs masses. Laplace et Legendre avaient ensuite, par deux méthodes analytiques différentes, étendu ce résultat au cas d'un point quelconque. Chasles

réussit à établir la généralisation du théorème de Maclaurin, et par suite à fonder uniquement sur de simples considérations géométriques cette théorie difficile de l'attraction des ellipsoïdes, qui avait demandé tant d'efforts aux plus illustres analystes : Laplace, Legendre, Gauss, Ivory, Poisson et Dirichlet.

Peu après, l'illustre géomètre découvre sur les surfaces de niveau l'une des plus générales et des plus importantes propositions de la théorie de l'attraction, qui s'applique à l'électricité statique et à la chaleur. Si l'on considère une surface de niveau relative à l'action d'un corps limité quelconque qui lui est intérieur, comme recouvrant une couche homogène infiniment mince, dont les épaisseurs en chaque point soient en raison inverse de leur distance à la surface de niveau infiniment voisine, on aura ces deux propriétés : 1° cette couche n'exercera aucune action sur un point intérieur; 2° l'attraction sur un point extérieur aura la même direction que l'attraction exercée par le corps lui-même, et les intensités des deux attractions seront proportionnelles aux masses attirantes.

Des recherches d'un autre genre se joignent à ces admirables découvertes ; l'infatigable savant semble se distraire et se délasser en s'occupant des Ouvrages mathématiques des Hindous et de l'origine de notre système de numération. Il établit qu'un passage célèbre de la Géométrie de Boëce, la Lettre de Gerbert à Constantin et les autres écrits du x^e et du xi^e siècle sur l'abacus sont des Traités d'Arithmétique décimale, et qu'ils ont servi comme d'introduction dans les écoles du moyen âge aux quatre parties du quadrivium, et notamment à la Géométrie. Mais les travaux d'érudition ne portent point préjudice à l'invention mathématique; Chasles découvre les théorèmes, devenus classiques, sur les propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, puis les propriétés générales des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable, qui appartiennent autant à la théorie des fonctions elliptiques qu'à la Géométrie. Parmi bien d'autres, je cite seulement ces théorèmes qui se lient à ceux de Poncelet :

Quand un polygone d'un nombre quelconque de côtés est inscrit à une ellipse et circonscrit à une seconde ellipse homofocale, son périmètre est un maximum par rapport à la première courbe et un minimum par rapport à la seconde, et ses côtés déterminent sur l'ellipse inscrite des arcs ayant, deux à deux, des différences

rectifiables. Les polygones, en nombre infini, inscrits dans la première courbe et circonscrits à la seconde, ont le même périmètre.

C'est l'époque la plus féconde de la vie scientifique si remplie de l'illustre inventeur; des fonctions elliptiques son génie géométrique l'a conduit aux transcendantes plus complexes, qu'on nomme *intégrales hyperelliptiques de premier ordre.* Jacobi, en employant les méthodes de Lamé, auquel il a rendu un éclatant hommage, venait d'obtenir, au moyen de ces intégrales, l'équation des lignes géodésiques à la surface de l'ellipsoïde. Chasles fait voir que les résultats du grand analyste, déduits des plus profonds calculs, se démontrent par la seule Géométrie, et il y ajoute des théorèmes extrêmement remarquables, sur la description des lignes de courbure des surfaces du second degré. Je dois maintenant me contenter d'indiquer, dans une succession de Mémoires qui sont des chefs-d'œuvre, les recherches sur les courbes planes et à double courbure du troisième ordre; la théorie analytique des courbes à double courbure tracées sur l'hyperboloïde à une nappe; les propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloïde; les propriétés des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre; le principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie; la théorie des caractéristiques.

Il faut aussi me borner à mentionner la restitution des trois Livres des Porismes d'Euclide, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus; l'histoire des Mathématiques, ainsi que des recherches sur l'Astronomie des Arabes. A tant de beaux et importants travaux, l'illustre géomètre a joint un Ouvrage capital, écrit avec une admirable clarté, où l'érudition se joint à la plus haute Science, l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement celles qui se rapportent à la Géométrie moderne.* Le *Traité de Géométrie supérieure,* le *Traité des sections coniques,* le *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, sont aussi des Œuvres d'une haute importance.

Nous venons de jeter un coup d'œil rapide sur les découvertes et les travaux qui ont à jamais illustré le nom de Chasles: il nous reste à dire que ses amis et tous ceux qui ont connu notre cher et vénéré Collègue gardent l'inaltérable souvenir de la bonté qui, chez le grand géomètre, était la compagne du génie.

XIV. Les Œuvres de Cauchy occupent une place immense dans la Science. Toutes les parties des Mathématiques, la Géométrie, l'Algèbre, la Théorie des nombres, le Calcul intégral, la Mécanique, l'Astronomie, la Physique mathématique, lui doivent les plus grandes découvertes. Plus de sept cents Mémoires, qui ont été publiés soit à part, soit dans les *Comptes rendus,* les Mémoires de l'Académie des Sciences et les principaux Recueils du temps; puis des Ouvrages d'une importance capitale : *Les anciens et les nouveaux Exercices de Mathématiques,* l'*Analyse algébrique,* le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* etc., sont le témoignage de sa prodigieuse activité scientifique et de la fécondité de son génie. Il faut renoncer à énumérer tant de travaux, à faire l'appréciation de tant de découvertes, à dire leur rôle dans la Science et leur influence sur ses progrès. Mais, dans l'œuvre si étendue de Cauchy, une part principale doit être donnée à l'idée fondamentale d'étendre la notion première de l'intégrale définie, en faisant passer la variable, d'une limite à l'autre, par une succession de valeurs imaginaires, par un chemin arbitraire. La Science n'a point d'exemple d'une conception plus féconde : elle a été la source des plus belles découvertes de son auteur; elle est entrée dans les éléments et son usage est continuel en Analyse. Elle a donné naissance au Calcul des résidus que le grand géomètre applique à la détermination des intégrales définies, à l'intégration des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires à coefficients constants, à l'intégration des équations aux différences partielles, en satisfaisant aux conditions imposées dans les problèmes de Physique mathématique, et, en Astronomie, au développement de la fonction perturbatrice. Elle l'a conduit à la résolution, au moyen d'intégrales définies, des équations algébriques et transcendantes, et à la découverte admirable d'une méthode analogue à celle du théorème de Sturm, pour obtenir le nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique dans un contour. Elle donne l'explication des valeurs multiples du logarithme, de l'arc sinus, des intégrales des fonctions rationnelles et algébriques; elle conduit à considérer la valeur d'une fonction en un point comme pouvant dépendre du chemin suivi pour parvenir à ce point.

Ces résultats ont levé des difficultés dont l'histoire de la Science

conserve la trace, et qui ont longtemps arrêté les géomètres; ils ont ouvert la voie à la théorie générale des fonctions, l'œuvre analytique importante de notre temps. A cette œuvre Cauchy a donné la première impulsion; ceux qui la poursuivent aujourd'hui sont ses continuateurs, les découvertes mémorables de Riemann et de M. Weierstrass dans cette voie, le théorème célèbre de M. Mittag-Leffler ont été préparés par les travaux du grand géomètre français. C'est à Cauchy qu'est due l'expression d'une fonction, en tous les points d'une aire, par une intégrale relative au contour de cette aire, qui est un élément analytique fondamental, et dont se tirent si facilement les séries de Maclaurin et de Taylor, celles de Lagrange, de Fourier, et les plus importantes propositions de la théorie des fonctions uniformes. Nous ne pouvons omettre, non plus, de rapporter à la notion de l'intégrale prise le long d'une courbe la méthode la plus facile pour établir les propriétés des fonctions doublement périodiques. L'Analyse, en étendant son domaine, aplanit la voie souvent si laborieuse, si pénible à suivre, des premiers inventeurs; ses principes gagnent en puissance et deviennent d'un accès plus facile, les méthodes prennent une complète rigueur, et Cauchy a la plus grande part à ces importants progrès. Parmi tant d'exemples, je citerai, dans la théorie du mouvement des planètes, la détermination de la valeur limite que ne doit pas dépasser l'excentricité, pour que l'anomalie excentrique et le rayon vecteur soient développables en séries convergentes. Le résultat qu'a découvert Laplace au prix des plus grands efforts et par une analyse d'une étonnante hardiesse, Cauchy l'obtient au moyen d'une méthode absolument rigoureuse, et si facile qu'elle est entrée dans l'enseignement. L'illustre géomètre laisse à jamais l'empreinte de son génie dans ces grandes et belles questions que j'ai indiquées rapidement. En Géométrie élémentaire, je mentionnerai comme présentant un caractère unique la démonstration de cette proposition, qu'un polyèdre convexe quelconque ne peut être changé en un autre polyèdre convexe qui serait compris sous les mêmes plans polygonaux et disposés dans le même ordre les uns à l'égard des autres. En Arithmétique, Cauchy donne la démonstration, vainement cherchée jusqu'à lui, du théorème énoncé par Fermat, que tout entier est décomposable en trois nombres triangulaires, en

quatre carrés, ou cinq nombres pentagones, etc. Ses autres travaux, sur les sommes alternées et la représentation des nombres premiers ou de leurs puissances par les formes quadratiques de déterminant négatif que Gauss a nommées *principales*, sont du plus haut intérêt. Les recherches algébriques concernent surtout la théorie des substitutions, la détermination du nombre de valeurs qu'une fonction peut recevoir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les lettres qui y entrent; elles ont conduit à des théorèmes connus de tous les géomètres et ont servi de base aux beaux travaux de M. Camille Jordan sur cette question aussi importante que difficile.

En Mécanique, il faut mentionner le Mémoire sur la théorie des ondes, couronné par l'Académie des Sciences; ceux qui ont pour objet l'équilibre et le mouvement d'une lame solide, les vibrations longitudinales d'une verge cylindrique ou prismatique à base quelconque; la question, déjà traitée par Navier, de l'équilibre et du mouvement d'un système de points matériels, sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles; les vibrations d'un double système de molécules et de l'éther dans un corps cristallisé; les systèmes isotropes de points matériels; la pression et la tension dans un corps solide; les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels, etc. Une autre série de travaux non moins beaux et importants ont pour objet la réflexion et la réfraction de la lumière, la polarisation, la diffraction et la dispersion; je me borne à indiquer ce résultat capital, que l'indice de réfraction s'exprime par une fonction simple de la longueur d'onde.

La Mécanique céleste a été aussi l'objet de Mémoires nombreux et célèbres. Cauchy parvient, en employant le Calcul des résidus, à une nouvelle forme de développement en série pour la fonction perturbatrice, qui présente ces propriétés caractéristiques bien dignes d'attention. Chacun des termes séculaires indépendants des anomalies s'exprime sous une forme finie, par une fonction des éléments des orbites, simplement algébrique à l'égard des grands axes et des excentricités. Dans chaque terme périodique, les sinus et cosinus des multiples des anomalies moyennes ont pour coefficients des séries simples dont les termes s'expriment également

sous forme finie et sont encore algébriques par rapport aux grands axes, mais deviennent transcendants par rapport aux excentricités. C'est au moyen de ses nouvelles méthodes astronomiques, tirées de la plus profonde analyse, que Cauchy a pu vérifier en peu de jours les résultats numériques d'un travail considérable auquel Le Verrier avait consacré plusieurs années, sur le mouvement de la planète Pallas, et spécialement sur la grande inégalité due à l'influence de Jupiter.

La vie du grand géomètre, remplie par des découvertes immortelles qui sont l'honneur de la Science française, l'a été aussi par les œuvres de la charité chrétienne et une inépuisable bienfaisance. Le jour de ses obsèques, en parlant à l'assemblée d'élite, aux représentants des corps savants réunis devant sa tombe, le Maire de la ville de Sceaux a rappelé la générosité de l'homme de bien, et cette réponse de Cauchy aux observations qu'il s'était cru obligé de faire sur l'étendue de ses sacrifices pécuniaires : « Ne vous effrayez pas tant, Monsieur le Maire, ce n'est que mon traitement de la Faculté, c'est l'État qui paye. »

La Faculté a recueilli l'héritage scientifique du plus grand des géomètres français; nos Collègues Puiseux, Briot et Bouquet, morts il y a peu d'années et dont nous gardons si affectueusement le souvenir, se sont inspirés de son génie et ont consacré des travaux de premier ordre à poursuivre dans le domaine de l'Analyse les conséquences de ses découvertes; nous indiquerons en peu de mots les principaux résultats auxquels ils sont parvenus.

XV. Les diverses déterminations d'un radical portant sur un polynôme ont été longtemps considérées comme des fonctions distinctes ayant chacune le caractère de fonction uniforme, et cette manière de voir a été étendue aux racines des équations algébriques dont les coefficients contiennent une variable, lors même qu'on ne peut la résoudre par radicaux. C'est à Puiseux que revient le mérite d'avoir montré que ces quantités sont d'une autre nature analytique, et donné l'idée précise du mode d'existence des fonctions non uniformes. Dans un Mémoire d'une grande importance sur les fonctions algébriques, il a reconnu le premier le rôle capital des valeurs particulières de la variable qui annulent le discriminant de l'équation et lui font acquérir des racines égales. Il leur

donne le nom de *points critiques* et établit que c'est seulement dans une aire ne contenant aucun de ces points que les diverses racines peuvent être assimilées à autant de fonctions uniformes. Il montre ensuite que la présence de tels points à l'intérieur d'un contour a pour effet qu'en le décrivant en entier et une seule fois, les valeurs des racines ne se retrouvent point les mêmes, à l'arrivée et au départ; elles reviennent dans un autre ordre. Il en résulte que le système des racines correspondant à un contour fermé décrit par la variable donne une figure qui se modifie avec ce contour, en présentant des anneaux distincts en nombre égal au degré de l'équation ou en nombre moindre. De là Puiseux a tiré l'importante conséquence que les intégrales de fonctions algébriques sont susceptibles, comme celles des fonctions rationnelles, de déterminations multiples, suivant le chemin décrit par la variable, et a révélé ainsi l'origine de la périodicité dans les fonctions inverses de ces intégrales. Ce beau Mémoire, qui a jeté la plus vive lumière sur des questions capitales en Analyse, n'est point le seul que la Science doive au savant géomètre. Puiseux a publié d'intéressantes recherches sur les développées et les développantes des courbes planes, sur le théorème de Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure en chaque point d'une surface, sur le mouvement d'un solide de révolution posé sur un plan horizontal, etc. Nous mentionnerons surtout son travail sur l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune et un Mémoire sur les inégalités à longues périodes du mouvement des planètes, dans lequel l'auteur expose, avec la plus grande clarté et tous les développements nécessaires, la belle méthode qui avait permis à Cauchy de retrouver si aisément les résultats du grand travail de Le Verrier sur la planète Pallas. C'est à la demande de l'illustre astronome que Puiseux a composé cet excellent Mémoire, qui a paru dans le septième Volume des *Annales de l'Observatoire de Paris*.

XVI. Dans les Mathématiques pures, les noms de Briot et Bouquet sont inséparables; c'est en collaboration qu'ils ont écrit les Mémoires importants où se trouvent admirablement mises en lumière la fécondité et la puissance des idées de Cauchy. Leurs recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations

différentielles sont devenues classiques. Après avoir démontré autrement que Cauchy le théorème fondamental relatif à l'existence des intégrales, Briot et Bouquet étudient les circonstances singulières qui peuvent se présenter dans une équation du premier ordre, lorsque le coefficient différentiel devient infini ou indéterminé. Pour bien juger ce Mémoire, il faut se reporter à plus de trente ans en arrière, à une époque où l'attention n'était pas portée, comme aujourd'hui, sur le rôle des points singuliers dans l'étude des fonctions. Ce rôle capital, le Mémoire dont nous parlons le met en évidence, et le mérite d'avoir introduit pour la première fois une idée si féconde assure à ses auteurs une place importante dans l'histoire de la Science. Dans un autre travail, ayant pour objet les équations différentielles algébriques du premier ordre, où la variable ne figure pas explicitement, Briot et Bouquet ont donné un nouvel exemple de l'importance des singularités, en faisant voir qu'on en tire les conditions pour que l'intégrale soit une fonction uniforme. Ces beaux et savants Mémoires, qui ont paru dans le *Journal de l'École Polytechnique,* contribuaient puissamment au progrès de la Science. Mais Briot et Bouquet ne regardent pas leur tâche comme terminée. Dévoués à l'enseignement, ils ont voulu, dans un travail didactique, exposer les principes généraux de la théorie des fonctions, et en faire l'application à l'étude des transcendantes elliptiques. Cet Ouvrage a eu deux éditions, dont la seconde, parue en 1875, et qui a été beaucoup augmentée, ne comprend pas moins de sept cents pages. Les auteurs semblent modestement, dans leur préface, avoir pour seul but de rendre à Cauchy la justice qui lui est due, et qui, disent-ils, ne lui est pas toujours rendue. Le lecteur attentif ne tarde pas à reconnaître l'admirable unité de ce savant Ouvrage, où tout est préparé pour montrer la fécondité des propositions générales de la théorie des fonctions. En présence d'un plan si bien ordonné, on risque d'oublier les détails; ce serait injuste, car en bien des points les auteurs font preuve d'une grande habileté dans l'art des transformations analytiques. Les derniers Chapitres du *Traité des fonctions elliptiques* sont consacrés à l'étude des intégrales abéliennes. Briot a exposé plus tard, en se bornant au problème de l'inversion, la théorie de ces transcendantes célèbres. Son excellent Ouvrage peut être considéré comme une traduction, dans le

langage familier aux disciples de Cauchy, des idées de Riemann, liées à des questions de géométrie de situation qui ont été développées par l'illustre analyste dans son Mémoire *Sur les fonctions abéliennes*.

Je ne ferai que mentionner, malgré leur intérêt, les Mémoires que Bouquet a publiés séparément. Je rappellerai un théorème devenu classique sur les systèmes de droites dans l'espace, un travail qui a ouvert un nouveau champ d'études dans la théorie des surfaces orthogonales, la démonstration des relations linéaires entre des intégrales définies hyperelliptiques du premier ordre, que Legendre avait obtenues par la voie du calcul numérique, et enfin une méthode savante pour établir que les fonctions de plusieurs variables introduites par Jacobi, comme inverses des intégrales hyperelliptiques d'ordre, sont uniformes. Mais je m'arrêterai un instant aux travaux de Physique mathématique de Briot.

XVII. Dans un Ouvrage publié sous le titre d'*Essais sur la théorie mathématique de la lumière,* Briot, en prenant pour point de départ les idées de Cauchy sur la constitution de l'éther, applique une critique pénétrante à quelques-unes des théories développées à ce sujet par le grand géomètre, et propose de nouvelles explications de la dispersion. On sait que ce phénomène consiste en une inégale vitesse de propagation des différents rayons lumineux, suivant la longueur de l'onde. En admettant que la distance des molécules d'éther soit négligeable par rapport à la longueur d'onde, les équations différentielles du mouvement vibratoire de l'éther montrent qu'il n'y a pas de dispersion; c'est le cas du vide. Dans les corps transparents, Cauchy explique la dispersion en supposant que cette distance et même son carré ne sont pas négligeables. Briot reprend cette question et développe une idée plus générale, en faisant intervenir l'action des molécules pondérables sur les molécules d'éther. Cette influence peut se manifester, soit par leur action directe sur l'éther pendant sa vibration, soit indirectement par des inégalités périodiques dans sa distribution. La première hypothèse doit être écartée comme conduisant à une formule incompatible avec l'expérience; mais la seconde offre un grand intérêt, tant au point de vue physique qu'au point de vue mathématique. Le mouvement vibratoire dépend alors d'équations

différentielles linéaires à coefficients périodiques, et, en s'appuyant sur les travaux de Cauchy relatifs à ce genre d'équations, Briot parvient à exprimer l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde par une formule analogue à celle de l'illustre géomètre. Les inégalités périodiques de l'éther ont encore servi à Briot pour l'explication de la polarisation circulaire et de la polarisation elliptique.

Dans les dernières années de sa vie, notre Collègue est revenu à plusieurs reprises sur la théorie mécanique de la chaleur. Ses leçons ont été réunies dans un Volume où l'on retrouve la clarté et la précision qui distinguaient à un si haut degré son enseignement. Le même Ouvrage contient aussi l'exposition, sous une forme extrêmement simple, des principes fondamentaux de l'Électro-dynamique et de l'Électro-magnétisme.

Nous venons d'évoquer le souvenir de nos prédécesseurs, nous avons voulu rendre hommage à leur mémoire, rappeler leurs travaux, leurs découvertes, les grands exemples qu'ils nous ont laissés. Notre mission est de continuer leur œuvre et d'ajouter à leur glorieux héritage; ce devoir nous est rendu plus sacré par le don magnifique que nous tenons du pays, par sa généreuse assistance pour notre enseignement et nos travaux. Tous, maîtres de conférences et professeurs, nous y consacrerons notre dévouement, nos efforts: nous avons la confiance que, pour l'honneur de la Science et de la France, nous saurons fidèlement le remplir.

Note de M. Wolf, Membre de l'Institut, professeur a la Faculté des Sciences, sur le Traité élémentaire d'Astronomie physique, par J.-B. Biot.

La première édition de ce célèbre Ouvrage, auquel son auteur devait donner plus tard un développement important, parut en 1805 en un seul Volume in-8° de 582 pages. Biot, déjà Membre de l'Institut et Professeur de Physique générale et de Mathématiques au Collège de France, fut chargé de le composer pour servir à l'enseignement élémentaire de l'Astronomie, qui venait d'être introduit dans les lycées nationaux. Il n'y faut donc pas chercher les développements mathématiques qui apparaîtront dans les éditions ultérieures. « Je prends, dit Biot, un élève qui n'a absolument aucune

connaissance d'Astronomie, ni même de Cosmographie. Je lui suppose, sur les mouvements célestes et sur la figure de la Terre, tous les préjugés qui naissent du témoignage habituel de nos sens, et je le conduis, peu à peu, jusqu'à trouver de lui-même, par le raisonnement, le véritable mécanisme du système du monde... Pour arriver sûrement à ce résultat et le fixer dans l'esprit des élèves d'une manière inébranlable, il ne suffisait pas de leur indiquer les phénomènes, ou de les rapporter succinctement comme on aurait pu le faire dans un simple discours sur l'Astronomie. Il fallait les leur montrer d'une manière réelle et pour ainsi dire palpable, en leur donnant la connaissance nette et positive des moyens par lesquels on les a reconnus. J'ai donc rapporté très exactement les méthodes d'observations qui ont servi à découvrir les phénomènes; et c'est toujours sur des observations réellement faites que j'ai établi mes résultats... Le système du monde, envisagé de cette manière, devient un grand problème de Physique, dont il faut chercher la solution dans les phénomènes observés. C'est pour cela que j'ai intitulé cet Ouvrage : *Traité élémentaire d'Astronomie physique.* »

Il ne faut donc pas chercher dans l'Ouvrage de Biot l'équivalent de ce que les Anglais appelleraient *A Treatise of physical Astronomy.* La cause physique des mouvements des astres, l'attraction newtonienne, est à peine indiquée dans le *Traité d'Astronomie physique,* qui ne s'élève pas au delà des lois empiriques des phénomènes. Il n'y faudrait pas non plus rechercher rien qui ait rapport à cette nouvelle branche de l'Astronomie, qui a pris, depuis quelques années, un si rapide développement et fait éclore, sur la constitution générale de l'Univers et sur l'évolution des mondes, des notions complètement inconnues au commencement de notre siècle. L'Astronomie physique de Biot n'a aucun rapport avec la Physique céleste. A peine les phénomènes que nous présente la surface du Soleil sont-ils cités, et uniquement pour en déduire les éléments de la rotation de cet astre. L'Astronomie sidérale n'existait pas encore. M. Herschel n'avait pas démontré l'existence du mouvement orbital des étoiles doubles; aucune parallaxe d'étoile n'avait pu être mesurée. Si, depuis Bradley, les astronomes soupçonnaient la possibilité du mouvement de translation du Soleil et de son cortège de planètes, personne encore n'avait pu en démontrer l'exis-

tence; si bien que, dans la deuxième édition de son Ouvrage, en 1811, Biot, après une longue discussion des mouvements propres de huit belles étoiles du ciel, concluait que « les mouvements observés jusqu'à présent dans les étoiles ne sont assujettis à aucune loi, et qu'on voudrait en vain les accorder en les supposant dirigés vers un même pôle », qui serait le point de fuite du Soleil. On n'oubliera pas qu'à la même époque c'était aussi là l'opinion de Bessel.

En 1857, au cinquième Volume de la troisième édition de son Ouvrage, Biot est moins affirmatif sans doute; pourtant la concordance étonnante des résultats obtenus par W. Herschel, par Argelander, Galloway, Maedler, W. Struve, n'a pu encore forcer sa conviction : « Le temps n'est pas encore venu de pouvoir décider la question, quoiqu'il soit louable de s'y efforcer. »

C'est donc à l'étude du système planétaire qu'est limité le plan de l'Ouvrage de Biot, que l'on doit considérer avec lui comme une introduction élémentaire et purement expérimentale à l'étude de la Mécanique céleste.

Tel est encore aujourd'hui le programme de l'un des cours d'Astronomie de la Faculté des Sciences, qui a porté longtemps, depuis que Biot le professa pour la première fois en 1809, le titre de *Cours d'Astronomie physique*. Son véritable nom serait celui de *Cours d'Astronomie d'observation*. Depuis qu'il est complété par le Cours de Mécanique céleste et par le Cours annexe de Physique céleste, qui, fondé il y a déjà treize années, attend encore sa transformation en chaire magistrale, l'enseignement de l'Astronomie à la Faculté embrasse toutes les parties de la plus belle et de la plus parfaite des Sciences.

La première ébauche de l'*Astronomie* de Biot reçut en 1810 et 1811 un complément important, bien que par sa nature il s'éloigne du programme d'enseignement des Facultés, et même du plan général de l'Ouvrage. La moitié du troisième Volume de la deuxième édition est consacrée à l'exposition des calculs de l'Astronomie nautique, rédigée par le capitaine de vaisseau de Rossel. Cette annexe a disparu dans la troisième édition.

Bien plus important et plus en harmonie avec le but que Biot s'était proposé est le développement donné dans ces deux éditions à la description des instruments. Biot ne s'était jamais occupé de

la pratique des observations astronomiques, lorsqu'il écrivit son Ouvrage en 1805. Aussi les procédés d'observation et les instruments y avaient-ils été un peu négligés. Mais, ayant eu l'occasion de pratiquer les opérations les plus délicates de l'Astronomie dans la mission qui lui fut confiée de terminer, conjointement avec Arago, la mesure de la méridienne en Espagne, il en comprit mieux l'importance et donna plus de développement à cette partie de son Ouvrage. Enfin, dans la dernière édition, on peut dire que l'étude des instruments devient la partie prépondérante et, pour ainsi dire, la caractéristique de son Œuvre. C'est là, en effet, qu'il consacre près de deux Volumes (sur cinq) à l'exposition de sa théorie célèbre des instruments d'Optique. Le physicien l'a emporté sur l'astronome.

Le problème général de la réfraction d'un faisceau lumineux à travers une série de surfaces sphériques centrées sur un même axe rectiligne avait déjà été abordé par plusieurs géomètres et physiciens illustres. John Herschel, en 1828, dans son *Traité de la lumière,* en avait donné une solution facilement applicable à la construction des objectifs, parce qu'elle permet le calcul des aberrations pour les rayons qui traversent les lentilles même assez loin du centre, mais qui conduit à des formules d'une complication extrême quand on veut tenir compte des épaisseurs. C'est ce problème des lentilles épaisses que Gauss, en Allemagne, Biot, en France, résolurent simultanément. Le Mémoire de Gauss fut présenté à la Société royale de Göttingue en décembre 1840; l'Ouvrage de Biot parut en février 1841. Les méthodes des deux géomètres, fondées toutes deux sur l'application de la Géométrie à trois dimensions, les ont conduits à deux manières très différentes de considérer les objectifs. Pour Gauss, un système de surfaces réfringentes centrées, tant qu'il s'agit de rayons ne faisant avec l'axe commun que de très petits angles et rencontrant toutes les surfaces à des distances de leur centre de figure pareillement restreintes, est caractérisé par la position des foyers principaux et des deux points principaux. Les caractéristiques de Biot sont la position du point oculaire, le grossissement angulaire et la distance focale principale du système.

Les unes et les autres se déterminent aisément, et le calcul d'un objectif peut se faire aussi bien par une méthode que par l'autre;

et cependant les deux théories, après des péripéties à peu près semblables, ont eu des fortunes très différentes. L'exposition de Gauss rebuta d'abord les physiciens par sa concision qui confinait presque à l'obscurité; elle resta longtemps presque inconnue, malgré la traduction littérale qu'en avait donnée Bravais; il fallut, pour qu'elle entrât dans le programme d'études des physiciens, les travaux d'éclaircissement de Verdet, de M. Gavarret et de M. Ad. Martin; et surtout elle eut besoin d'être ramenée par ces deux derniers savants à une forme purement géométrique. Le même travail, très malheureusement, n'a jamais été fait pour la théorie de Biot qui est restée, par suite, peu accessible aux opticiens, auxquels cependant elle pouvait fournir des documents précieux, particulièrement pour la construction des oculaires. C'est dans ce grand travail que Biot a mis, pour la première fois, en pleine évidence la nécessité du contact central des verres qui composent un objectif, si l'on veut assurer la stabilité de ses qualités d'aplanétisme et d'achromatisme.

La publication de cet important Mémoire, les détails que Biot a donnés dans la troisième édition de son *Traité d'Astronomie*, plus complètement que partout ailleurs, sur ses nombreuses expériences de mesure du pendule et les résultats qui s'en déduisent, font de cette édition un Ouvrage du plus haut intérêt pour le physicien et le géodésien. Les développements donnés à la partie purement astronomique, les soins apportés à la publication par les éminents collaborateurs de Biot, Yvon Villarceau, Delaunay et M. Lefort, achèvent de faire de l'*Astronomie physique* un Livre qui sera toujours consulté avec profit par les professeurs et les astronomes.

29 juillet 1889.

C. WOLF.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

## J. BERTRAND. — Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité, professées au Collège de France.

1. Il y a, dans certaines spéculations de la Géométrie et de l'Analyse, un caractère esthétique d'une nature particulière, plus aisé à sentir qu'à définir, et que le mot d'*élégance* peut seul exprimer. Si l'on cherchait des modèles de cette élégance, on les trouverait, ce me semble, parmi les travaux qu'a enfantés l'étude de l'attraction. Que pourrait-on comparer, par exemple, à cet admirable enchaînement de théorèmes généraux sur les forces qui agissent en raison inverse du carré des distances, où Gauss semble s'être surpassé lui-même en clarté et en sobriété, ou bien encore à ce chef-d'œuvre de la Géométrie moderne, au Mémoire de Chasles sur l'attraction des ellipsoïdes?

Esquisser quelques-unes des plus séduisantes théories auxquelles l'étude de l'attraction a donné lieu, n'est-ce pas un objet bien fait pour tenter un esprit capable à la fois de présider aux tournois géométriques d'une Académie des Sciences et de briller au sein de la plus délicate Compagnie qui soit au monde?

C'est en artiste que M. Bertrand vient d'exposer la théorie mathématique de l'Électricité. Il en a tracé les grandes lignes d'un crayon très fin, évitant tous les détails, intéressants seulement parce qu'ils sont ardus, qui auraient alourdi les contours et diminué la grâce du tableau.

Toutes les fois que faire se pouvait, il a demandé à l'analyse des anciens de lui fournir ses démonstrations.

L'intervention de nos méthodes algébriques dans une théorie accessible aux voies suivies par les anciens choquerait un géomètre aussi épris du beau que l'est M. Bertrand. Aussi l'évite-t-il avec un soin jaloux toutes les fois qu'il le peut faire, dans l'étude de l'attraction des sphères, par exemple, qu'il traite suivant la voie tracée par Sir W. Thomson, cette « application élégante de la méthode des anciens, qui serait digne d'être rencontrée parmi les pages les plus admirées de Newton et de Huygens ».

Lorsque l'emploi de l'algèbre des modernes ne peut être évité,

du moins faut-il effacer habilement le trop choquant contraste avec les parties traitées par la méthode des anciens. M. Bertrand emploie, à ménager les transitions de ce genre, un art infini. Si quelqu'une de ces discussions, longues et pénibles, qui passionnent aujourd'hui les géomètres soucieux de l'inébranlable rigueur de leur science, s'offre parmi les matériaux de l'œuvre à élever, M. Bertrand resserre et dissimule au possible la place qu'une semblable discussion doit occuper. Parfois même il la rejette, aimant mieux compromettre la solidité de l'édifice que d'en altérer l'élégance.

Ainsi l'extension aux points intérieurs aux masses agissantes des propriétés de la fonction potentielle est une question susceptible entre toutes de patientes et minutieuses démonstrations, dont l'étendue, si l'on voulait les exposer par le détail, nuirait aux sobres proportions du reste de l'Ouvrage; deux pages suffisent à faire pressentir la difficulté et le principe de la solution. Quant au Principe de Dirichlet, ne vaut-il pas mieux croire à l'entière rigueur de la démonstration que Gauss en a donnée que d'ébranler cette clef de voûte de l'édifice?

Point donc, dans le Livre de M. Bertrand, de ces pointilleuses discussions, de ces lourdes formules chargées d'intégrales triples, qui hérissent les Traités modernes sur le potentiel : ceux de Riemann, de Lejeune-Dirichlet, de Beer, de Neumann, de Betti, d'Axel Harnack. « Le lecteur pourra remarquer, dès le premier coup d'œil jeté sur ces pages, nous dit l'auteur, qu'en laissant les recherches expérimentales en dehors de mes Leçons, j'ai écarté en même temps toute question de pure Analyse. Sans sacrifier la rigueur au désir de simplifier ou d'abréger, j'ai choisi toujours la voie la plus directe; je crois l'avoir souvent simplifiée; il m'a suffi quelquefois de supprimer les formules inutiles.

» Lorsque, par exemple, une intégrale doit rester inconnue, non par la difficulté du calcul, mais à cause d'un facteur qui s'y trouve, actuellement inaccessible à nos recherches, pourquoi prendre la peine d'en former et d'en écrire l'expression? Le lecteur ignorant la théorie et la définition des intégrales multiples est, dans ce cas, aussi bien préparé que le plus savant géomètre; il a peine à le croire, quand l'intégrale apparaît au milieu de formules dont il s'effraye de ne pas comprendre l'inévitable stérilité. »

2. L'esprit qui aime et recherche l'élégance géométrique est à l'aise en certaines régions mathématiques; la parfaite clarté de l'objet traité lui permet de jouir tout à loisir de la forme sous laquelle il est traité. Aussi la Géométrie pure, certaines branches de l'Analyse, plus achevées que les autres, seront ses études de prédilection. Ce sont, dans le vaste champ de nos connaissances logiques, des places parfaitement nettoyées et aplanies, des chantiers pourvus de matériaux soigneusement triés et examinés : tout est préparé à souhait pour la construction d'un bel édifice.

Tout autrement en est-il en Physique. Qu'est-ce que le sol sur lequel il faut bâtir? Un terrain hérissé d'aspérités, encombré de notions confuses qui le couvrent comme des broussailles. Quelle en est la solidité? de quel genre de certitude la Physique est-elle susceptible? C'est une bien grave question, difficile peut-être à séparer du problème même de la connaissance du monde extérieur, problème que les philosophes sont encore à résoudre depuis qu'il existe des philosophes. Quels sont les matériaux à employer? Un amas ou plutôt un chaos, où l'on trouve pêle-mêle les faits d'expérience avec les hypothèses, les résultats des expériences bien faites avec les résultats des expériences qui ont été mal faites ou même qui n'ont pas été faites du tout, les hypothèses précises avec les hypothèses confuses ou même contradictoires.

Il est difficile que cet état de choses ne frappe pas un esprit qui réfléchit quelque peu. Mais l'impression que cette confusion produira sur lui, les résolutions qu'elle lui fera prendre différeront profondément selon ses goûts et ses habitudes.

Si quelqu'un est plus hanté par les préoccupations logiques que par les aspirations esthétiques, il entreprendra de sonder, aussi profondément du moins que le lui permettra la pénétration de son esprit, une région, quelque limitée qu'elle soit, du champ de la Physique. Il cherchera, dans la limite de ses forces, à trier, à classer quelques-uns des matériaux accumulés devant lui, séparant les bons d'avec les médiocres ou les mauvais, les faits d'expérience d'avec les hypothèses. Dans un pareil travail, plus semblable à un manouvrier qu'à un architecte, il éprouvera peu d'émotions esthétiques; il aura peu le loisir d'admirer. Les fondations d'un monument, qui en font la solidité, n'en font pas la beauté.

Un esprit désireux du beau se résout difficilement à ce travail

de déblaiement. S'il trouve quelque place plus nette qu'une autre, il a hâte d'y construire un édifice capable de satisfaire ses inspirations. Peu lui importe si le sol est mouvant, si certains matériaux n'ont point de solidité; il sait que le palais qu'il a élevé est destiné à crouler, mais ses formes plaisent et cela lui suffit.

Le premier des deux physiciens sera un critique, le second, un dilettante; soucieux de la forme de la théorie, il sera sceptique sur le fond.

A quel point M. Bertrand porte le culte de la forme dans l'exposé de la théorie de l'Électricité, nous avons essayé de le dire; son scepticisme sur les principes de la théorie, sur les résultats qu'elle croit avoir atteints, sur l'utilité qu'elle prétend avoir, paraît à chaque page, à propos de chaque question.

S'il est une étude utile et profitable au physicien, c'est assurément la lecture des critiques que M. Bertrand adresse à presque toutes les parties de la théorie de l'Électricité; lecture bien attrayante en même temps, car la raison du géomètre a pris souvent pour allié l'esprit de l'écrivain.

Feuilletons le Livre de M. Bertrand, et citons quelques-unes de ces critiques au fur et à mesure qu'elles se présentent.

Coulomb, Poisson ensuite, ont appuyé l'*Électrostatique* sur deux principes : l'électricité se porte à la surface des corps; la couche électrique distribuée sur la surface d'un conducteur en équilibre doit exercer une action nulle en tout point intérieur. Que valent ces deux principes?

« Les fluides de même nom se repoussant, on conçoit, dit Coulomb, que le fluide libre sera transporté à la surface du corps, où il sera retenu par l'air environnant.

» Cette raison sommaire ne peut suffire. Les molécules d'un gaz se repoussent; on ne les voit pas pour cela s'accumuler à la surface du vase qui les contient.

» Le transport de l'électricité à la surface est, en réalité, dans la théorie de Poisson, accepté comme une vérité d'expérience.

» La condition d'équilibre, proposée également par Coulomb et admise sans discussion comme nécessaire, ne paraît pas non plus, *a priori*, d'une suffisante évidence. L'électricité libre, d'après ce principe qui sert de base à toutes les études mathéma-

tiques sur l'électricité statique, doit exercer sur un point quelconque des masses conductrices des actions dont la résultante se réduise à o.

» En effet, dit Coulomb, dont la conclusion a été acceptée, si les actions en un point d'une masse métallique avaient une résultante différente de o, les molécules de fluides contraires, qui, par hypothèse, se trouvent accumulées et réunies en chaque point de la masse, seraient sollicitées par des forces égales et contraires qui provoqueraient la séparation et détruiraient l'équilibre.

» L'assertion est loin d'être évidente. Les fluides de nom contraire s'attirent. A distance infiniment petite, l'attraction est infiniment grande. Pourquoi cette attraction infinie sera-t-elle vaincue par la plus petite force? Il faut ajouter, pour mettre en présence tous les éléments de la question, que la masse attirante, pour chaque portion d'électricité mise en liberté, est infiniment petite, mais l'évidence est ici trop aisément invoquée (1). »

Les physiciens attachent une grande importance aux travaux de Maxwell sur les *milieux diélectriques* et donnent souvent, dans leurs Cours ou leurs Ouvrages, une large place à l'exposé de ces travaux. M. Bertrand ne partage pas l'enthousiasme, bien prompt peut-être, du grand nombre :

« Les lois de la condensation dans la bouteille de Leyde, dit-il (2), ne sont pas aussi simples que l'indiquent les formules précédentes; dans la démonstration de ces formules, aucun rôle n'a été supposé à la substance isolante qui sépare les deux armatures; elle a été considérée comme empêchant la réunion des électricités accumulées sur les faces, sans exercer sur elles aucune influence. Il n'en est pas ainsi, et la charge dépend de la nature de la substance isolante, nommée *diélectrique,* qui forme les parois de la bouteille. La théorie de ces actions incontestables n'est pas faite encore; c'est le seul jugement qu'on puisse porter sur les travaux que cette question a fait naître. Aucune hypothèse ne paraît s'imposer par des raisons décisives; aucun calcul, même dans les cas les plus simples, n'a pu jusqu'ici contrôler les hypothèses par l'é-

---

(1) Page 69.
(2) Page 96.

preuve de leurs conséquences. Mosotti suppose que dans le milieu diélectrique se rencontrent des particules électrisables et que l'électricité enfermée dans chacune de ces petites masses, que l'on suppose sphériques, pour plus de simplicité sans doute, se trouve dans chacune d'elles séparée par influence et joue son rôle dans les conditions de l'équilibre. Malgré la netteté et la simplicité, je ne puis me résoudre à dire la vraisemblance, de cette hypothèse, il n'a pas été possible d'en déduire des conséquences sur lesquelles l'expérience puisse donner une réponse. La théorie des milieux diélectriques et de leur mode d'influence reste un Chapitre très imparfait dans l'étude expérimentale de l'électricité, sur lequel il n'y a rien à dire dans l'exposition des théories mathématiques acquises à la Science. »

L'*aimantation par influence* a été étudiée par Poisson. M. Bertrand nous signale quelques-unes des graves difficultés de la théorie que ce géomètre a proposée. Cette théorie exige que l'on connaisse la forme des molécules :

« Poisson, après avoir rencontré cette difficulté, croit pouvoir l'écarter en supposant les molécules sphériques. Les actions sur les points extérieurs et sur les points intérieurs sont alors liées les unes aux autres par des relations connues et indépendantes de la loi des densités à la surface de la sphère. On fait remarquer, pour justifier cette hypothèse, qu'une sphère de fer doux se comporte de la même manière, quelle que soit la position qu'on lui donne autour de son centre. Si les molécules n'étaient pas sphériques, leur orientation par rapport aux directions des influences magnétiques serait changée, et les phénomènes dépendraient de la manière dont la sphère est placée.

» On peut adresser à ce raisonnement deux objections très graves :

» Quelle que soit la forme des molécules magnétiques, le corps n'étant pas cristallisé, il faut les supposer orientées par le hasard et d'une façon irrégulière. Les effets observés dépendront d'une orientation moyenne et il n'est nullement étonnant qu'en faisant tourner la sphère autour de son centre la compensation due au hasard se retrouve toujours à peu près la même. Il n'est pas supposable, en second lieu, que, dans un corps solide, les molécules

tournent en même temps que le corps, indépendamment des actions qui s'exercent sur elles. Les molécules vibrent et tournent probablement; les physiciens l'admettent sans hésiter quand ils dissertent sur les phénomènes calorifiques. Les distances d'une molécule à celles qui l'entourent sont supposées très grandes par rapport à ses dimensions. Poisson trouve cette hypothèse commode, indispensable même pour traduire en équations les conditions qu'il veut exprimer. Il est difficile d'admettre que, sphérique ou non, cette molécule, isolée à une distance de toute autre immense et comme infinie par rapport à ses dimensions, ne puisse pas tourner autour de son centre de gravité sous l'influence des forces magnétiques qui s'exercent sur elle, et cette rotation peut, quelle que soit l'orientation de la masse, maintenir l'état magnétique invariable par rapport aux forces dont on étudie l'action (1). »

D'autres après Poisson, et jusqu'à ces derniers temps, ont cherché à pénétrer l'étude de l'aimantation par influence; peut-être l'ont-ils rendue sauve des critiques que nous venons de citer; mais qu'importe que leur théorie soit plus logique dans ses principes, si elle est inféconde dans ses résultats? « La recherche de l'aimantation dans des cas particuliers et la détermination du champ magnétique ne paraissent pas un problème accessible à l'analyse. On peut, en développant des hypothèses plus ou moins plausibles, arriver à le mettre en équation, mais ces équations restent stériles. Je n'ignore pas les travaux de Poisson et leurs conséquences pratiques; mais, si les problèmes sont résolus de manière à associer une science élevée aux tâtonnements des constructeurs et aux ingénieuses études des marins, aucun des problèmes mathématiques qu'il faudrait résoudre n'a pu recevoir de solution (2). »

Ne serait-ce pas à ce problème de l'aimantation par influence et à certaines tentatives faites pour le résoudre que M. Bertrand songeait, lorsqu'il parlait, dès sa Préface, de ces intégrales triples qu'il est bien inutile de former et d'écrire, puisqu'un facteur dont l'expérience ne nous a guère encore fait connaître la forme

---

(1) Page 106.
(2) Page 98.

les laisse forcément inconnues, et qu'elles n'ont d'autre effet, en apparaissant au milieu des formules, que d'effrayer le lecteur par leur inévitable stérilité?

« Sans s'arrêter à la recherche, réellement inaccessible au calcul, de l'état magnétique d'un corps soumis à des influences données (¹) », M. Bertrand passe à l'étude du *magnétisme terrestre*.

La Terre exerce un couple sur chaque élément d'un aimant. Tous ces couples élémentaires doivent se composer en un couple unique. Assertion bien simple, bien évidente, pensent les physiciens qui n'ont point songé aux difficultés que va leur signaler M. Bertrand : « Tous les couples, quel que soit leur nombre, quand ils sont *appliqués à un corps solide,* se composent en un couple résultant qui peut les remplacer. Ceux dont nous parlons sont-ils appliqués à un corps solide? La question peut sembler singulière quand il s'agit d'une masse de fer ou d'acier. On doit se demander, cependant, si les molécules qui vibrent et tournent sur elles-mêmes d'après les théories acceptées sont réellement solidaires, comme les parties des corps solides idéaux auxquels s'appliquent les théorèmes de Statique. Les molécules ne sont pas indépendantes, cela est certain; les corps solides, sans cela, n'existeraient pas. Le lien qui les unit permet-il de considérer les forces appliquées à l'une d'elles comme appliquées à un corps rigide dont elle ferait partie? L'expérience confirme les résultats obtenus en l'admettant (²) ».

D'après M. Bertrand, rien n'est moins sûr que les fondements de la *théorie de la propagation de l'électricité :*

« La prétention de donner une *théorie mathématique de la pile* est inacceptable. Ohm, certainement, a fait faire un pas immense, et c'est avec justice que son nom est compté parmi les plus grands; mais l'application du calcul à l'étude de la propagation de l'électricité est une témérité : l'impossibilité de faire mieux ne la justifie pas. L'assimilation à la théorie de la chaleur, qui est au

(¹) Page 108.
(²) Page 108.

fond toute la doctrine de Ohm, n'est nullement satisfaisante. Pourquoi, si les principes sont les mêmes, les faits sont-ils si différents? De quel droit, de plus, applique-t-on au potentiel dans le cas du courant les résultats démontrés dans le cas de l'équilibre? Les lois des actions mutuelles ne sont plus les mêmes; est-il permis de faire comme si on l'ignorait?

» Je n'ai rien dit du régime variable des courants. Leur étude est indispensable, je le sais, à la télégraphie sous-marine; cela n'autorise pas à adopter des théories mathématiques dont la base n'a rien de solide (¹). »

Ailleurs, M. Bertrand écrit : « Les équations de la propagation de l'électricité dans un conducteur à trois dimensions ont été formées; elles reposent sur des principes douteux, et aucune de leurs conséquences jusqu'ici n'intéresse la Physique. Sans ignorer l'importance de la question, j'ai dû la passer sous silence (²) ».

Ampère a proposé de rendre compte des actions électrodynamiques par une *loi d'attraction entre les particules électriques, qui dépende de leur distance et de leurs vitesses relatives*. Gauss a proposé une forme pour cette loi; M. W. Weber en a proposé une autre.

Les physiciens qui se sont occupés de cette difficile question (ils sont nombreux et se nomment Riemann, Clausius, Helmholtz, Kirchhoff, Carl Neumann, Maxwell) ont regardé ces deux lois comme différentes; tous, ils ont rejeté celle de Gauss comme introduisant des forces qui ne dépendent pas d'un potentiel; certains d'entre eux ont adopté celle de Weber. Lisons le Livre de M. Bertrand, et, en quelques pages, nous apprendrons que les plus habiles analystes peuvent commettre sur ce sujet les plus graves erreurs.

« Gauss, dont les conjectures sur ce sujet difficile n'ont été connues qu'après sa mort, avait essayé plusieurs hypothèses. Il faisait dépendre l'action exercée par deux molécules suivant la droite qui les joint de la vitesse relative des masses en mouvement.

---

(¹) Page 114.
(²) Préface, p. VI.

L'hypothèse de Gauss a passé presque inaperçue; les physiciens, au contraire, ont accueilli avec faveur une loi fort différente en apparence, proposée par Weber, et qui n'est cependant, quoiqu'on ait souvent répété le contraire, qu'une transformation de celle de Gauss.

» Gauss suppose, dans un élément de circuit voltaïque, deux masses d'électricité contraires $+e$ et $-e$, se mouvant avec des vitesses égales dans des directions opposées. L'action de deux éléments de courant se trouve ainsi la résultante de quatre actions distinctes exercées par les deux masses qui parcourent le premier élément sur les deux masses du second. Chacune des quatre actions qu'il faut ajouter dépend à la fois, d'après l'hypothèse de Gauss, de la distance et de la vitesse.

» Une telle hypothèse est difficile à accepter et, malgré l'autorité imposante de Gauss, qui d'ailleurs ne l'a jamais publiée, on hésite à s'intéresser aux conséquences. Weber l'a transformée de manière à en rendre l'adoption plus difficile encore.

» Chaque élément de courant, suivant Weber, qui suit en cela l'idée proposée par Gauss, serait parcouru par deux masses électriques de signes contraires, se mouvant dans les directions opposées. Leur action sur les molécules qui parcourent un autre élément dépendrait non seulement de la distance et des vitesses, mais aussi de la dérivée de la vitesse. Si $r$ désigne la distance variable avec le temps, la force qui s'exerce entre deux masses $e$ et $e'$, et suivant la ligne qui les joint, est une fonction de $r$, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$.

» La présence dans la formule de Weber de la seconde dérivée $\frac{d^2r}{dt^2}$, que l'on ne voit pas figurer dans celle de Gauss, a suffi à faire croire à une différence complète entre les deux hypothèses; c'est une erreur : la formule de Weber se déduit de celle de Gauss.

» Supposons, en effet, que deux molécules $e$ et $e'$ suivent chacune, avec des vitesses $v$ et $v'$, des lignes droites de directions quelconques. Gauss propose, pour représenter leur action mutuelle dirigée suivant la droite qui les joint, la formule

$$T = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 + K\left[u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

$u$ désignant la vitesse relative des deux molécules et $\frac{dr}{dt}$ la composante de cette vitesse dans le sens de la distance $r$. Les deux masses ayant des vitesses données et constantes, leur distance $r$ ne croît pas pour cela proportionnellement au temps; la dérivée $\frac{d^2 r}{dt^2}$ n'est pas nulle, elle peut s'exprimer en fonction de $u$ et de $\frac{dr}{dt}$. Pour passer de l'hypothèse de Gauss à celle de Weber, il suffit de remplacer $u$ par sa valeur en fonction de $r$, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d^2 r}{dt^2}$.

» ... Les deux formules sont donc identiques, à la condition de regarder dans chacun des éléments de courant les vitesses des molécules électriques comme constantes. Les deux formules, sous cette condition, ne peuvent manquer de donner les mêmes conséquences ([1]).

» Plusieurs auteurs, admettant comme évidente la différence des deux lois, ont donné l'avantage à celle de Weber, par la raison que les forces exprimées par elle ont un potentiel. Les forces proposées par Gauss n'en ont pas.

» ... En admettant, ce qui semble bien loin d'être justifié, qu'il y ait lieu de choisir entre les deux formules, l'existence d'un potentiel semble une circonstance fort indifférente. La raison pour laquelle, en effet, un potentiel est présenté comme une condition nécessaire a pour origine l'impossibilité acceptée du mouvement perpétuel, indéfiniment accéléré en l'absence de résistances passives. L'accroissement de force vive étant égal à la variation du potentiel, si le système revient à sa position primitive, il y reviendra avec la même force vive; mais, dans le cas actuel, le système des conducteurs en mouvement peut revenir à la même position géométrique sans que la dérivée $\frac{dr}{dt}$, qui figure dans le potentiel, reprenne la même valeur. Pourquoi, d'ailleurs, repousser l'idée du mouvement perpétuel quand il s'agit de l'action mutuelle des courants? Un travail continuel, nous l'avons souvent répété, est nécessaire pour entretenir un courant; pourquoi

([1]) Page 183.

ce travail n'engendrerait-il pas une force vive toujours croissante ([1])? »

La théorie qui cherche à déduire du principe de la conservation de l'énergie les lois de l'*induction électrodynamique* est, de la part de M. Bertrand, l'objet de vives et nombreuses critiques; citons en particulier celle-ci :

« ... L'éther, au sein duquel les phénomènes s'accomplissent, y joue certainement le rôle principal. Il est capable de travail et d'énergie potentielle.

» Est-il permis d'accepter avec confiance une équation dans laquelle cet élément du problème est passé sous silence? Un moulin à vent dont on voit tourner les ailes sans dépense de travail ne contredit en rien les principes : c'est l'air qui le pousse. On s'exposerait à de graves mécomptes en négligeant le rôle de l'atmosphère. Pourquoi l'éther, dont le mode d'action est complètement inconnu, ne troublerait-il pas, dans un sens ou dans l'autre, par les variations de sa force vive, le résultat de nos conjectures?

» La théorie suivante n'aurait, *a priori*, rien de contraire aux principes.

» Un courant existe dans un fil. Les fluides électriques y sont animés de mouvements entièrement inconnus; mais le phénomène est plus complexe, il s'étend dans l'espace qui environne le fil; un aimant qu'on y place, un autre courant qu'on y fait naître, sont immédiatement attirés ou repoussés. Le milieu dans lequel ils sont plongés n'est donc pas à l'état normal; il n'est pas admissible que le courant agisse à distance quand on lui présente une occasion de travail, et ne produise au même lieu, quand cette occasion manque, aucune influence mécanique. Le courant qui traverse un fil produit donc et maintient dans l'espace qui l'environne des agitations inconnues, mais continuelles. Lorsque ces agitations produisent des effets observables, le courant n'y est plus pour rien : il a joué son rôle en les faisant naître; les conséquences seront ou non perceptibles à nos yeux, il n'en doit résulter pour lui aucun trouble.

---

([1]) Page 186.

» La fatigue d'un chanteur est-elle augmentée parce que de nombreux téléphones recueillent les sons produits par sa voix?

» Le projectile lancé par une arme à feu emporte, sous forme de force vive, le travail produit par l'explosion. Le rôle de la poudre est terminé. Que l'on manque le but ou qu'on l'atteigne, les effets observés seront très différents; aucun phénomène analogue à l'induction ne troublera les servants de la pièce (1). »

M. Bertrand, on le voit, enveloppe dans un même scepticisme toutes les parties de la théorie de l'Électricité : lois de l'équilibre électrique sur les conducteurs et sur les diélectriques, théorie de l'aimantation par influence, principes du magnétisme terrestre, équations de la propagation de l'électricité dans l'état permanent et dans l'état variable, explication cinétique de l'Électrodynamique, introduction du principe de la conservation de l'énergie dans l'étude de l'induction, rien n'échappe à la finesse de ses critiques.

3. Les physiciens vont-ils, sans riposte, recevoir les attaques dirigées contre eux avec tant de vivacité par un adversaire aussi illustre qu'habile? Voudront-ils, au contraire, défendre leurs théories menacées?

Verra-t-on M. Helmholtz soutenir la possibilité d'édifier une théorie mathématique de la pile où s'accordent la Thermodynamique et l'expérience, discuter à nouveau les équations du mouvement variable de l'électricité, approfondir les relations de l'induction et du principe de la conservation de l'énergie?

M. W. Weber essayera-t-il de montrer que sa formule, d'accord avec celle de Gauss pour les courants uniformes, immobiles et constants, s'en sépare dans tous les autres cas? acceptera-t-il le reproche qui lui est fait de n'avoir rien déduit jusqu'ici de ses hypothèses que des formules antérieurement connues (2), sans revendiquer l'invention des lois de l'induction par variation d'intensité?

M. F.-E. Neumann admettra-t-il que les formules par lesquelles il représente la loi mathématique des phénomènes d'induction

---

(1) Page 212.
(2) Page 186.

sont malheureusement restées inutiles ([1]), sans rappeler que Kirchhoff en a tiré la première détermination de l'ohm et une méthode des plus élégantes pour mesurer le coefficient d'aimantation du fer doux?

M. Bertrand pense qu'aucun des problèmes de Mathématiques qui se posent dans la théorie de l'aimantation par influence n'a été résolu; M. F.-E. Neumann ne cherchera-t-il pas à lui faire rapporter cet arrêt en lui citant son calcul de la distribution magnétique sur un ellipsoïde dans tous les cas possibles?

Sir W. Thomson ne rappellera-t-il pas qu'il a su dégager la théorie de l'aimantation par influence donnée par Poisson de toute hypothèse sur les molécules magnétiques et grouper autour des principes ainsi renouvelés un large faisceau de conséquences?

L'affirmation qu'il est impossible de faire mieux que Ohm dans la théorie de la propagation de l'électricité ne va-t-elle pas étonner les élèves de Clausius et ceux de Kirchhoff? Ceux-ci n'hésiteront-ils pas à considérer comme des théories mathématiques dont la base n'a rien de solide ([2]) les travaux de leur maître sur la propagation de l'électricité dans les lignes souterraines et sous-marines?

Que penserait Maxwell, s'il vivait encore, en entendant le Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences annoncer que, de tous ses travaux sur les milieux diélectriques, il n'y a rien à dire dans un exposé des théories mathématiques acquises à la Science ([3])?

Et, si la démonstration du théorème de Green, de ce que les Allemands nomment le *principe de Lejeune-Dirichlet*, exige à peine quelques lignes ([4]), MM. Carl Neumann, Schwarz, Harnack ne vont-ils pas regretter les efforts immenses par lesquels ils ont cherché à en prouver la légitimité dans des cas étendus?

Il me semble voir ces physiciens se liguant pour écraser sous leurs réponses les affirmations de M. Bertrand; puis, au moment d'entrer en lutte, relisant ces Leçons professées au Collège de France; saisis peu à peu par leur charme; pénétrés sans s'en apercevoir par leur fine ironie; gagnés par leur scepticisme; dou-

---

([1]) Page 208.
([2]) Page 115.
([3]) Page 97.
([4]) Page 68.

tant enfin de leurs propres théories et avouant que, s'il n'est point en Physique de matières propres à rien édifier de solide, il est bon d'employer ce que cette Science nous fournit à quelque chef-d'œuvre d'élégance.

4. J'ai cherché à faire saisir l'esprit général dans lequel est écrit le Livre de M. Bertrand.

Il me resterait à indiquer brièvement ce que renferme chaque Chapitre; mais, au moment d'entreprendre cette partie de ma tâche, je m'arrête découragé. M. Bertrand a lui-même placé en tête de chacun de ses Chapitres un court résumé qui en indique l'esprit et la portée. Il me semble impossible de mieux faire; je ne pourrais que copier.

Que le lecteur me permette donc, au lieu de lui résumer le Livre de M. Bertrand, de lui en conseiller l'étude. Toutefois, parmi les idées nouvelles qu'il renferme, il en est une que je ne puis laisser passer sans la signaler d'une manière particulière; c'est la démonstration de la loi d'Ampère qui se trouve au Chapitre VII.

M. Bertrand s'est occupé, à plusieurs reprises, de la démonstration de la loi d'Ampère. On sait qu'il a réduit le nombre des cas d'équilibre invoqués par le fondateur de l'Électrodynamique; le célèbre principe des courants sinueux est inutile; le principe qui affirme qu'un courant fermé exerce une action normale sur un élément de courant renferme le précédent. Dans les Leçons qu'il vient de publier, M. Bertrand a amené à un tel degré de simplicité la démonstration de la loi d'Ampère fondée sur ceux des principes qui sont strictement nécessaires, que les physiciens seraient impardonnables de ne point faire usage de cette démonstration dans leur enseignement. Tout, d'ailleurs, sera profit pour eux, le Chapitre sur les lignes de force, la théorie de la machine de Gramme ou plutôt de l'anneau de Pacinotti, le Chapitre sur les unités électriques, il faut tout recommander.

Au moment de m'excuser auprès du lecteur de la longueur de ce compte rendu, je m'aperçois que les extraits du Livre de M. Bertrand en occupent la plus grande partie; mes excuses, je pense, deviennent inutiles; on le trouvera trop court.

P. Duhem.

F. GOMES TEIXEIRA, Directeur de l'Académie Polytechnique de Porto, etc. — CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL. *Calculo integral* (I^re Partie). 1 vol. in-8°, 312 p. Porto, typographia occidental, 1889.

Nous avons ici même (¹) rendu compte du premier Volume du *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Gomes Teixeira, lors de son apparition. Ce premier Volume était consacré au Calcul différentiel, et nous disions la bonne impression que nous avait causée sa lecture. A la fois élémentaire et rigoureux, il permettait à l'étudiant, sans entrer dans de trop grands développements, de s'initier aux plus récents progrès introduits dans les théories de l'Analyse. Le nouveau Volume, qui a trait aux intégrales indéfinies et définies et aux équations différentielles, confirme l'opinion que nous avait inspirée celui qui l'a précédé.

Les Chapitres I (intégrales indéfinies), II (intégrales définies), V (équations différentielles du premier ordre), VI (équations de degré supérieur), VII (équations aux dérivées partielles) contiennent l'exposé des principes; les Chapitres III et VIII concernent les applications géométriques; le Chapitre IV est consacré aux applications analytiques de la théorie des intégrales définies.

Sans entrer dans de plus grands détails au sujet de la contexture du Volume, nous signalerons différents points sur lesquels le mode d'exposition de l'auteur nous semble particulièrement original et où il apporte des perfectionnements aux procédés ordinairement en usage.

C'est ainsi qu'il convient de remarquer la méthode (p. 38-43) par laquelle M. Gomes Teixeira ramène l'intégration de $f(x, \sqrt{y})\,dx$, où $f$ désigne une fonction rationnelle et $y$ une fonction entière de degré $n$, aux intégrales hyperelliptiques normales de première, de deuxième et de troisième espèce. Le principe de la méthode consiste à réduire d'abord l'intégrale proposée à des intégrales qui sont toutes de la forme $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{y}}$, $\alpha$ pouvant être une racine de $y = 0$.

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII, p. 64; 1888.

En ce qui concerne l'intégrale $\int e^{mx} f(x)\,dx$, $f(x)$ étant une fonction rationnelle de $x$, l'auteur montre (p. 51-53) qu'on peut obtenir la partie de cette intégrale qui ne dépend pas du *logarithme intégral* sans passer par le calcul des racines de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$. C'est une remarque analogue à celle que l'on doit à M. Hermite pour le calcul de la partie algébrique des intégrales des fonctions rationnelles.

Notons aussi un remarquable théorème (p. 70), que M. Gomes Teixeira a publié dans ce *Bulletin* (¹) même, touchant les valeurs limites des intégrales définies. Ce théorème consiste en ce qu'on a

$$\int_a^X \varphi^2(x)\,dx \int_a^X \psi^2(x)\,dx > \left[\int_a^X \varphi(x)\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Dans la théorie de l'intégration par les séries (p. 85), l'auteur considère, au lieu de l'intégrale

$$\int_a^X \psi(x)\,dx,$$

l'intégrale

$$\int_a^X \varphi(x)\psi(x)\,dx,$$

où $\varphi(x)$ représente une fonction de $x$ qui peut avoir un nombre limité de discontinuités. Il obtient ainsi un théorème qui est applicable à un grand nombre de cas où les limites de l'intégrale sont infinies et où la fonction est discontinue.

De même, dans la théorie de la différentiation des fonctions définies par des intégrales (p. 89), l'auteur, par l'introduction d'une fonction $\varphi(x)$, parvient à donner plus d'extension aux théorèmes en permettant de les appliquer à certains cas où les limites de l'intégrale sont infinies et la fonction discontinue.

La même préoccupation de rigueur se retrouve au sujet du calcul de l'intégrale classique $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ que l'auteur obtient (p. 96) par la méthode connue basée sur une interversion d'inté-

---

(¹) 2ᵉ série, t. XII.

grations dans une certaine intégrale double; mais il apporte, dans le passage des limites finies aux limites infinies des soins particuliers qui ne se rencontrent pas habituellement dans les Ouvrages similaires.

On doit une mention toute spéciale à la façon dont M. Gomes Teixeira traite (p. 258-265) de la transformation des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, qui présente une notable simplification sur la laborieuse méthode d'Ampère qui se rapporte à ce sujet.

Ces quelques points particuliers ne sont pas les seuls au sujet desquels M. Gomes Teixeira ait introduit des perfectionnements de détail. On sent, à chaque page de son Livre, le souci de la rigueur telle que l'ont fait exiger les travaux des géomètres modernes, qui n'est pas toujours celle que l'on rencontre dans les Ouvrages élémentaires.

M. Gomes Teixeira est parvenu à ne s'en pas départir, tout en restant dans les limites du cadre d'un Ouvrage d'enseignement courant.

Son Livre sera certainement très profitable aux étudiants et, dans certaines de ses parties, également utile aux professeurs.

M. O.

---

MUELLER (RICHARD). — UEBER DIE CURVEN, DEREN BOGEN EINER POTENZ DER ABSCISSE PROPORTIONAL IST. Programm des Königlichen Realgymnasiums zu Berlin. 16 p. in-4°, Ostern 1889.

Dans le *Programm des Grossherzoglichen Realgymnasiums zu Darmstadt,* M. *C. Nies* a publié le Mémoire : « Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist » (25 pages in-4°). Ces recherches se bornent à quelques puissances très simples et ne sont pas toujours parvenues à des résultats qui soient justes. C'est pourquoi M. *R. Müller* a repris l'étude de ces courbes sous un point de vue plus général.

Soient

$x$ l'abscisse;
$s$ la longueur de l'arc;
$a$ une constante arbitraire;
$\mu$ un nombre rationnel.

Alors les courbes en question sont définies par l'équation $s = ax^{\mu}$, le système des coordonnées étant supposé rectangulaire.

En intégrant l'équation de condition, on reconnaît qu'il faut avoir $0 < \mu \leqq 1$; posant donc $\mu = 1 - \frac{\nu}{m}$, où $\nu$ et $m$ sont des nombres entiers et premiers entre eux, on gagne des résultats intéressants pour les cas $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$. Alors les coordonnées s'expriment en fonctions d'un paramètre variable : ces fonctions sont trigonométriques pour $\nu = 1$ et elliptiques pour $\nu = 2$ ou $\nu = 3$. Les courbes de la première classe sont transcendantes si $m$ est pair, algébriques si $m$ est impair. La cycloïde et l'astroïde se présentent pour $\mu = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{2}{3}$. L'étude des cas $\nu = 2$ et $\nu = 3$ a engagé l'auteur à développer quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. En se servant des notations de M. Weierstrass, il donne une réduction élégante pour l'intégrale $\int p^m(u)\,du$ et des recherches détaillées sur les cas spéciaux et importants de la fonction $p(u)$ quand on a $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ ou $g_2 = 4$, $g_3 = 0$. Ces développements méritent en eux-mêmes un intérêt particulier, quand même on ferait abstraction de leur application aux courbes considérées par l'auteur dans la dernière Section de son Mémoire. Les courbes pour lesquelles $\nu \geqq 4$ exigent l'emploi des fonctions hyperelliptiques et n'ont pas été étudiées par l'auteur.

---

FAERBER (Carl). — Herleitung von Kriterien fuer die Anzahl reeller Wurzeln von Gleichungen (speciell der allgemeinen viergliedrigen und der Gleichungen vom fuenften Grade) aus der Beschaffenheit ihrer Discriminantenmannigfaltigkeit. Inaugural-Dissertation. 62 p. in-8° et une Table. Berlin 1889.

En appliquant le theorème de Sturm à une équation algébrique dont les coefficients sont variables, on obtient une suite de fonctions entières et rationnelles de ces coefficients : les signes de ces fonctions révèlent immédiatement le nombre des racines réelles de l'équation proposée. Cependant on peut se passer du théorème de Sturm quand on veut établir ces fonctions. Dans son Mémoire : *Ueber Sturmsche Functionen* (*Monatsbericht der Berliner Akademie*, 14 Febr. 1878) et dans la *Festschrift* (*Grundzüge einer*

*arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*), M. Kronecker a montré qu'on parvient à ce but en se bornant à étudier le discriminant de l'équation proposée, et en même temps il a tiré de ce principe les critères ponr la réalité des racines de l'équation générale biquadratique.

Soit

$$\text{(1)} \qquad F(t, x_1, x_2, \ldots, x_i) = 0$$

une équation algébrique à une inconnue $t$ et à $i$ coefficients réels et indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_i$; on suppose que d'autres coefficients ne s'y présentent pas ou qu'ils soient des fonctions réelles et uniformes des $x_k$. A chaque point de la variété $i$-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ il correspondra une équation bien déterminée, et, réciproquement, à chaque équation (1) dont les coefficients ont des valeurs particulières, il correspondra un seul point de cette variété. La continuité des fonctions algébriques exige donc que l'ensemble des points auxquels correspondent les équations à un nombre déterminé de racines réelles se compose d'une région ou de plusieurs régions continues, $i$-uplement étendues.

Or, en faisant varier les coefficients, on ne peut altérer le nombre des racines réelles d'une équation qu'en franchissant les valeurs qui font évanouir le discriminant $D(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ de l'équation (1); les différentes régions sont donc séparées les unes des autres par la variété $(i-1)$-uple

$$\text{(2)} \qquad D(x_1, x_2, \ldots, x_i) = 0,$$

qui s'appelle la *variété du discriminant* de l'équation (1). En particulier, les régions où D garde le même signe sont séparées par des *figures* (Gebilde) singulières de la variété (2) dont l'étendue a moins de $i-1$ dimensions. En effectuant cette séparation, c'est-à-dire en caractérisant chaque région individuelle par les signes d'une suite de fonctions entières et rationnelles de $x_1, \ldots, x_i$, on découvre les critères pour la réalité des racines de l'équation proposée.

Pour mettre en usage ce procédé, signalé par M. Kronecker, il faut donc résoudre essentiellement trois espèces de problèmes : 1° représenter les singularités de la variété du discriminant par des équations algébriques; 2° chercher des variétés $(i-1)$-uples

par lesquelles une figure singulière n'est coupée suivant aucune autre variété réelle que suivant une variété singulière déterminée dont la dimension soit inférieure d'une unité; 3° examiner si des régions $i$-uplement étendues et liées d'une manière continue en elles-mêmes peuvent être décomposées, par une telle variété $(i-1)$-uple, en deux portions dont chacune représente de nouveau une simple continuité.

Si les coefficients de l'équation sont supposés linéairement dépendre de $x_1, \ldots, x_i$, le premier problème peut être complètement résolu. Encore est-il évident que les fonctions de Sturm doivent fournir les moyens de séparer les régions; mais la solution directe et entière des deux derniers problèmes présente en général de très grandes difficultés. Néanmoins, il y a certaines catégories d'équations abordables par cette méthode, et alors la discussion de la variété du discriminant fournit des résultats beaucoup plus simples que le théorème de Sturm. Voilà pourquoi M. Faerber, élève de M. Kronecker, s'est borné à traiter deux espèces d'équations :

1° Les équations quadrinômes

$$t^m + x_3 t^n + x_2 t^r + x_1 = 0, \tag{3}$$

où $m$, $n$, $r$ sont des nombres entiers. Dans ce cas, la variété (2) est une surface développable.

2° Les équations du cinquième degré

$$t^5 + 10 x_4 t^3 + 10 x_3 t^2 + 5 x_2 t + x_1 = 0, \tag{4}$$

pour lesquelles la variété (2) est de trois dimensions et appartient à une variété de quatre dimensions.

Les critères qui découlent, pour (3), de la discussion de la surface développable, dépendent de la nature des nombres $m$, $n$, $r$ où il faut distinguer les cas de nombres pairs ou impairs. En appliquant la méthode à l'équation (4), on reconnaît que, pour discerner les trois cas possibles, il suffit de considérer trois fonctions entières rationnelles qui ne sont guère plus compliquées que les quatre fonctions de Sturm. Les trois critères invariantifs de M. Sylvester et de M. Cayley montent à un degré beaucoup plus élevé dans les coefficients de l'équation.

La dernière question étudiée par M. Faerber se rapporte au nombre des racines réelles de l'équation du douzième degré qui, d'après les recherches de M. Kronecker, est la résolvante de l'équation générale du cinquième degré.

---

## MÉLANGES.

### NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE GEORGES-HENRI HALPHEN (1);

PAR M. BRIOSCHI.

Une semaine s'est à peine écoulée depuis que j'ai reçu de Versailles une lettre, datée du 21 mai, ainsi conçue :

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

J'ai la douleur de vous faire part du décès de mon bien-aimé gendre, M. le commandant Halphen, qui a succombé aujourd'hui à la suite d'une maladie contractée par l'excès du travail.

Veuillez porter cette nouvelle à la connaissance des Membres de l'Académie et recevoir, Monsieur le Président, l'assurance de ma considération très distinguée.

H. ARON.

Vous avez ressenti, excellents Collègues, tout ce qu'il y avait de triste dans cette nouvelle de la mort de l'éminent analyste, notre Associé étranger depuis 1887 ; permettez-moi d'ajouter une courte Notice sur sa vie et sur ses principaux travaux : ainsi, non seulement nous honorerons la mémoire d'un Collègue illustre, mais encore nous manifesterons à l'Académie des Sciences, de l'Institut de France, où Halphen avait pris une place considérable, la part que nous prenons au deuil que lui cause cette perte cruelle.

Un des historiens modernes les plus illustres, dont le nom est répété également dans l'Europe et dans l'Amérique, tant est puissant l'intérêt de son œuvre, Green, l'historien du peuple anglais, s'exprime ainsi dans la conclusion de la Préface où il explique la méthode qu'il a suivie dans son travail : « J'ai placé Shakespeare

---

(1) Lue à la séance du 2 juin 1889 de l'Académie dei Lincei.

parmi les héros du siècle d'Élisabeth et les découvertes scientifiques de la Société royale à côté des victoires de Cromwell [1]. » Certes, on peut envier une nation chez laquelle on conçoit et l'on écrit l'histoire avec un programme aussi élevé, avec une conscience aussi entière de l'avenir de l'humanité, et où l'on juge, d'un point de vue aussi haut, l'ensemble de ces qualités. Mais c'est à nous, à nous les ouvriers de la Science, qu'il appartient de mettre en pleine lumière et à leur vraie hauteur toutes les manifestations scientifiques destinées à durer; c'est nous qui avons l'obligation de rendre un juste hommage au nom de ceux qui ont largement contribué au progrès scientifique, le devoir d'honorer les premiers la chère mémoire de ceux qui disparaissent.

Georges-Henri Halphen est né à Rouen le 30 octobre 1844. Tout enfant, à quatre ans, il perdit son père; peu de temps après, sa mère l'emmena à Paris. Il fit ses études au lycée Saint-Louis : il obtint les plus hautes distinctions dans ses classes et même au concours général. Il fut admis à l'École Polytechnique en 1862, et les aptitudes naturelles qu'il avait pour les Mathématiques se développèrent rapidement; en seconde année, son esprit pénétrant, sa rapide intelligence avaient déjà excité l'admiration de ses maîtres et de ses camarades.

A sa sortie de l'École Polytechnique, il entra dans l'arme de l'Artillerie : là, pendant la guerre de 1870-1871, pendant le second siège de Paris, il donna, sur les champs de bataille, les preuves d'une bravoure qui lui valut la croix de chevalier de la Légion d'honneur. Il fut ensuite attaché à la Direction générale de l'Artillerie et nommé en 1873 répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique : il occupa ces fonctions pendant quatorze années, les trois dernières, en qualité d'examinateur d'entrée.

En 1872, il épousa M^lle^ Aron, dont il eut quatre fils et deux filles.

Pour les qualités morales, dont Halphen était si richement doué, je ne puis mieux en parler qu'en vous citant un fragment de la lettre que m'adressait récemment M. Henri Aron, adjoint au

---

[1] I have set Shakespeare among the heroes of the Elisabethan age and placed the scientific inquiries of the Royal Society side by side with the victories of the New Model. (GREEN, *Short History of the English People*. Preface to the first Edition).

maire du IIe arrondissement de Paris, son beau-père, qui a bien voulu, sur ma prière, me communiquer les renseignements que je viens de donner : « Fils affectueux et tendre, écrit M. Aron, le meilleur des époux et des pères, le plus noble et le plus chevaleresque des caractères, c'est un savant dont la France s'honorait, un soldat valeureux, un homme d'une modestie parfaite, doux aux faibles et à ses inférieurs, que pleurent sa famille inconsolable et ses nombreux amis. Nommé Membre de l'Institut en 1886, à la presque unanimité des suffrages, il avait été, il y a quatre ans, promu officier de la Légion d'honneur; il venait d'être nommé Membre du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique; il allait être élevé au grade de lieutenant-colonel d'Artillerie. »

J'en ai fini avec l'homme; permettez-moi de m'étendre un peu plus sur le savant.

Son œuvre est si variée, si étendue, qu'il est malaisé d'en faire le compte dans ces courtes pages. Déjà, en 1885, quand l'Académie des Sciences lui conférait le prix d'Ormoy pour les Sciences mathématiques, M. Jordan, rapporteur de la Commission, la définissait ainsi : « L'œuvre de M. Halphen est très considérable. Parmi les quatre-vingt-dix Mémoires dont elle se compose, plusieurs forment de véritables Volumes de 200 à 300 pages in-4°. Ils se distinguent par des qualités de premier ordre : les questions traitées sont toujours importantes et difficiles; les solutions élégantes et rigoureuses ne sont jamais abandonnées à moitié chemin; les applications sont variées et intéressantes. »

Cette œuvre, déjà si considérable il y a quatre ans, s'est singulièrement augmentée depuis lors : c'est en effet à cette dernière période qu'il faut assigner cet admirable *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications,* que, malheureusement, la mort a empêché Halphen de terminer entièrement.

La note caractéristique du progrès moderne des études mathématiques se trouve dans la contribution que chaque théorie spéciale, des fonctions, des substitutions, des formes, des transcendantes, et aussi la Géométrie apportent à l'étude de problèmes pour lesquels autrefois une seule de ces théories aurait semblé nécessaire. Il est clair que cette direction moderne de la Science exige, chez ceux qui veulent la suivre, une culture étendue, et que, si un grand nombre de savants, assurément très estimables, peuvent

perfectionner et faire progresser chacune des théories qu'on vient de dire, bien peu sont capables de les réunir pour en faire usage dans un sujet complexe. L'école de Clebsch a été pour beaucoup dans l'initiation de ce mouvement; celle de Klein, actuellement, lui a donné une remarquable impulsion, en obtenant par cette méthode de splendides résultats.

La France, qui, après les malheurs de 1870, a su retrouver une nouvelle et puissante vie scientifique, qui en a donné d'amples preuves dans toutes les directions intellectuelles, n'est pas restée étrangère à ce mouvement : Halphen en fut un des promoteurs et, certes, il n'a été inférieur à aucun autre, parmi ceux-ci.

Pour grouper convenablement ses travaux, nous devrons les diviser en cinq classes : quelques Mémoires seulement dont nous parlerons plus loin, écrits sur des sujets spéciaux, doivent être mis à part. Ce groupement est rendu plus facile par la méthode de travail adoptée par l'auteur et, pour mieux dire, correspond à un besoin évident de son intelligence. Quand un sujet s'emparait de son esprit, il ne se contentait pas des premiers résultats obtenus, si importants qu'ils fussent, il revenait plusieurs fois sur ce même sujet afin de le pénétrer de tous côtés.

Les cinq classes de travaux dont j'ai parlé plus haut peuvent être intitulées comme il suit :

1° Travaux sur les points singuliers des courbes algébriques planes;

2° Travaux sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre;

3° Travaux sur l'énumération et sur la classification des courbes algébriques dans l'espace;

4° Travaux sur la théorie des invariants différentiels; applications de cette théorie à diverses questions géométriques et principalement à l'étude des équations différentielles linéaires;

5° Travaux sur les fonctions elliptiques.

Le Mémoire *Sur les points singuliers des courbes algébriques planes* fut présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 20 avril 1874, et un extrait figure dans les *Comptes rendus* de cette séance. Dans la séance du 11 janvier de l'année suivante, une

Commission, composée de MM. Bertrand, Bonnet, de la Gournerie, formula son jugement à peu près dans ces termes : la méthode employée par M. Halphen dans son Mémoire consiste à développer l'équation de la courbe ou de ses dérivées (polaire, hessienne, etc.), en conservant seulement les termes qui peuvent avoir de l'influence sur la question étudiée. Le théorème sur la somme des ordres des segments donne alors, dans bien des cas, une solution immédiate. Sous le rapport analytique, les principales difficultés que l'auteur a dû résoudre consistent à reconnaître les ordres de grandeur des différents termes d'un développement dans les diverses hypothèses qui peuvent être faites, à classer méthodiquement les résultats et à les exprimer par des formules spéciales : dans ces délicates recherches, disent les commissaires, M. Halphen a montré beaucoup de sagacité. Le Mémoire, d'après la délibération de l'Académie, a été publié dans les *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences* (t. XXVI, n° 2, 1879).

Deux autres Mémoires importants d'Halphen sur le même sujet se trouvent dans le *Journal de Mathématiques* (3e série, t. II, 1876); ils sont intitulés : *Sur une série de courbes analogues aux développées, Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et sur les questions analogues dans l'espace.*

Un dernier travail qui se relie étroitement au précédent est le beau Mémoire publié dans le XVe Volume des *Mathematische Annalen,* sous le titre : *Recherches sur les courbes planes du troisième degré.*

Halphen est revenu plusieurs fois sur l'objet des travaux de la seconde classe; mais le travail le plus complet de cette catégorie semble être celui qu'il a publié dans le tome XXVIII (1878) du *Journal de l'École Polytechnique* et où il a résolu cette importante question : *Parmi les coniques dont l'ensemble constitue un système donné, quel est le nombre de celles qui satisfont à une condition donnée?*

On sait que M. de Jonquières et Chasles s'étaient déjà occupés de cette question et en avaient donné chacun une solution. Divers géomètres éminents avaient aussi essayé de démontrer la solution

de Chasles qui, à la vérité, ne reposait que sur une induction. Mais ce fut Halphen qui, en l'étudiant d'une façon plus approfondie, démontra que le théorème de Chasles était soumis à certaines restrictions, qui précisa ces restrictions et établit ainsi la formule exacte qui résout complètement la question.

Halphen avait antérieurement énoncé les résultats dans une Communication à l'Académie des Sciences, du 4 septembre 1878; d'autres travaux sur le même sujet se trouvent dans les *Proceedings* de la Société mathématique de Londres et dans les *Mathematische Annalen* (¹).

Un premier Mémoire relatif à la théorie des *courbes gauches algébriques* fut présenté par Halphen à l'Académie des Sciences, à la fin de février 1870 (²).

Douze ans après, en 1882, son grand Mémoire sur la classification de ces courbes, dans lequel était reproduit en grande partie le travail de sa jeunesse, fut jugé digne du prix Steiner par l'Académie des Sciences de Berlin.

La nécessité d'être bref ne me permet pas d'entrer dans de plus grands détails sur cette classe de travaux, d'autant plus que les écrits d'Halphen compris dans la quatrième classe sont plus étendus et peut-être plus originaux.

Bien que l'on rencontre des traces de cet ordre de recherches dans un des Mémoires déjà cités (³), on peut leur assigner pour origine la thèse qu'Halphen présenta en 1878 pour obtenir le grade de docteur en Mathématiques et qui a pour titre : *Sur les invariants différentiels*. Les premiers mots de cette thèse, que je reproduis textuellement, montrent clairement le sujet, l'étendue et l'importance de la théorie : « Parmi les équations différentielles qui s'offrent dans les applications usuelles de l'Analyse à la Géométrie plane, il en est qui se reproduisent sans altération quand on effectue sur les variables une substitution homographique quelconque; telles sont les équations différentielles en coordonnées rectilignes des lignes droites, des coniques, etc. Je nomme *inva-*

---

(¹) Vol. IX, nᵒˢ 133, 134; t. XV, p. 16.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI.

(³) *Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. II.

*riant différentiel* le premier membre d'une telle équation. C'est la Géométrie qui fournit ainsi les premiers exemples d'invariants différentiels; c'est à l'Algèbre qu'il appartient d'en coordonner la théorie par la résolution de ce problème : former, sans en omettre aucun, les invariants différentiels de chaque ordre; résoudre cette question, tel est l'objet de ma Thèse. »

Les propriétés des êtres mathématiques, figures ou formules analytiques, observe justement M. Jordan dans un Rapport sur cette Thèse et d'autres travaux connexes d'Halphen, sont de deux sortes : les unes sont individuelles, les autres sont communes à tous les êtres d'une même famille. L'étude systématique de ces dernières constitue la théorie des invariants : elle a renouvelé l'Algèbre et la Géométrie analytique, mais rien de semblable n'avait encore été fait pour le Calcul différentiel et intégral.

Je me bornerai à mentionner la première publication qui a suivi la thèse et qui a pour titre : *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (1); le concept des invariants différentiels y apparaît encore plus clairement que dans la thèse. Je veux m'attacher particulièrement au Mémoire *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, récompensé en 1880 par l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

L'Académie avait mis au concours pour cette année la question suivante : « Perfectionner en quelque point la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. » Ce sujet avait été donné à un moment singulièrement opportun ; car, parmi les concurrents, M. Hermite en signale quatre dont les travaux témoignaient de la culture étendue et des facultés d'invention de leurs auteurs. Dans le très beau travail d'Halphen, ainsi que l'observe l'illustre géomètre que nous citons, l'auteur montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé; c'est là que se trouve introduite, dans des recherches de Calcul intégral, la notion algébrique des invariants; par ces nouvelles combinaisons sont mis en lumière les éléments cachés dont dépend, sous ses différentes formes analytiques, l'intégration d'une équation différentielle donnée. L'idée d'étendre le concept d'invariant aux équations dif-

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIIe Cahier, 1880.

férentielles avait déjà été entrevue par d'autres; mais personne, avant Halphen, n'avait montré la fécondité de cette idée dans une étude systématique des équations différentielles.

Les conséquences de ces premières recherches ne s'arrêtent pas au Mémoire couronné ; car les deux intéressants Mémoires *Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires*, présentés à l'Académie en 1883 et 1884 (¹), le Mémoire *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre*, publié dans les *Acta mathematica* de Stockholm (²), et cet autre encore *Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre*, qui se lit dans les *Mathematische Annalen* (³), appartiennent au même ordre d'idées.

Il va encore plus loin dans cette voie féconde dans le Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* de 1885 sous ce titre : *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires*, et dont il définit ainsi le sujet : si entre les solutions d'une même équation différentielle linéaire, solutions inconnues, existe une relation connue, quel profit pourrait-on en tirer pour l'intégration de cette équation? On voit assez quelles sont l'importance et la difficulté de la question traitée dans ce travail.

Un cas qui échappe à la méthode suivie dans le Mémoire est signalé par l'auteur; c'est celui où la fonction des solutions de l'équation différentielle supposée égale à zéro est une façon quadratique à coefficients constants : il conduit Halphen à revenir sur le sujet par une Communication à l'Académie des Sciences dans une séance du 5 octobre 1885.

Il me serait aisé de citer d'autres travaux d'Halphen sur la théorie des équations différentielles linéaires; car je les connais tous, mais ce que j'en ai dit est déjà suffisant pour montrer que, si Halphen, dans les premières classes de ses écrits, a su mener à leur terme des théories qui étaient un peu plus qu'ébauchées, il a été dans les autres un initiateur et un créateur de théories nouvelles.

---

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 1409, 1883; p. 134, 1884.

(²) T. III, 1883.

(³) T. XXIV, 1884.

Eh bien, son œuvre dépasse encore ce champ d'activité : elle le dépasse dans cette forme qui, d'ordinaire, présente les plus grandes difficultés à ceux qui possèdent les qualités inventives d'Halphen : écrire un Livre et un Traité.

Le *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, dont le premier Volume parut en 1886, le second en 1888 et dont le troisième, comme je l'ai déjà dit, a été interrompu par cette mort néfaste, a des qualités didactiques de premier ordre, par la parfaite connaissance de la matière, par la scrupuleuse rigueur des démonstrations, par la précision de la forme ; mais ce n'est pas tout : dans une doctrine parfaitement connue des géomètres, il a su introduire une note sienne, originale, si bien qu'en parcourant ce Livre, on verrait de suite, si on ne le savait pas, qu'il est d'Halphen.

« Dans le domaine des Mathématiques, observe justement l'auteur au début de la Préface du premier Volume, on peut distinguer deux parties : l'une, la plus élevée, qui s'accroît constamment, presque toujours par degrés insensibles, ne regarde que les mathématiciens ; l'autre, longtemps immuable, s'accroît brusquement, à des intervalles éloignés, par l'adoption de quelque théorie nouvelle : c'est la matière de l'enseignement, ce que doivent retenir et savoir appliquer tous les hommes qui s'adonnent aux sciences exactes et, sans cultiver les Mathématiques, ont toujours besoin de les connaître. Dans laquelle de ces deux parties faut-il aujourd'hui ranger les fonctions elliptiques ? Partout on les enseigne ; seuls les mathématiciens savent s'en servir. Elles traversent, semble-t-il, une période de transition. C'est avec l'espoir de hâter la fin de cette période que j'ai entrepris cet Ouvrage ! »

Déjà, avant de publier son Traité, Halphen avait étudié avec soin les travaux de Weierstrass, de Schwarz et d'autres géomètres allemands ; il l'avait prouvé dans son Mémoire *Sur la multiplication des fonctions elliptiques* présenté à l'Académie des Sciences dans les séances des 3, 17 et 31 mars 1879, dans la Note *Sur l'inversion des intégrales elliptiques* insérée dans le *Journal de l'École Polytechnique* (¹) et dans quelques autres relatives à

(¹) LIVᵉ Cahier, 1884.

des problèmes de Mécanique rationnelle. Ce fut avec cette préparation qu'il se mit à cette difficile entreprise d'écrire un Livre; le succès prouva qu'il avait pour cela toutes les qualités nécessaires.

J'ai dit en commençant que, en dehors des cinq classes où j'ai groupé l'œuvre principale d'Halphen, il y avait de nombreux et importants Mémoires sur divers sujets spéciaux. Je me bornerai à citer celui qu'il présenta à l'Académie des Sciences, à peu près à l'âge de vingt-trois ans, sous le titre : *Sur le caractère biquadratique du nombre* 2 (1); il y montrait combien alors lui étaient déjà familiers les travaux classiques de Gauss et de Jacobi sur le sujet. Je saute, bien à contre-cœur, trente ans de vie laborieuse pour rappeler les deux derniers de ses travaux, parus dans l'année actuelle.

Le premier a été publié dans le *Journal de Mathématiques* (2) et se rapporte à la multiplication complexe des fonctions elliptiques. On sait que la multiplication complexe des fonctions elliptiques fut une des plus belles découvertes d'Abel, développée et étendue par deux illustres géomètres vivants, MM. Kronecker et Hermite. C'est à ces derniers que nous devons la connaissance du lien étroit qui existe entre la multiplication complexe et la théorie des formes arithmétiques de Gauss. D'autres géomètres, MM. Stuart, Sylow, le P. Joubert, Weber, Pyck, Greenhill ont continué plus récemment avec succès ce genre de recherches, qui ne pouvait échapper à Halphen, occupé au troisième Volume de son Traité.

« Au point de vue des résultats (ainsi juge-t-il modestement son avant-dernier travail), c'est donc un complément que j'apporte à ce qui était acquis. Mais c'est surtout par la méthode employée que ce travail, sans prétention, mérite peut-être un instant d'attention. »

Enfin, le 11 mars de l'année courante, il présentait à l'Académie des Sciences une courte Note *Sur la résolvante de Galois dans la division des périodes elliptiques par* 7; il y montre qu'il avait déjà approfondi un autre des sujets difficiles qui devaient trouver place dans le troisième Volume.

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 janvier 1868.
(2) T. V, 1889.

Ce fut au sujet de ce dernier travail que j'eus un échange de lettres avec lui : par cette trop brève correspondance, l'admiration pour le savant s'accroît de l'admiration pour l'homme.

L'œuvre de Georges-Henri Halphen, excellents Collègues, bien qu'interrompue par une mort prématurée, fera vivre son nom dans l'histoire des Mathématiques, dans l'histoire de la Science. Puisse cette confiance, puisse ce mien souvenir, porter quelque réconfort à sa veuve, à sa famille, désolées par une si grande perte!

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

THIELE (T.-N.). — Toreloesninger over almindelig Jattagelseslore : Sandsynlighedsregning og mindste Koadraters Methode. In-4°, 117 p. Kjobenhavn 1889.

Malgré tout ce qui a été écrit, dans les deux dernières générations, sur le Calcul des Probabilités et sur son emploi, cette branche, cependant, n'est aujourd'hui encore guère plus avancée qu'elle ne l'était après les célèbres travaux du commencement du siècle. Les méthodes et les points de vue développés par Gauss et par Laplace ont toujours été la base qui a servi de point de départ à leurs successeurs. On a, d'uné part, cherché à mieux démontrer les règles déjà fixées et, de l'autre, développé sous quelques rapports la technique; mais en fait de points de vue réellement nouveaux, on n'en rencontre que bien peu ou pas du tout. Et ce n'est pas que la théorie qui nous a été transmise soit parfaite. Au contraire, tous ceux qui ont eu l'occasion d'approfondir la théorie des erreurs n'ont pu éviter de se heurter à des difficultés qui devaient les faire douter de l'exactitude des conclusions jusqu'alors acceptées, et l'Ouvrage récemment paru de M. Bertrand n'est au fond qu'une protestation contre des doctrines qui, chez tous, ont soulevé des doutes, mais que personne jusqu'ici n'a osé rejeter. Car, quelque sceptique qu'on puisse être à l'égard de la théorie elle-même, personne cependant ne saurait nier que son emploi dans les domaines les plus divers n'ait conduit à de remarquables résultats; qu'il ne se confirme de plus en plus, chaque jour, que la loi des grands nombres est une loi naturelle générale, et que la distribution des erreurs d'après la loi exponentielle ne soit un phénomène presque universel. La pratique confirme à un si haut degré les résultats du Calcul des Probabilités qu'on ne peut s'en dégager. On cherche donc involontairement à en pénétrer la raison intime, mais on arrive bientôt à reconnaître qu'il est extrêmement difficile de dire quelque chose de mieux que ce qui a déjà été dit, et l'on en prend son parti.

Quand donc vient à paraître un travail qui est un essai sérieux pour fonder la théorie des observations sur des principes réelle-

ment nouveaux, un pareil travail mérite assurément tout l'intérêt des géomètres. L'Ouvrage ci-dessus mentionné de M. Thiele est un travail de ce genre. Nous nous hâtons de dire qu'il est bien loin d'être une œuvre parfaite; au contraire, il a, sous certains rapports, même de grands défauts. Non seulement la langue dans laquelle il est écrit le rend peu accessible à d'autres qu'aux compatriotes de l'auteur; mais, même pour ces derniers, il est d'une lecture très difficile. L'exposition en est beaucoup trop concise sur des points importants et, sur d'autres, plus développée qu'il n'est nécessaire. Le Livre se présente sous le titre de Leçons; mais, considéré comme livre d'étude, il exige de ses lecteurs beaucoup trop de connaissances et ne peut au fond être compris et apprécié que par ceux à qui les questions traitées sont déjà familières.

Mais, pour qui sait le comprendre, ce Livre est des plus intéressants. Tant dans ses grandes lignes que dans ses détails, il est le résultat d'un raisonnement bien conduit qui au fond est assez clair, même là où il est difficile à l'auteur de donner à sa pensée une expression correcte. Et, outre que l'idée mère qui perce à travers tous les développements de l'auteur est en soi bien propre à porter le lecteur à la réflexion, le Livre renferme tant de détails excellents qu'ils suffiraient à eux seuls à lui assurer une valeur durable. En particulier, la caractéristique des lois des erreurs par leurs semi-invariants, dont l'auteur a le premier fait usage, ne tardera pas sans doute à être reconnue comme le moyen le plus simple et le meilleur pour se rendre complètement maître de la théorie mathématique des erreurs. De même, la théorie des *fonctions libres,* indiquée à l'origine par Oppermann et développée en partie par M. Helmert, mais pour la première fois complètement exposée ici, facilite beaucoup l'exposition de la méthode des moindres carrés.

Ce qui surtout caractérise la manière dont M. Thiele conçoit la théorie des observations, c'est que, à son point de vue, elle ne doit pas être considérée comme une science purement mathématique, mais bien plutôt comme une science empirique. En conséquence, tandis que d'autres auteurs s'efforcent, à l'aide de la loi exponentielle des erreurs, de déterminer avec quel degré d'approximation la moyenne d'une série d'observations représente la

*valeur vraie* cherchée, M. Thiele rejette toute détermination mathématique de cette valeur, qui, suivant lui, ne peut être fixée qu'au moyen d'hypothèses, dont le choix est en grande partie une affaire d'appréciation personnelle. Tout ce qu'on peut obtenir par la voie exacte, c'est de mettre les observations données sous une autre forme qui en fasse mieux ressortir les propriétés caractéristiques. Quant aux conclusions qui doivent encore être tirées de ces observations, cela dépend beaucoup de ce qu'on y considère comme étant essentiel et non essentiel.

Conformément à ce point de vue, tandis que d'autres auteurs s'occupent exclusivement de la loi exponentielle des erreurs déduite *a priori*, M. Thiele commence tout son développement en cherchant les moyens dont on peut disposer pour représenter d'une manière abrégée une série d'observations donnée par expérience ou *a priori*. Il donne à une telle série le nom de *loi expérimentale des erreurs* (faktisk Fejllov).

Une loi expérimentale des erreurs représente donc la dépendance qui, dans une série d'observations répétées du même objet, a été constatée entre la grandeur des résultats et leur fréquence. Elle est, en général, donnée numériquement, et on la représente graphiquement en prenant pour abscisses les résultats des observations et pour ordonnées leurs fréquences absolues ou relatives. Les ordonnées peuvent aussi être considérées comme représentant des aires ou comme correspondant à une courbe continue, la courbe des erreurs. Cette représentation graphique est bien connue.

Pour obtenir une représentation analytique de la distribution des erreurs, on peut se servir de développements en série d'une espèce particulière. Si les arguments $x$ sont équidistants, il y a souvent avantage à employer des séries ordonnées suivant des coefficients du binôme et leurs différences de divers ordres comme la suivante

$$y = b_0 \beta_n(x) + b_1 \Delta \beta_{n-1}(x) + b_2 \Delta^2 \beta_{n-2}(x) + \ldots$$

où

$$\beta_n(x) = \beta_n(n-x) = \frac{n!}{x!\,\overline{n-x}!},$$

$b_0$, $b_1$, $b_2$, ... étant des constantes.

Pour représenter des courbes continues, on peut employer une

série ordonnée suivant $\xi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et ses coefficients différentiels, à savoir

$$\varphi(x) = \frac{k_0}{1}\xi(x) + \frac{k_1}{1.2}\xi'(x) + \frac{k_2}{1.2.3}\xi''(x) + \frac{k_3}{1.2.3.4}\xi'''(x) + \ldots,$$

qui se prête spécialement au développement des fonctions arbitraires qui se rapprochent fortement de zéro en dehors de certaines limites. La série se simplifie si l'on choisit convenablement l'unité et le zéro des $x$ ou, en d'autres termes, la situation et les dimensions de la courbe fondamentale $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ces séries jouissent de la propriété que même un petit nombre de termes suffisent pour caractériser à grands traits la forme de la courbe des erreurs; mais plus on prend de termes, plus la représentation en est exacte.

Un autre moyen de représenter la distribution des erreurs consiste dans la formation de fonctions symétriques de toutes les observations. Les fonctions symétriques simples des observations $(o)$,

$$\Sigma o^0 = s_0, \qquad \Sigma o^1 = s_1, \qquad \Sigma o^2 = s_2, \qquad \ldots$$

peuvent être employées; s'il y a $n$ observations, celles-ci sont implicitement données quand on connaît $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Mais il est plus commode de former ce que l'auteur appelle les *semi-invariants* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ de la loi des erreurs, lesquels sont définis par les équations suivantes :

$$s_1 = s_0\mu_1,$$
$$s_2 = s_1\mu_1 + s_2\mu_2,$$
$$s_3 = s_2\mu_1 + 2s_0\mu_2 + s_0\mu_3,$$
$$s_4 = s_3\mu_1 + 3s_2\mu_2 + 3s_1\mu_3 + s_0\mu_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura, sous une forme explicite,

$$\mu_1 = \frac{s_1}{s_0} = \text{la moyenne de toutes les observations}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{s_0^2}(s_0 s_2 - s_1^2) = \text{le carré de l'écart moyen},$$

$$\mu_3 = \frac{1}{s_0^3}(s_0^2 s_3 - 3s_0 s_1 s_2 + 2s_1^3),$$

$$\mu_4 = \frac{1}{s_0^4}(s_0^3 s_4 - 4s_0^2 s_1 s_3 - 3s_0^2 s_2^2 + 12 s_0 s_1^2 s_2 - 6s_1^4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces semi-invariants ont plusieurs propriétés importantes, parmi lesquelles celle-ci que, à l'exception de $\mu_1$, ils sont indépendants du zéro des observations; de même, $\mu_3\mu_2^{-\frac{3}{2}}$, $\mu_4\mu_2^{-\frac{4}{2}}$, ... sont indépendants de l'unité de mesure. C'est déjà une bonne raison pour faire usage de ces fonctions symétriques; nous verrons plus loin quelle est la véritable. Dans les lois d'erreurs continues, les sommes $s_1$, $s_2$, ... deviennent des intégrales, mais le mode de formation des $\mu$ est d'ailleurs le même. Pour la loi simplement exponentielle

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2}$$

on trouve $\mu_1 = m$ et $\mu_2 = n^2$, tandis que les autres $\mu$ sont nuls, d'où un critérium très commode pour reconnaître l'existence de cette loi des erreurs dans un cas proposé. On peut se servir du même critérium pour des fonctions données par des ordonnées équidistantes, en considérant celles-ci comme représentant des aires, tandis que les intégrations sont alors remplacées par des sommations.

Non moins importante est cette autre propriété, que les semi-invariants permettent de passer facilement à la série mentionnée plus haut, suivant $\xi$, $\xi'$, $\xi''$, .... Si l'on choisit le zéro et l'unité des $x$, de façon que $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$, et que, par conséquent, on construise la courbe fondamentale exponentielle, de manière que l'abscisse de son maximum soit déterminée par la moyenne des observations, et les abscisses de ses points d'inflexion par l'écart moyen correspondant, les premiers termes de la série seront

$$\varphi(x) = k_0\xi - k_0\frac{\mu_3}{1.2.3}\xi''' + k_0\frac{\mu_4}{1.2.3.4}\xi^{\text{IV}} - k_0\frac{\mu_5}{1.2.3.4.5}\xi^{\text{V}}, \quad \ldots$$

Les coefficients suivants sont plus compliqués, mais on en fait très rarement usage, un petit nombre de termes suffisant en général pour caractériser les propriétés principales d'une loi expérimentale proposée. Les $\mu$ à indices supérieurs, de même que les termes ultérieurs de la série $\varphi(x)$, subissent des changements fort notables même pour de petites variations des observations, de sorte que ces termes ne se prêtent pas autant que les premiers à caractériser les particularités essentielles de la courbe des erreurs.

L'appareil que nous venons d'exposer permet de traiter simple-

ment tous les problèmes concernant la représentation des lois des erreurs. L'auteur peut ainsi facilement trouver la loi des erreurs correspondant à une fonction simple d'une grandeur directement observée, et montrer, par exemple, que la loi des erreurs de $y = a + bx + cx^2$ ne sera pas exponentielle si celle des $x$ l'est. Pour les fonctions qui dépendent de plusieurs observations, une pareille détermination n'est possible, en partant des lois données, que si chacune des observations d'une des grandeurs peut se combiner indifféremment avec chacune de celles des autres grandeurs observées.

On trouve un exemple important de ce genre dans la détermination de la loi des erreurs d'une fonction linéaire

$$u = ao + bo' + co'' + \ldots,$$

de différentes grandeurs observées $o$, $o'$, $o''$ qui peuvent se combiner indifféremment les unes avec les autres. Si l'on suppose que les semi-invariants des $o$ sont donnés et désignés par $\mu(o)$, un semi-invariant correspondant à $u$ sera déterminé par l'équation

$$M_n(u) = a^n \mu_n(o) + b^n \mu_n(o') + c^n \mu_n(o''') + \ldots.$$

C'est sur cette propriété fondamentale qu'est basé le choix des fonctions $\mu$. Dans le cas particulier où $a = b = c = \ldots = 1$, on a

$$M_n(u) = \Sigma \mu_n(o').$$

Comme $\mu_2$ est toujours positif et que les autres $\mu$ peuvent être positifs ou négatifs, $M_2(u)$ croîtra avec chaque nouveau terme $\mu_2$; mais il n'en est pas de même des $M(u)$ suivants, dont le rapport à $M_2^{\frac{n}{2}}$ tend plutôt à se rapprocher de zéro. De là cette règle, que la loi composée des erreurs d'origine différente se rapproche plus de la loi exponentielle que celles qui s'en écartent le plus parmi les lois primitives, et cela est une des causes de l'apparition fréquente de cette dernière.

Après avoir, dans la première Partie de son Livre, exposé la théorie des lois expérimentales des erreurs, M. Thiele passe dans la suivante à l'examen de ce qu'il appelle les *lois méthodiques des erreurs*. Il fait d'abord observer qu'il nous est pour ainsi dire impossible, dans une loi expérimentale donnée, de ne pas voir autre

chose que ce qui est purement accidentel. Nous sommes amenés à considérer la loi expérimentale comme une détermination des particularités du mode même d'observation employé. Cette détermination ne peut être absolue, puisque l'expérience montre que les nouvelles observations qui viennent s'ajouter aux premières modifient constamment la loi des erreurs. Une vraie loi méthodique des erreurs ne saurait être autre chose que le résultat d'un nombre infini de répétitions.

On ne pourra, il est vrai, jamais prouver qu'une loi expérimentale donnée converge indéfiniment vers une limite déterminée, quand on répète indéfiniment les observations. Cependant il y a lieu de supposer que tel est le cas, et c'est pourquoi la loi méthodique des erreurs est définie comme la forme limite vers laquelle tend la loi expérimentale des erreurs lorsque le nombre des répétitions croît à l'infini. L'existence de la forme limite est donc un axiome qui, sous une autre forme, s'exprime par la loi des grands nombres. Mais cela présuppose que les circonstances essentielles qui ont influé de diverses manières sur les observations sont les mêmes. Si la loi des erreurs ne semble pas tendre vers une forme déterminée, il faudra par conséquent chercher tout d'abord si quelques-unes des observations ont été influencées par une circonstance essentielle qui n'a pas influé sur les autres. La loi des grands nombres devient en même temps par là souvent un moyen de distinguer entre des séries d'observations bonnes ou mauvaises.

Bien que, dans la pratique, on doive tirer toute sa connaissance des lois méthodiques des erreurs de l'image incomplète qu'en donnent les lois expérimentales, il y a cependant d'autres cas où les lois méthodiques peuvent être déterminées *a priori*. Le problème bien connu concernant la probabilité d'extraire, dans $n$ tirages, d'une urne dont la composition est donnée un certain nombre de boules blanches et de boules noires, fournit un bon exemple d'une détermination *a priori* de la loi méthodique des erreurs. M. Thiele passe très rapidement sur le calcul direct des probabilités et se contente d'en indiquer les propositions principales, en les accompagnant de quelques applications tirées des assurances sur la vie et de l'espérance mathématique. Par contre, il

examine en détail la question de savoir si, d'une fréquence relative observée, on peut conclure à la probabilité *a priori*.

Si l'on suppose que $n$ épreuves ont donné $m$ fois *oui* et $l$ fois *non*, oui et non étant les deux seuls cas possibles et la probabilité *a priori* pour oui et pour non étant respectivement $p$ et $q$, on pourra poser

$$\frac{p}{p+q} = \frac{m+a+\varphi}{m+l+b+\psi},$$

où $a$ et $b$ sont des constantes et $\varphi$ et $\psi$ convergent vers o pour $m$ et $l = \infty$, mais il n'existe aucun moyen pour déterminer exactement ces grandeurs inconnues. On peut, approximativement, employer la formule

$$\frac{p}{p+q} = \frac{m+a}{m+l+2a},$$

mais $a$ est ici une constante complètement inconnue, pour laquelle on peut prendre tout nombre positif. Le choix est en dernière analyse une affaire d'appréciation personnelle. Au point de vue historique, il a simplement oscillé entre $a = 0$ et $a = 1$; cette dernière valeur correspond à la règle de Bayes. Pour faciliter le choix dont il s'agit, l'auteur, à l'aide d'une représentation graphique des lois des erreurs correspondant aux différentes hypothèses, examine comment se présente, pour chacune d'elles, le fait que l'observation a donné $m$ fois oui et $l$ fois non. Il trouve ainsi que $a = 0$ et $a = \frac{1}{2}$ sont les valeurs qui méritent le plus d'attention. La première indique qu'on prend la valeur moyenne de la courbe des erreurs, la seconde répond à son maximum; par contre, $a = 1$ n'a pas une signification aussi simple.

Mais ces recherches ont conduit à un important résultat, à savoir que l'écart moyen des fréquences relatives est, dans tous les cas, inversement proportionnel à la racine carrée du nombre des répétitions, et qu'on ne peut, en somme, jamais s'attendre à voir les déterminations de probabilités faites *a posteriori* atteindre une grande exactitude.

L'auteur traite ensuite la question analogue de la détermination de la loi méthodique en partant de la loi expérimentale. C'est également ici l'appréciation subjective qui décide en dernier res-

sort; mais pour établir les formules sur lesquelles cette décision doit s'appuyer, il faut supposer provisoirement que la loi méthodique des erreurs est donnée, et s'en servir pour calculer les lois des erreurs correspondant à la détermination des semi-invariants d'une loi expérimentale. La marche à suivre est indiquée dans la première Partie. Pour éviter une confusion, l'auteur désigne les semi-invariants des lois méthodiques par $\lambda$ au lieu de $\mu$; $\lambda_2$ devient donc le carré de l'erreur moyenne.

Si maintenant on considère $\mu_2$ comme une fonction symétrique de $m$ différentes observations ayant toutes les mêmes lois d'erreurs, dont les semi-invariants sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, les semi-invariants de $\mu_1$, désignés par $\lambda(\mu_i)$, doivent être calculés en fonction de $\lambda$. On trouve, par exemple,

$$\lambda_1(\mu_1) = \lambda_1, \qquad \lambda_2(\mu_1) = \frac{1}{m}\lambda_2, \qquad \lambda_r(\mu_1) = \frac{1}{m^{r-1}}\lambda_r;$$

$$\lambda_1(\mu_2) = \frac{m-1}{m}\lambda_2, \qquad \lambda_2(\mu_2) = \frac{(m-1)^2}{m^3}\lambda_4 + 2\,\frac{m-1}{m^2}\lambda_2^2;$$

$$\lambda_1(\mu_3) = \frac{(m-1)(m-2)}{m^2}\lambda_3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces semi-invariants, si les $\lambda$ sont connus, pourront servir à juger si les $\mu$ observés peuvent être regardés comme des approximations utiles; mais, lorsque la loi méthodique des erreurs est complètement inconnue, on se trouve arrêté. Il n'y a alors pas autre chose à faire que de considérer les $\mu$ comme représentant leurs valeurs moyennes et, par conséquent, de supposer $\mu_r$ identique à $\lambda_1(\mu_r)$. On obtient alors

$$\lambda_1 = \mu_1,$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{m-1}\mu_2,$$

$$\lambda_3 = \frac{m^2}{(m-1)(m-2)}\mu_3,$$

$$\lambda_4 = \frac{m^3}{(m-1)(m^2-6m+6)}\left(\mu_4 + \frac{6}{m-1}\mu_2^2\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Comme vérification de cette hypothèse sur la loi méthodique des erreurs, on aura à déterminer d'après elle les semi-invariants

des $\mu$ et à comparer ensuite les écarts, notamment avec $\sqrt{\lambda_2(\mu_r)}$. On verra alors qu'il est surtout nécessaire d'avoir de nombreuses observations pour pouvoir obtenir une bonne détermination des semi-invariants supérieurs, ce qui montre qu'il y a également ici une raison pratique pour se contenter des premiers et pour considérer la loi des erreurs comme une loi simplement exponentielle.

Le problème le plus général que la théorie des observations puisse poser, c'est, étant donné un certain nombre d'observations dont aucune peut-être n'est une répétition, de déterminer en même temps toutes les lois des erreurs et toutes les équations entre les grandeurs observées.

Ce problème, le problème des compensations, n'est pas résoluble dans sa généralité, et l'on ne peut le résoudre partiellement qu'en le simplifiant à l'aide d'une série d'hypothèses.

Notamment, il faut supposer que toutes les lois méthodiques des erreurs peuvent être transformées en lois exponentielles avec des valeurs de $\lambda_2$, au moins approximativement connues, ou simplement être regardées comme telles, et que toutes les équations sont linéaires, et il faut qu'une recherche faite *a posteriori* confirme que ces hypothèses ont été bien choisies. C'est ce problème spécial des compensations qui est traité par la méthode des moindres carrés.

Si l'on considère un certain nombre de fonctions linéaires homogènes $u$, $v$, $w$, ..., des observations $o_1$, $o_2$, ..., $o_n$, indépendantes les unes des autres,

$$u = a_1 o_1 + a_2 o_2 + \ldots + a_n o_n = [ao],$$
$$v = [bo], \qquad w = [do], \qquad \ldots,$$

les lois de leurs erreurs sont déterminées par

$$\lambda_r(u) = a_1^r \lambda_r(o_1) + a_2^r \lambda_r(o_2) + \ldots = [a^r \lambda_r(o)],$$
$$\lambda_r(v) = [b^r \lambda_r(o)],$$
$$\lambda_r(w) = [d^r \lambda_r(o)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, si l'on prend une fonction linéaire de $u$, $v$, $w$, ...,

$$U = eu + fv + gw \ldots$$

les semi-invariants de sa loi des erreurs ne dépendent pas, en gé-

néral, de la même manière, de ceux de $u$, $v$, $w$, .... On trouve, en effet, que

$$\lambda_r(U) = \Sigma(ea + fb + gd\ldots)^r \lambda_r(o)$$

diffère ordinairement de

$$L_r = e^r \lambda_r(u) + f^r \lambda_r(v) + g^r \lambda_r(w) + \ldots.$$

Les fonctions linéaires des mêmes observations peuvent donc bien chacune à part être regardées comme représentant une observation, mais elles ne sauraient, en général, être considérées comme représentant des observations indépendantes les unes des autres, et ne peuvent pas être traitées comme telles.

Mais, si l'on suppose que toutes les lois des erreurs sont exponentielles, la différence apparaîtra seulement dans la détermination de $\lambda_2(U)$, qui aura la même valeur que $L_2$ si les sommes

$$[ab\lambda_1(o)], \quad [ad\lambda_2(o)], \quad [bd\lambda_2(o)], \quad \ldots$$

deviennent nulles. Dans ce cas, les fonctions $u$, $v$, $w$, ... peuvent être regardées et traitées comme des observations indépendantes les unes des autres, et sont ce que l'auteur appelle des *fonctions libres*. Il est toujours possible de remplacer un système de fonctions linéaires par un système de fonctions libres, renfermant au plus autant de fonctions qu'il y a d'observations $o$ (système complet). Si $[ao]$ est la première des fonctions libres, on aura à remplacer $[bo]$ par

$$[b'o] = [bo] - \frac{[ab\lambda_2]}{[aa\lambda_2]}[ao].$$

On déterminera d'une manière analogue $[c'o]$, $[d'o]$, ..., et l'on aura ainsi une série de fonctions qui sont libres de $[ao]$. Si, parmi celles-ci, on choisit, par exemple, $[b'o]$, $[c'o]$ devra être remplacée par

$$[c''o] = [c'o] - \frac{[b'c'\lambda_2]}{[bb'\lambda_2]}[b'o].$$

et ainsi de suite. On finit donc par obtenir un système de fonctions libres

$$[ao], \quad [b'o], \quad [c''o], \quad [d'''o], \quad \ldots$$

dont les carrés des erreurs moyennes sont déterminés par

$$\lambda_2[ao] = [a^2\lambda_2(o)], \qquad \lambda_2[b'o] = [b'^2\lambda_2(o)], \qquad \lambda_2[c''o] = [c''^2\lambda_2(o)], \qquad \ldots,$$

et il est maintenant facile de calculer $\lambda_2$ pour une fonction linéaire quelconque de ces fonctions libres.

Dans toutes les compensations, on a à observer qu'un système donné d'observations indépendantes les unes des autres ne peut être remplacé que par un système équivalent de fonctions libres. Ce remplacement doit se faire par des transformations orthogonales, qui sont les seules dont on doive se servir pour faire les éliminations que la compensation exige. Il y a en outre à observer que les fonctions linéaires dont les valeurs sont données à la fois théoriquement et par observation doivent être rendues libres de celles qui sont seulement observées, de manière que les premières, comme les secondes, puissent être considérées comme des fonctions indépendantes. Pour les fonctions données théoriquement, il faut remplacer les valeurs observées par les vraies, tandis que pour les autres on s'en tiendra aux valeurs observées. En suivant ces principes, on arrive, directement par la compensation des corrélats, et indirectement par la compensation des éléments, au système bien connu de formules dont le résultat est de rendre minimum la somme des carrés des erreurs. Mais, tandis que d'autres auteurs font du principe du minimum la base de toute la théorie, ce principe n'est pour M. Thiele qu'une conséquence de l'opération par laquelle on a rendu les fonctions théoriques connues libres des autres.

Je me borne à ces courtes indications des principes sur lesquels M. Thiele a basé la théorie des compensations, car un examen plus approfondi m'entraînerait dans des détails dans lesquels il n'y a pas lieu d'entrer ici.

L'auteur donne de la compensation quelques exemples, par lesquels il montre entre autres qu'il peut quelquefois être avantageux d'ajouter aux observations données des observations purement fictives qui n'ont aucune influence sur le résultat, mais jouent seulement un rôle comme grandeurs auxiliaires et servent à simplifier le calcul. Dans le dernier Chapitre, il présente enfin quelques

considérations sur la manière dont on doit traiter les erreurs dites *systématiques*.

On trouvera à la fin du Livre quelques Tableaux qui contiennent, respectivement avec 7 et 5 chiffres, les valeurs numériques des fonctions

$$\int_0^X e^{-\frac{1}{2}Z^2}\,dZ \quad \text{et} \quad \log e^{\frac{1}{2}X^2}$$

pour des arguments procédant par un centième, avec une Table d'interpolation très commode. L'auteur donne enfin la résolution en facteurs réels du deuxième degré des polynômes qui entrent dans les quatorze premiers coefficients différentiels de $e^{-\frac{X^2}{2}}$, et une petite Table de quelques fonctions symétriques.

Tel est, dans ses points essentiels, le contenu de ce remarquable travail, qui, certainement, doit être regardé comme un des plus profonds dans son genre. Les auteurs futurs pourront peut-être contester l'exactitude des principes exposés par M. Thiele, mais aucun ne niera qu'il n'y ait ici une œuvre qui, sous plusieurs rapports, a réalisé dans la Science un véritable progrès. J.-P. Gram.

---

FUERLE (Hermann). — Ueber die eindeutigen Lösungen einer Gruppe von Functionalgleichungen. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der 4ten Städtischen Höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern. 1889. 21 p. in-4°. Berlin R. Gaertners Verlagsbuchhandlung.

Il s'agit de trouver une fonction X de $x$, telle qu'il existe, entre deux valeurs de la fonction, une certaine équation $F = 0$, lorsque les deux arguments $x_1$, $x_2$ de la fonction sont liés par l'équation algébrique $\Phi = 0$. Un raisonnement rapide fait voir que la question générale revient immédiatement au cas particulier où l'on a $x_1 = cx_2$, $c$ étant une constante, c'est-à-dire que X satisfait à l'équation fonctionnelle

$$F[X(cx), X(x)] = 0. \tag{1}$$

Cette équation a été déjà étudiée par l'auteur dans sa disserta-

tion inaugurale : *Ueber die Darstellung von Functionen, welche durch eine gewisse Klasse von Functionalgleichungen definirt sind* (Halle, 1887). Les solutions qu'il avait alors prises en considération sont des séries procédant suivant les puissances de $\frac{\log x}{\log c}$, ou de $e^{\alpha \frac{\log x}{\log c}}$, ou de $e^{\beta e^{\alpha \frac{\log x}{\log c}}}$, où l'on peut augmenter le quotient $\frac{\log x}{\log c}$ de la quantité $\varphi\left(e^{2\pi i \frac{\log x}{\log c}}\right)$. Puisque les logarithmes sont des fonctions multiformes, ces représentations le sont aussi. N'ayant pas épuisé, dans la dissertation, toutes les solutions de l'équation $F = 0$, l'auteur se propose maintenant de trouver les fonctions *uniformes* $X(x)$ qui y satisfont. Pour simplifier la recherche, l'auteur montre qu'on peut remplacer l'équation $F = 0$ par une équation aux différentielles partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial c} : \frac{\partial X}{\partial x} = G(x),$$

où $G(x)$ est à déterminer par l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad G(cx) = c\,G(x) - x.$$

En étudiant de plus près l'équation (3), on parvient à exprimer $G(x)$ à l'aide de fonctions elliptiques, et l'intégration de l'équation (2) fournit alors $X(x)$ sous la forme

$$(4) \qquad X(x) = Y[Q(x) + A(x)],$$

où $Q(x)$ dénote une fonction liée très étroitement à la fonction $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ de M. Weierstrass, et $A(x)$ est une des fonctions en nombre infini qui satisfont à l'équation $A(cx) = A(x)$. Et, comme l'on a encore $Q(cx) = Q(x) - 1$, le problème se trouve réduit maintenant à l'équation fonctionnelle

$$(5) \qquad F[Y(t-1), Y(t)] = 0.$$

Le seul argument qui se prête à une détermination de la valeur de $Y$ est $t = \infty$, et c'est pourquoi l'auteur entreprend de développer la fonction dans le voisinage de ce point. Selon les formes de la fonction F, il y a trois manières de représenter la fonction F : l'une de ces représentations procède suivant les puissances crois-

santes de $\frac{1}{t}$, la deuxième suivant celles de $e^{\alpha t}$, la troisième suivant celles de $e^{\alpha e^{\beta t}}$. Le premier développement a été pleinement effectué dans le Mémoire, tandis que, pour les deux autres, l'épuisement de l'espace accordé aux auteurs a obligé M. Fürle de se borner à indiquer les résultats qu'il a gagnés par son analyse.

---

VOSS (A.). — ZUR ERINNERUNG AN AXEL HARNACK. 16 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1888.

M. Voss consacre ces quelques pages à la mémoire d'Axel Harnack, né le 7 mai 1851, mort le 3 avril 1888. Harnack a été un mathématicien distingué, un esprit étendu et ouvert, comme en témoignent ses nombreux Mémoires sur des branches très diverses des Mathématiques : fonctions elliptiques, Algèbre, Géométrie, séries trigonométriques, théorie générale des fonctions, etc. Il est mort dans la plénitude de son talent, alors qu'on pouvait attendre de lui des œuvres plus considérables encore que celles qui l'avaient fait connaître et apprécier.

Harnack était un de nos collaborateurs les plus dévoués; pendant une dizaine d'années, il nous a envoyé les comptes rendus des *Mathematische Annalen;* il est inutile de rappeler le beau Mémoire sur les séries trigonométriques, qu'il nous a donné il y a quelques années.

Les lecteurs et les rédacteurs du *Bulletin* ne peuvent que s'associer aux vifs et profonds regrets, causés par cette mort prématurée, que M. Voss a su exprimer dans un langage plein de chaleur et d'émotion. J. T.

---

PRYTZ (H.). — TABLES D'ANTILOGARITHMES. Édition stéréotype publiée sous les auspices de l'Académie Royale des Sciences de Copenhague. Lehmann et Stage, 27 p. in-8°; 1886.

L'identité suivante

$$\begin{aligned}L + \log(1+10^{-L_1}) + \log(1+10^{-L_2}) + \log(1+10^{-L_3}) + \ldots + \log(1+10^{-L_n})\\ = \log(10^{L} + 10^{L-L_1} + 10^{L-L_2} + 10^{L-L_1-L_2} + 10^{L-L_3} + 10^{L-L_1-L_3}\ldots)\end{aligned}$$

permet de réduire à un petit nombre d'additions et de soustractions la détermination des antilogarithmes et des logarithmes à 15 chiffres au moyen des Tables suivantes :

1° Une Table des antilogarithmes à 15 chiffres dont les logarithmes sont donnés à trois décimales ;

2° Une Table auxiliaire contenant les valeurs de $\log(1+10^{-L})$, depuis $L=2,64$ jusqu'à $L=7,63$. Le petit Volume contient aux pages 10-17 et 18-19 ces deux Tables, et l'auteur a encore ajouté les Tables nécessaires pour la détermination analogue des antilogarithmes et des logarithmes à 10 ou à 5 chiffres. H. Z.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

W. W. ROUSE BALL. — A HISTORY OF THE STUDY OF MATHEMATICS AT CAMBRIDGE. Petit in-8°, XVI-264 pages. Cambridge at the University Press, 1889.

Voici un Livre dont la lecture inspire tout d'abord le regret que des travaux analogues n'aient pas été faits pour toutes les Écoles célèbres, et avec autant de soin et de clarté. Rarement, il est vrai, l'historien trouverait l'occasion de consacrer un volume aux études mathématiques dans une même Université. Le grand nom de Newton suffirait, dans le cas présent, à justifier l'entreprise, et le lecteur se préoccupera principalement de tout ce qui concerne ce puissant génie, de l'influence qu'il a exercée pendant sa vie et longtemps après sa mort. Cependant, toutes les parties du Livre nous ont vivement intéressé, depuis les renseignements, un peu incertains d'ailleurs, relatifs aux débuts de l'Université, vers la fin du XIIe siècle, alors que les écrits mathématiques des anciens commençaient seulement à s'introduire en Europe par les Écoles maures d'Espagne, jusqu'aux détails relatifs au régime actuel de l'Université et des Collèges y annexés.

Des onze Chapitres dont se compose le Livre, les sept premiers sont consacrés à l'histoire même des professeurs qui se sont succédé dans les diverses chaires.

*Chapitre I.* — L'auteur rappelle comment, aux XIIe et XIIIe siècles, s'introduisirent d'Espagne et d'Afrique en Europe les traductions d'Euclide, Archimède, Apollonius et Ptolémée, ainsi que la numération arabe, qui se répandit d'abord par les relations entre les Maures et les marchands italiens. Il fait honneur à un moine anglais, Adelhard, en 1120, de la première traduction d'Euclide, qui aurait été reproduite en 1260 par Camponus et publiée en latin, en 1482, à Venise. C'est à Roger Bacon qu'est due la première tentative d'introduction des études mathématiques en Angleterre; il voulait faire de ces études et de la linguistique le fondement de toute éducation libérale. Les étudiants résistèrent; les écrits de Bacon sur la Physique furent condamnés comme portant trop aux

spéculations philosophiques, et, dit M. Ball, il n'est pas probable qu'un seul étudiant de Cambridge les ait étudiés. Au XIV$^e$ siècle, aucun mathématicien de valeur n'y est signalé; au XV$^e$ siècle, M. Ball cite seulement trois noms, ceux de Holbroke, Marshall, Hodgkins dont la vie et les œuvres sont restées inconnues; au commencement du XVI$^e$ siècle, Tonstall et Recorde, qui passèrent d'Oxford à Cambridge, ce qui semble prouver qu'il y avait alors à Cambridge une école de Mathématiques de quelque célébrité.

*Chapitre II.* — Tandis que la Réforme et la connaissance des études littéraires en Europe et l'invention de l'imprimerie amenaient un développement considérable des études mathématiques, les ordonnances royales de 1535, supprimant les monastères et leurs écoles et détruisant tout le système d'éducation du moyen âge, produisirent à Cambridge une diminution considérable du nombre des étudiants, qui de 1538 à 1547 fut probablement le plus petit qui se soit rencontré pendant les sept siècles de durée de cette Université. Le statut d'Édouard, en 1549, qui mit fin à la confusion, prescrivit l'étude des Mathématiques. Celui d'Élisabeth, en 1570, qui demeura en vigueur jusqu'en 1858, la proscrivit, et les Mathématiques furent plus étudiées dans les écoles de Londres qu'à l'Université, jusqu'au jour où leur enseignement reçut de Wallis, Barrow, Newton le plus vif éclat. Le discrédit jeté officiellement sur elles n'empêcha pas d'ailleurs que presque tous les mathématiciens anglais de la fin du XVI$^e$ siècle et du commencement du XVII$^e$ siècle n'aient été élevés à Cambridge; cependant on ne trouve à la fin du XVI$^e$ siècle que des noms de second ordre, après lesquels apparaissent au XVII$^e$ siècle des noms illustres : Edward Wright s'occupa de navigation et prépara une édition anglaise de l'œuvre de Neper; Henry Briggs, seul de tous ses contemporains, déclara que « l'Astrologie est au moins une illusion quand elle n'est pas un simple masque pour la coquinerie », changea la base du système de logarithmes et introduisit, d'après M. Ball, la notation décimale; il eut l'honneur d'occuper successivement à Londres et à Cambridge les deux premières chaires de Géométrie créées en Angleterre; Oughtred introduisit le signe $\times$ de la multiplication et le symbole de la proportionnalité $a:b::c:d$, écrivit un Livre sur les cadrans solaires, une Trigonométrie où

apparaissent, pour la première fois, des abréviations pour les signes sinus et cosinus; Harriot fut l'auteur d'un Traité, *Artis analyticæ praxis*, qui pendant plus d'un siècle demeura classique à Cambridge, et dans lequel apprirent l'Algèbre Newton, Whiston, Cotes, Smith et autres.

*Chapitre III.* — L'invention de la Géométrie analytique par Descartes, en 1637, marque en Mathématiques le commencement d'une ère nouvelle, au début de laquelle l'Angleterre eut encore des mathématiciens de haute valeur. John Pell, à qui Newton expliquait les fluxions, introduisit, dans une traduction d'un Traité d'Algèbre, le symbole $\frac{a}{b}$ de la division et écrivit un nombre énorme de lettres et de brochures, dont une étude approfondie jetterait probablement un grand jour sur l'histoire scientifique du XVII^e siècle. John Wallis, qui déserta Cambridge pour Oxford, publia, en 1656, *Arithmetica infinitorum* où il introduit les exposants fractionnaires et négatifs, donne l'aire des courbes $y = ax^m$, $y = ax^{\frac{1}{m}}$, étend, sans démonstration, le résultat à $y = ax^{\frac{p}{q}}$, et déduit, par interpolation, de l'aire de $y = \sqrt{1 - x^2}$, qu'il ne peut obtenir exactement, la valeur de $\frac{\pi}{2}$ qui a conservé son nom; Wallis est encore l'auteur de divers Ouvrages, sur les coniques où il éclaircit les idées de Descartes, sur la Statique, la Dynamique, et, en 1686, dans son Algèbre, il emploie des formules générales, écrivant pour la première fois, par exemple, $s = vt$ au lieu de $s_1 : s_2 :: v_1 t_1 : v_2 t_2$; il dirigea à Oxford une école célèbre de Mathématiques, mais n'y eut pas de successeur digne de lui. Barrow, *Lucasian professor* à Cambridge, de 1662 à 1669, laissa sa chaire à Newton, son élève.

*Chapitre IV.* — Ce Chapitre est entièrement consacré à l'histoire de Newton et à ses travaux. M. Ball prévient qu'il l'a tiré de son *Histoire des Mathématiques*, publiée à Londres en 1888, à laquelle il renvoie, pour plus de détails, le lecteur. Il indique que l'édition des *Œuvres* de Newton publiée à Londres, en cinq Volumes, par Horlsley, de 1779 à 1785, contient une Bibliographie complète de ses écrits.

Nous ne pouvons songer à donner un résumé de ce Chapitre, qu'il faudrait traduire tout entier pour analyser l'œuvre de ce puissant génie. Nous ne pouvons qu'y renvoyer le lecteur. Au point de vue historique, nous nous bornerons à dire que M. Ball pense, tout en reconnaissant que la question est des plus difficiles, que Leibnitz tira l'idée du Calcul différentiel d'un manuscrit de Newton qu'il vit en 1673. Il estime que les *Principes* furent regardés comme donnant les vraies lois de l'Univers, en Angleterre dix ans après leur apparition, dix ans plus tard en Europe, sauf en France où « le patriotisme fit prévaloir les idées de Descartes jusqu'en 1738, époque à laquelle Voltaire se fit l'avocat des idées de Newton ».

*Chapitre V*. — En même temps que Newton, vivaient à Cambridge nombre de mathématiciens de mérite, parmi lesquels nous devons citer : Flamsteed, le premier Astronome Royal, qui fournit à Newton beaucoup des données numériques des *Principes,* mais refusa de les compléter pour une seconde édition ; Whiston, qui publia en 1696 sa célèbre théorie de la Terre, où il explique le déluge par le passage d'une comète, et remplaça Newton dans la *Lucasian Chair;* Sanderson, aveugle peu de jours après sa naissance, successeur de Whiston ; Byrdall, qui aida Newton dans ses calculs numériques ; Gurin, qui prit une part active aux controverses entre les partisans de Newton et ceux de Leibnitz ; Cotes, le premier *Plumian professor,* de qui Newton disait que, s'il eût vécu plus longtemps, on aurait appris quelque chose ; Robert Smith, le second *Plumian professor*.

La diffusion de la doctrine de Newton ne fut pas seulement due aux mathématiciens, mais aussi aux philosophes, notamment à Bentley, qui fut directeur de Trinity College et eut la meilleure influence sur l'Université de Cambridge.

*Chapitre VI*. — Newton avait employé, dans la rédaction des *Principes,* la méthode géométrique. Pendant plus d'un siècle, les étudiants anglais ne connurent que cette méthode et les fluxions, et ignorèrent les travaux des mathématiciens du continent, où l'influence de Jean Bernoulli avait amené l'adoption des notations de Leibnitz, qui fut définitive en 1730, et où l'Analyse moderne,

fondée par ces deux hommes illustres, recevait des travaux de d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, les plus admirables développements. Pendant tout le XVIII[e] siècle, deux mathématiciens de premier ordre seulement, Maclaurin en Écosse, Clairaut en France, peuvent être rattachés à l'École de Newton. A Cambridge, Waring est le seul mathématicien dont le nom mérite plus qu'une simple mention. Bien loin cependant que l'Université fût en décadence, ni que les études mathématiques y fussent négligées, M. Ball attribue aux fortes études géométriques le nombre extraordinaire de juristes distingués qu'elle a fournis. A la même époque, la Physique expérimentale y faisait de grands progrès, représentée par Cavendish, Thomas Young, Wollaston.

*Chapitre VII.* — C'est à Woodhouse (1773-1827), le premier directeur de l'observatoire de Cambridge, qu'est dû le premier effort pour introduire en Angleterre les méthodes du continent. Il publia, en 1803, des *Principes de calcul analytique;* en 1809, une *Trigonométrie;* en 1810, un Traité historique du *calcul des variations* et *des problèmes isopérimètres;* en 1812, le premier Volume d'une *Astronomie,* dont le second, paru en 1818, contient un aperçu des méthodes d'Astronomie physique de Laplace et des autres écrivains du continent.

En 1812, trois étudiants, J. Herschel, Peacock et Babbage, fondèrent, avec d'autres moins connus, une *Société analytique* pour l'introduction des méthodes analytiques et de la notation différentielle. En 1816, cette Société traduit le *Calcul différentiel* de Lacroix; en 1817, Peacock, président, introduit la notation différentielle dans les Mémoires lus à la Société; en 1820, il donne un Traité de *Calcul différentiel et intégral* et Herschel un *Calcul des différences finies;* en 1819, Whewell publie une *Mécanique* et Airy, en 1826, des *Traités* qui exercèrent la plus grande influence sur l'étude de la Physique mathématique.

Pour augmenter encore l'intérêt qui s'attachait aux recherches mathématiques et scientifiques et aux nouvelles méthodes, fut fondée, en 1819, la *Cambridge Philosophical Society.*

En 1830, la méthode analytique était répandue dans tout le pays. M. Ball pense qu'elle est particulièrement adaptée au génie national anglais, et que, si la méthode géométrique fut exclusivement

employée pendant un siècle, ce fut par l'action prédominante du génie de Newton.

Ce Chapitre se termine par l'énumération des principaux manuels publiés au XIX$^e$ siècle, et une indication rapide des mathématiciens contemporains, dont plusieurs portent les noms les plus illustres.

*Chapitres VIII, IX, X et XI.* — Le Chapitre VIII est consacré à l'organisation des études, d'abord au moyen âge; puis dans la période de transition, de 1535 à 1570; dans une troisième période enfin, s'étendant de 1570 à 1858, où l'Université fut régie par les statuts d'Élisabeth. Le Chapitre IX nous renseigne sur les exercices donnés dans les écoles; il est tiré textuellement d'un autre Ouvrage de M. Ball publié en 1880, *Origin and history of the mathematical tripos*. Le Chapitre X, tiré en substance du même Ouvrage, est consacré à ce *tripos* ou grand concours de Mathématiques, qui est demeuré, depuis sa fondation vers 1730, le moyen de constater les progrès des étudiants en Mathématiques, et dont le nom, provenant d'un tabouret sur lequel montait un certain *ould bachilour* qui représentait l'Université, passa successivement du tabouret à l'*ould bachilour*, de celui-ci à un discours, du discours à deux pièces de vers, de ces pièces de vers à une feuille de papier, de ce papier à une liste de noms, de cette liste au concours lui-même. Le Chapitre XI est un aperçu sur l'histoire de l'Université jusqu'en 1858, époque où le statut d'Élisabeth fit place à des règlements nouveaux.

L'analyse de ces quatre derniers Chapitres nous entraînerait trop loin et serait peut-être impossible; au reste, il ne s'agit plus des progrès mêmes des Sciences mathématiques; le lecteur les lira avec un réel plaisir.

B. B.

BRUNN (H.). — UEBER OVALE UND EIFLÄCHEN. Inaugural-Dissertation. 42 p. In-8°; 4 pl. Munich, F. Straube; 1887. — UEBER CURVEN OHNE WENDEPUNKTE. Habilitationsschrift. 74 p. In-8°; 3 pl. Munich, T. Ackermann; 1889.

Le premier de ces deux écrits se rapporte aux courbes ovales et aux surfaces ovoïdes; les unes et les autres sont des figures fermées, entièrement convexes. Il est divisé en trois Chapitres : le premier contient les définitions et les propriétés les plus évidentes; dans le second, l'auteur se restreint aux figures qui admettent une courbure en chacun de leurs points; il introduit la notion du domaine de courbure; c'est l'intervalle entre la courbure maximum et la courbure minimum. Il établit quelques théorèmes intéressants sur la position ou l'intersection de deux ovales; par exemple, deux ovales dont les domaines de courbure n'ont pas de valeur commune, et qui ont un point commun, ont toujours un second point commun et n'ont pas d'autre point commun. Si l'on considère deux ovales dont les domaines de courbure n'ont pas de valeur commune, en dehors (tout au plus) de la limite supérieure de l'un et de la limite inférieure de l'autre, on peut placer l'ovale dont le domaine de courbure comprend les plus grandes valeurs entièrement dans l'autre, et l'y faire tourner autour d'un de ses points, sans que jamais il rencontre l'autre ovale. Les surfaces ovoïdes donnent lieu à des théorèmes analogues. Dans la troisième Partie, M. Brunn s'occupe du maximum des cordes inscrites dans un ovale, ou des aires et des circonférences des sections planes d'un ovoïde; il est amené ainsi à généraliser et à rectifier quelques-uns des théorèmes du Mémoire de Steiner : *Ueber maximum und minimum der Figuren*. Il donne aussi divers théorèmes sur les ovales et ovoïdes à centres. Signalons, par exemple, les propositions suivantes : Considérons deux ovoïdes de même volume; menons-leur deux plans tangents parallèles et du même côté : le plan parallèle à ces deux plans, qui divise leur distance dans un rapport constant, enveloppe un ovoïde de volume plus grand que les ovoïdes primitifs. Toute corde qui, dans un ovoïde à centre, partage en deux parties égales deux sections planes, dont les plans la contiennent, passe par le centre.

Le second écrit concerne principalement les courbes fermées sans point d'inflexion. Dans le premier Chapitre, on considère les courbes enveloppées par une droite dont l'équation est, soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \mathrm{P}(\varphi)\cos\frac{\varphi}{\nu} = 0,$$

où $\mathrm{P}(\varphi)$ est une fonction continue, ainsi que sa dérivée, qui admet $\nu\pi$ pour période, en désignant par $\nu$ un entier impair, soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \mathrm{P}(\varphi) = 0,$$

$\mathrm{P}(\varphi)$ admettant cette fois la période $\nu\pi$, $\nu$ étant un nombre pair; si l'on suppose que la dérivée seconde de $\mathrm{P}(\varphi)$ soit finie, ces courbes n'admettent pas de points d'inflexion; on peut leur mener $\nu$ tangentes parallèles à une direction donnée. L'auteur étudie les propriétés des courbes ainsi définies et particulièrement leurs nombres de points de rebroussement et de points doubles. Le cas où $\nu = 1$ est traité avec des détails particuliers, ainsi que le cas des ovales, où $\nu = 2$.

Le second Chapitre se rapporte à un mode spécial de génération de ces dernières courbes.

L'auteur, dans les deux Chapitres qui suivent, démontre divers théorèmes sur les ovales et les surfaces ovoïdes, parmi lesquels nous signalerons le suivant : *Si toutes les sections planes d'une surface ovoïde ont un centre, cette surface est un ellipsoïde.*

Enfin, dans un dernier Chapitre, M. Brunn montre l'utilité, dans un autre domaine, des considérations qu'il a développées; il part de la signification mécanique évidente de la proposition suivante signalée par M. Hölder :

Si $\varphi(n)$ est une fonction dont la dérivée est croissante dans un intervalle où sont compris les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres positifs,

$$\frac{a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) + \ldots + a_n\varphi(x_n)}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} > \varphi\left[\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right];$$

il observe que c'est là un cas particulier du théorème suivant :

*Tout point intérieur à un polygone convexe inscrit dans un ovale est intérieur à cet ovale.*

Puis, généralisant ce théorème, il arrive à la conclusion suivante :

Si la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est telle que, pour les valeurs de $x$ appartenant à un certain continuum, la forme quadratique

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j} y_i y_j$$

soit définie et positive, on aura, en considérant $m$ systèmes de valeurs pour les $x$, tous compris dans le continuum considéré,

$$x_1^{(i)}, \quad x_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et $m$ constantes positives

$$a^{(1)}, \quad a^{(2)}, \quad \ldots, \quad a^{(m)},$$

l'inégalité

$$\frac{\Sigma a^{(i)} \varphi(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})}{\Sigma a^{(i)}} > \varphi\left(\frac{\Sigma a^{(i)} x_1^{(i)}}{\Sigma a^{(i)}}, \frac{\Sigma a^{(i)} x_2^{(i)}}{\Sigma a^{(i)}}, \ldots, \frac{\Sigma a^{(i)} x_n^{(i)}}{\Sigma a^{(i)}}\right),$$

les sommations étant relatives à l'indice $i$. J. T.

---

# MÉLANGES.

## SUR LE CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES D'UNE SÉRIE SEMI-CONVERGENTE;

Par M. Émile BOREL,
Élève de l'École Normale supérieure.

On sait que, lorsqu'une série est convergente sans que la série des modules de ses termes le soit, c'est-à-dire est semi-convergente, sa valeur dépend, en général, de l'ordre dans lequel on écrit ses termes. Les opérations sur ces séries exigent donc, pour être rigoureuses, des précautions très grandes. Il n'en serait pas de même, si l'on connaissait, d'une manière précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente n'altérât pas sa valeur. Il paraît difficile de les trouver complètement, mais on peut du moins

indiquer certaines conditions suffisantes dont la connaissance pourra peut-être parfois être utile. C'est ce que je me propose de faire : je me bornerai aux séries à termes réels ; car on verra facilement que les théorèmes s'étendent immédiatement aux séries à termes imaginaires ; il suffit de remplacer dans l'énoncé *valeur absolue* par *module*. Une série à termes imaginaires peut en effet être considérée comme formée de deux séries à termes réels, unies par le symbole $i$.

Considérons donc une série semi-convergente à termes réels

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots$$

et écrivons ses termes dans un ordre différent ; nous obtenons la nouvelle série

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Par hypothèse, il existe entre les entiers $m$ et $n$ une correspondance univoque, telle que $u_m = v_n$ lorsque $m$ et $n$ se correspondent. Posons

$$|m - n| = \alpha_m,$$

$\alpha_m$ est le *déplacement* du terme de rang $m$. Désignons par $\lambda_m$ la plus grande des valeurs que prend $\alpha_\mu$ lorsque $\mu$ varie de 1 à $m$ et posons

$$m + \lambda_m = p_m.$$

La suite

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$$

se compose de nombres entiers croissant sans limite avec $m$. D'autre part, pour que $p_m$ augmente indéfiniment, il faut évidemment que $m$ augmente indéfiniment. On a d'ailleurs, d'après la définition de $p_m$,

$$p_{m+1} - p_m \leqq \lambda_{m+1} + 1.$$

Cela posé, cherchons à évaluer la somme $V_p$ des $p$ premiers termes de la série V. Nous pouvons toujours déterminer $m$ de manière que l'on ait

$$p_m \leqq p < p_{m+1}.$$

Il en résulte

$$p - p_m \leqq \lambda_{m+1};$$

on a donc

$$V_p = V_{p_m} + \sigma,$$

$\sigma$ étant la somme d'au plus $\lambda_{m+1}$ termes de la série V, dont les rangs dépassent le $p_m^{\text{ième}}$. Ces termes occupaient donc dans la série U un rang au moins égal à $m+1$. Par suite, si l'on désigne par $\eta_{m+1}$ le maximum de la valeur absolue des termes de la série U qui suivent le $m^{\text{ième}}$, on aura

$$\sigma = \theta\lambda_{m+1}\eta_{m+1} \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Évaluons maintenant $V_{p_m}$. Parmi les $p_m$ premiers termes de la série V se trouvent certainement les $m$ premiers termes de la série U ; et, en outre, $p_m - m = \lambda_m$ termes de cette même série, pris parmi ceux qui suivent le $m^{\text{ième}}$. On a donc

$$V_{p_m} = U_m + \theta'\lambda_m\eta_{m+1} \qquad (-1 < \theta' < +1).$$

Il en résulte

$$V_p = U_m + \theta'\lambda_m\eta_{m+1} + \theta\lambda_{m+1}\eta_{m+1}.$$

Supposons que l'on ait

$$\lim(\lambda_m\eta_m) = 0 \qquad \text{pour} \qquad m = \infty,$$

et faisons croître $p$ indéfiniment; $p_{m+1}$ croît aussi indéfiniment, et il en est de même de $m$. Le second membre a donc pour limite U. Donc le premier membre a une limite V qui est précisément égale à U. Nous sommes donc arrivés au résultat suivant :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série (semi-convergente) n'altère pas sa somme, il suffit que le produit du déplacement maximum des termes qui précèdent le $m^{\text{ième}}$ par la valeur absolue maximum des termes qui suivent le $m^{\text{ième}}$ ait pour limite zéro lorsque $m$ augmente indéfiniment. »

On peut donner à cet énoncé deux formes un peu différentes, peut-être plus commodes pour certaines applications.

Soit $u_{m'}$ le terme qui a la plus grande valeur absolue parmi ceux qui suivent le $m^{\text{ième}}$. On a évidemment

$$\eta_m = \eta_{m'} = |u_{m'}|, \qquad \lambda_m \leqq \lambda_{m'}.$$

Donc

$$\lambda_m\eta_m \leqq \lambda_{m'}\eta_{m'} = \lambda_{m'}|u_{m'}|.$$

Si l'on suppose que $\lambda_{m'}|u_{m'}|$ tende vers zéro lorsque $m'$

augmente indéfiniment, $\lambda_m \eta_m$ tendra aussi vers zéro. On a donc l'énoncé suivant :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série n'altère pas sa valeur, il suffit que le produit de la valeur absolue du terme de rang $m$ par le déplacement maximum des termes qui le précèdent tende vers zéro (pour $m$ infini). »

Soit de même, parmi les termes qui précèdent le $m^{\text{ième}}$, $u_\mu$ celui dont le déplacement $\alpha_\mu$ est le plus grand. On a

$$\lambda_\mu = \alpha_\mu = \lambda_m, \qquad \eta_\mu \geqq \eta_m.$$

Donc

$$\alpha_\mu \eta_\mu \geqq \lambda_m \eta_m.$$

Faisons croître $m$ indéfiniment : si $\lambda_m$ reste fini, $\lambda_m \eta_m$ tend évidemment vers zéro ; si $\lambda_m$ augmente indéfiniment, il en est de même de $\alpha_\mu$ et par suite de $\mu$ ; par conséquent, si $\alpha_\mu \eta_\mu$ tend vers zéro lorsque $\mu$ augmente indéfiniment, il en sera de même de $\lambda_m \eta_m$ lorsque $m$ augmentera indéfiniment. On peut donc donner ce troisième énoncé :

« Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série n'altère pas sa valeur, il suffit que le produit du déplacement du terme de rang $m$ par la valeur absolue maximum des termes qui le suivent tende vers zéro lorsque $m$ augmente indéfiniment. »

Comme application, considérons la série

$$S = 1 - \frac{1}{2\,L2} + \frac{1}{3\,L3} - \frac{1}{4\,L4} + \ldots = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots.$$

Écrivons-la

$$S' = 1 + \frac{1}{3\,L3} - \frac{1}{2\,L2} + \frac{1}{5\,L5} + \frac{1}{7\,L7} - \frac{1}{4\,L4} + \ldots = v_1 + v_2 - v_3 + \ldots,$$

c'est-à-dire posons

$$u_{2n} = v_{3n},$$
$$u_{4n+1} = v_{3n+1},$$
$$u_{4n+3} = v_{3n+2}.$$

On a $\lambda_n < n$. Donc $|\lambda_n u_n| < \frac{1}{Ln}$, quantité qui tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment. On a donc $S' = S$. On sait, au

contraire, que si l'on pose

$$T = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots,$$
$$T' = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots,$$

on a

$$T' = \tfrac{3}{2}T.$$

On a démontré que les conditions données sont suffisantes. Vu la grande variété de séries qui peut exister, il est à peu près certain qu'on ne peut énoncer d'une manière bien précise des conditions nécessaires; mais on peut du moins se demander s'il n'est pas possible de remplacer les conditions trouvées par d'autres plus simples, ou plus générales. Il est naturel, par exemple, de rechercher s'il ne suffit pas que le produit de la valeur absolue du terme de rang $m$ par son déplacement tende vers zéro lorsque $m$ augmente indéfiniment; car cette condition ressemble extrêmement à celles que l'on a trouvées. On peut montrer cependant qu'elle n'est pas suffisante et faire voir, par un exemple qu'un changement dans l'ordre des termes dans lequel elle est remplie peut rendre divergente une série convergente.

Posons, pour abréger l'écriture, $\overline{n} = \dfrac{1}{n\,\mathrm{L}n}$ et considérons la série

$$\Sigma = -\underline{\overline{2} + 1 + \overline{3} - \overline{4}} - \underline{\overline{10} + \overline{9} - \overline{8} + \overline{7} - \overline{6} + \overline{5} + \overline{11} - \overline{12} + \overline{13} - \overline{14} + \overline{15} - \overline{16}}$$
$$\underline{- \overline{136} + \overline{135} - \ldots + \overline{17} + \overline{137} - \overline{138} + \ldots + \overline{255} - \overline{256} + \ldots}$$

(Les termes sont disposés par groupes, de manière que dans chacun d'eux le dernier terme soit $-\overline{2^{2^n}}$ et que les $\dfrac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ premiers termes de chaque groupe soient rangés dans l'ordre des valeurs absolues croissantes et les $\dfrac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ derniers dans l'ordre des valeurs absolues décroissantes.)

Je dis d'abord que la série $\Sigma$ est convergente et a même somme que la série S déjà considérée. En effet, la somme des $2^{2^n}$ premiers termes est la même dans les deux séries, et l'on voit facilement que, $h$ étant inférieur à $2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}$, la somme de $h$ termes de la série V suivant le $2^{2^n\text{ième}}$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment. (Il suffit, pour le démontrer, de s'appuyer sur ce que la valeur d'une somme composée de termes alternativement posi-

tifs et négatifs est inférieure en valeur absolue à celui des termes dont la valeur absolue est la plus grande.)

Ce point étant admis, échangeons les termes de la série $\Sigma$ de la manière suivante : dans chaque groupe de $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}$ termes, permutons le dernier terme négatif avec le premier terme positif, l'avant-dernier terme négatif avec le second terme positif, etc., jusqu'à ce que ce groupe se compose de $\frac{2^{2^n} - 2^{2^{n-1}}}{2}$ termes négatifs consécutifs, suivis d'autant de termes positifs. Le déplacement de chaque terme (augmenté ou diminué d'une unité) est égal au double de son rang compté, dans un sens ou dans l'autre, à partir du milieu du groupe auquel il appartient. Or ce rang est toujours inférieur à l'entier qui figure le terme, puisque cet entier augmente d'une unité à chaque rang lorsqu'on s'éloigne du milieu d'un groupe. Le produit de chaque terme par son déplacement tend donc vers zéro lorsque le rang augmente indéfiniment. Il est cependant facile de voir que la série obtenue est divergente. Elle se compose en effet d'une infinité de groupes de termes de même signe, la somme de chaque groupe ne tendant pas vers zéro. La somme d'un de ces groupes est, en effet, par exemple,

$$\frac{1}{(2^{2^{n-1}}+2)L(2^{2^{n-1}}+2)} + \frac{1}{(2^{2^{n-1}}+4)L(2^{2^{n-1}}+4)} + \cdots + \frac{1}{2^{2^n}L2^{2^n}}.$$

Or cette somme est évidemment supérieure à

$$\frac{1}{2}\int_{2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}} \frac{dx}{xLx} - \frac{1}{2^{2^{n-1}}L2^{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}L2 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}L2^{2^{n-1}}},$$

et l'on voit facilement qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}L2$ lorsque $n$ augmente indéfiniment. Il en est d'ailleurs de même des groupes où figurent les nombres impairs. La série obtenue appartient donc à cette classe particulière de séries divergentes dans lesquelles la somme des $p$ premiers termes reste finie, mais n'a pas de limite déterminée lorsque $p$ augmente indéfiniment suivant une loi quelconque.

## SUR LE THÉORÈME DE LA MOYENNE;

PAR M. MAURICE HAMY.

Les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant $n$ quantités positives, on sait que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Cette proposition, que l'on utilise fréquemment en Analyse, peut être complétée comme il suit :

Soit $a_1 a_2 \ldots a_p$ le produit des $p$ lettres qui constituent l'une quelconque des $C_{n,p}$ combinaisons $p$ à $p$ des $n$ lettres considérées. On a

$$\frac{\Sigma_q \sqrt[q]{a_1 \ldots a_q}}{C_{n,q}} > \frac{\Sigma_{q+1} \sqrt[q+1]{a_1 \ldots a_{q+1}}}{C_{n,q+1}};$$

la somme $\Sigma_q$ étant étendue à toutes les combinaisons de degré $q$ et la somme $\Sigma_{q+1}$ à toutes celles de degré $q+1$.

L'inégalité à démontrer revient à la suivante :

$$\Sigma_{q+1} \sqrt[q+1]{a_1 \ldots a_{q+1}} < \frac{n-q}{q+1} \Sigma_q \sqrt[q]{a_1 \ldots a_q}.$$

Considérons l'un quelconque des éléments qui composent la somme $\Sigma_{q+1}$, par exemple $\sqrt[q+1]{a_1 \ldots a_{q+1}}$. On peut, avec les $q+1$ lettres placées sous le radical, former $q+1$ combinaisons différentes de degré $q$ et, par raison de symétrie, chacune des lettres entre $q$ fois dans le tableau de ces combinaisons. Cette remarque permet d'écrire identiquement

$$a_1 \ldots a_{q+1} = \sqrt[q]{a_1 \ldots a_p} \sqrt[q]{\ldots} \sqrt[q]{\ldots} \ldots \sqrt[q]{\ldots},$$

le nombre des radicaux étant $q+1$, et chaque radical contenant une combinaison différente de degré $q$ des $q+1$ lettres.

Le théorème de la moyenne appliqué à cette identité donne

$$\sqrt[q+1]{a_1 \ldots a_{q+1}} < \frac{\sqrt[q]{a_1 \ldots a_p} + \sqrt[q]{\ldots} + \ldots + \sqrt[q]{\ldots}}{q+1}.$$

Chaque élément de la somme $\Sigma_{q+1}$ conduit à une inégalité semblable. On voit ainsi que $\Sigma_{q+1}$ est moindre qu'une somme de

$(q+1)C_{n,q+1}$ terme de la forme $\frac{\sqrt[u]{a_1\ldots a_q}}{q+1}$. Ces termes dépendent chacun d'une combinaison de degré $q$ des $n$ lettres considérées et, par raison de symétrie, toutes les combinaisons de degré $q$ entrent le même nombre de fois dans la somme, savoir

$$\frac{(q+1)C_{n,q+1}}{C_{n,q}}\text{ fois} = n - q \text{ fois.}$$

Il résulte évidemment de là que

$$\Sigma_{q+1}\sqrt[q+1]{a_1\ldots a_{q+1}} < \frac{n-q}{q+1}\Sigma_q\sqrt[q]{a_1\ldots a_q},$$

ce qui est précisément l'inégalité à laquelle il fallait arriver.

1re Partie.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ROUCHÉ (E). — Éléments de Statique graphique. 1 vol in-8°; xvi-284 p. Paris, Baudry et Cie, 1889.

Le talent didactique de M. Rouché est connu et apprécié de tous : ceux qui pensent que la Statique graphique pourrait, avec avantage, pénétrer un peu plus dans notre enseignement ne pourront que lire avec plaisir et recommander volontiers le Livre qu'il vient de publier sur ce sujet. Ce Livre résume deux Cours que M. Rouché a faits en 1874 et en 1886, au Conservatoire des Arts et Métiers : conçu dans de moins vastes proportions et dans un esprit beaucoup plus élémentaire que le savant Ouvrage de M. Maurice Lévy, il rendra les plus grands services au point de vue de l'enseignement, en raison de l'ordre et de la clarté qui y règnent.

Nous énumérons rapidement, dans ce qui suit, les matières que l'auteur a traitées.

Après quelques définitions et quelques lemmes, il définit et étudie géométriquement le polygone funiculaire; il montre comment ce polygone permet d'opérer la réduction de forces, situées dans un même plan, appliquées à un corps rigide, et d'exprimer graphiquement les conditions d'équilibre, de déterminer suivant les cas la résultante ou le couple résultant; comment enfin la notion et les propriétés essentielles du polygone funiculaire résulteraient des premiers principes de la Statique ordinaire. Il traite ensuite de ce problème : Étant donné un système de $n$ forces situées dans un même plan et appliquées à un corps rigide, on demande de leur faire équilibre à l'aide de $m$ forces situées dans le même plan et ayant des lignes d'action données; la solution de ce problème permet de déterminer les conditions d'équilibre des corps gênés et de déterminer les réactions des obstacles quand on a affaire à des solides symétriques par rapport à un plan dans lequel sont situées toutes les forces directement appliquées.

La notion de polygone funiculaire engendre celle des *courbes funiculaires d'un système de forces réparties;* les intéressantes propriétés de ces courbes se déduisent facilement des propriétés

des polygones. Une belle application de cette notion se rencontre dans la proposition qui ramène la recherche de la *ligne élastique* relative à une poutre droite ayant un plan de symétrie à la recherche d'une courbe funiculaire pour un système de forces fictives à répartition très simple.

Si une poutre droite, dont AB est la fibre moyenne, repose par ses extrémités A et B sur deux appuis de niveau, et est soumise à des forces verticales fixes situées, comme les points d'appui, dans le plan de symétrie, les tensions ou compressions disparaissent : M. Rouché montre comment on peut déterminer graphiquement les valeurs que prennent, dans les diverses sections transversales de la poutre, le *moment fléchissant* et l'*effort tranchant,* que les charges soient d'ailleurs isolées ou continues. Si la poutre est soumise à l'action de charges verticales mobiles, mais à distances mutuelles invariables, il est utile de déterminer, pour chaque point de la poutre, le maximum des moments fléchissants et des efforts tranchants qui se développent lorsque le *train* formé par ce système de charges se déplace le long de la poutre. M. Rouché reproduit l'élégante solution que M. G. Leman a donnée de ce problème ([1]).

Il passe ensuite à la détermination des forces intérieures dans un système articulé plan, pour lequel les forces extérieures sont toutes appliquées aux points d'articulation. On sait que ce problème est susceptible de diverses solutions : l'une des méthodes conduit à la belle notion géométrique des figures réciproques de Statique graphique, sur laquelle M. Rouché se borne d'ailleurs aux indications essentielles.

L'Ouvrage se termine par deux Chapitres sur la *poutre continue,* c'est-à-dire admettant plus de deux appuis, ou, si l'on veut, composée de plusieurs travées. La poutre est supposée droite, et l'on examine d'abord le cas où les appuis sont de niveau. En admettant que les points d'appui et les charges verticales soient contenus dans le plan de symétrie, on a à déterminer les moments fléchissants, les efforts tranchants et les réactions. Il reste à étudier les *charges défavorables,* c'est-à-dire les combinaisons

([1]) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* 2e série, t. IX.

qui donnent, dans les différentes sections de la poutre, des moments fléchissants, ou des efforts tranchants, maxima.

J. T.

---

# MÉLANGES.

## SUR L'INVERSION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE ET L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE SES PÉRIODES;

Par M. Émile PICARD.

Je voudrais faire ici deux remarques, l'une relative à l'inversion de l'intégrale elliptique, l'autre se rapportant à l'irréductibilité de ses périodes, telles que je les donne à la Sorbonne dans mon Cours, depuis plusieurs années.

1. On peut démontrer de plusieurs manières que l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce conduit à une fonction uniforme. La méthode où l'on fait usage de la formule d'addition pour étendre successivement la fonction est peut-être la plus ancienne; on peut l'employer aussi pour les fonctions abéliennes, et c'est elle qu'indique à ce sujet M. Weierstrass dans son grand Mémoire du *Journal de Crelle* (t. 47). Cette façon de procéder est parfaite et doit satisfaire les plus exigeants; il n'en est pas tout à fait de même d'une autre démonstration, souvent employée, et qui prend comme point de départ le théorème fondamental relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles. Elle est suivie, par exemple, dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet. Partons de l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ désignent quatre constantes distinctes. On établit que, quand la variable $z$ arrive dans le voisinage de l'un des points où $u$ acquiert l'une des valeurs $a$, $b$, $c$, $d$, la fonction $u$ reste une fonction holomorphe de $z$; pareillement, quand $z$ arrive dans le voisinage d'un point où $u$ devient infinie, la fonction $u$ reste une

fonction uniforme de $z$. Sans plus d'explications, on en conclut que $u$ est une fonction uniforme dans tout le plan de la variable complexe $z$. Une telle manière de raisonner pourrait conduire, pour d'autres équations, à des résultats inexacts. Quelques mots d'explication seront ici suffisants pour rendre la démonstration rigoureuse, mais il est indispensable de les dire.

Nous allons montrer que, d'un point arbitraire $z_0$ comme centre, on peut toujours décrire un cercle d'*un rayon fixe* $\rho$, tel qu'à l'intérieur de ce cercle l'intégrale $u$ soit uniforme. Ceci étant prouvé, il est manifeste que l'extension de la fonction pourra se faire de proche en proche à l'aide d'un cercle de rayon *invariable;* la fonction pourra donc s'étendre dans tout le plan, et ne cessera pas d'être uniforme.

Pour démontrer l'existence de ce nombre $\rho$, considérons le plan de la quantité complexe $u$. Traçons autour des points $a$, $b$, $c$, $d$ des cercles C de rayons suffisamment petits, qui vont rester fixes, et de l'origine comme centre décrivons un cercle $\Gamma$ d'un rayon assez grand, qui, lui aussi, restera invariable. Tant que $u$ est intérieur à $\Gamma$ et extérieur aux cercles C, on a un rayon de convergence déterminé par le développement de l'intégrale de l'équation (1). Ce rayon de convergence a, quand $u$ varie dans la région indiquée, un certain minimum différent de zéro. Supposons maintenant que $u$ soit dans un cercle C, on posera $u = a + u'^2$, et l'on a, comme on sait, une équation en $u'$, à laquelle on peut appliquer le théorème fondamental. Tant que $u'$ restera dans un certain cercle C', transformé de C, le rayon de convergence de la série donnant $u'$ restera encore supérieur à une certaine limite. Nous avons donc notre minimum $\rho$, tant que $u$ reste dans le cercle $\Gamma$. Si $u$ est extérieur à ce cercle, on posera $u = \frac{1}{v}$, et nous aurons l'équation

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = (1 - av)(1 - bv)(1 - cv)(1 - dv);$$

$v$ restera compris à l'intérieur d'un cercle $\Gamma'$, transformé de $\Gamma$. Quand $v$ reste dans le cercle $\Gamma'$, on a un certain rayon de convergence pour l'intégrale $v$, et ce rayon a un minimum différent de zéro. Nous avons donc, en résumé, en prenant le plus petit des différents minima trouvés, un rayon $\rho$ tel que l'intégrale $u$, qui

prend en un point arbitraire $z_0$ une valeur *arbitraire,* finie ou infinie, est certainement définie et uniforme à l'intérieur du cercle ayant $z_0$ pour centre et un rayon égal à $\rho$. *La démonstration est donc complétée.*

2. Après avoir établi que l'inversion de l'intégrale elliptique donne une fonction uniforme dans tout le plan, on démontre que cette fonction a deux périodes. Il est intéressant de démontrer, en toute rigueur, que ces deux périodes ne peuvent se réduire à une seule, quand les quatre constantes $a$, $b$, $c$, $d$ sont distinctes. On sait comment on peut y parvenir; la méthode que Riemann emploie pour établir des inégalités importantes relatives aux périodes des intégrales abéliennes peut être employée ici, et donne le résultat cherché. Dans son Cours, M. Hermite rattache la démonstration à la considération d'une certaine intégrale double. On peut encore employer le raisonnement suivant, qui n'exige aucun calcul. Supposons que l'intégrale

$$U = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}}$$

ait *une seule* période $\omega$ (cas auquel on sera nécessairement ramené si le rapport des deux périodes n'est pas imaginaire). Pour une valeur de $u$, U aura deux valeurs

$$U \quad \text{et} \quad A - U,$$

abstraction faite de multiples de $\omega$, A désignant une constante. Si donc on envisage la fonction

$$e^{\frac{2\pi i U}{\omega}} + e^{\frac{2\pi i (A-U)}{\omega}},$$

ce sera une fonction uniforme de $u$. De plus, elle reste finie pour toute valeur finie ou infinie de $u$; elle se réduit donc à une constante, résultat absurde, car $e^{\frac{2\pi i U}{\omega}}$ devrait alors être indépendant de $u$. *L'irréductibilité des deux périodes est donc établie.*

Il est à peine nécessaire de s'arrêter sur l'hypothèse où U n'aurait pas de période; U aurait, pour chaque valeur de $u$, deux valeurs

$$U \quad \text{et} \quad A - U,$$

(A étant toujours une constante).

Le produit $U(A-U)$ serait donc une fonction uniforme de $u$, restant finie pour toute valeur finie ou infinie de $u$, et, par suite, devrait se réduire à une constante. U serait donc indépendant de $u$, ce qui est absurde.

---

## CALCUL DES TRANSCENDANTES DE BESSEL

$$J_n(a) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

## POUR LES GRANDES VALEURS DE $a$, AU MOYEN DE SÉRIES SEMI-CONVERGENTES;

Par M. O. CALLANDREAU.

M. Stieltjes a étudié le cas de $n=0$ dans sa thèse de Doctorat (*Recherches sur quelques séries semi-convergentes*. Paris, 1886). J'ai observé qu'avec une légère extension l'analyse de M. Stieltjes s'applique au cas de $n$ différent de zéro.

Cette recherche a été amenée par une question de M. Tisserand concernant le calcul des inégalités d'ordre élevé dans le mouvement des comètes.

**1.** L'expression de $J_n(a)$, sous forme d'intégrale, peut s'écrire (Tisserand, *Mécanique céleste*, p. 214)

$$J_n(a) = \frac{a^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(a\cos\psi)\sin^{2n}\psi\,d\psi$$

ou, en changeant de variable et posant $\cos\psi = x$,

$$J_n(a) = \frac{a^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos ax\,dx;$$

l'intégrale du second membre est le double de la partie réelle de $\int_0^1 e^{iax}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx$ qui peut être transformée de la manière suivante par les procédés de Cauchy.

Considérons, avec M. Stieltjes, l'intégrale

$$\int (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{iaz}\,dz \qquad (a>0),$$

prise le long du contour rectangulaire OABCDO, de base $OA=1$,

duquel on a exclu le point critique $z = +1$ en limitant le contour à un arc AB de circonférence décrite du point $z = +1$ comme centre OABCDO : l'intégrale sera nulle puisque les points critiques sont exclus de l'aire; on aura, en indiquant chacune des parties de l'intégrale par le chemin correspondant,

$$(OA) + (AB) + (BC) + (CD) + (DO) = 0.$$

L'intégrale (AB) tend vers zéro avec le rayon de la circonférence AB décrite du point $+1$ comme centre; (CD) tend vers zéro quand la parallèle CD s'éloigne à l'infini; (DO) est purement imaginaire.

On aura, en conséquence, à la limite,

$$\text{Partie réelle de } (OA) = -\text{ Partie réelle de } (BC).$$

Pour le segment BC, on doit faire $z = 1 + iv$ ($v$ positif); on doit prendre ensuite

$$\sqrt{1 - z^2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} v^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 + iv};$$

d'où

$$-(BC) = -ie^{i\left[a-(2n-1)\frac{\pi}{4}\right]} \int_0^\infty e^{-av} v^{n-\frac{1}{2}} (2 + iv)^{n-\frac{1}{2}} dv.$$

Si l'on remplace $av$ par $u$ dans l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}
J_n(a) = {} & \frac{a^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \times \frac{1}{\pi} \frac{2^{n-\frac{1}{2}}}{a^{n+\frac{1}{2}}} \\
& \times \Bigg( \left\{ \cos\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \right. \\
& \qquad \left. + i \sin\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \right\} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \\
& \quad + \left\{ \cos\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \right. \\
& \qquad \left. - i \sin\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \right\} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_n(a) = {} & \frac{2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2a}} \\
& \times \left\{ \cos\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right] du \right. \\
& \quad \left. + i \sin\left[a - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right] \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{iu}{2a}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right] du \right\}
\end{aligned}$$

Soient $2A$ et $2B_i$ les intégrales qui figurent dans l'expression de $J_n(a)$. Si l'on développe les binômes sous le signe $\int$ suivant les puissances de $\frac{u}{2a}$, et si l'on a égard à l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{q-1}\, du = \Gamma(q),$$

on obtient ces deux développements en séries semi-convergentes :

$$A = \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) - \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.2} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{(2a)^2} + \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})(n-\frac{7}{2})}{1.2.3.4} \frac{\Gamma(n+\frac{9}{2})}{(2a)^4} - \ldots,$$

$$B = \frac{n-\frac{1}{2}}{1} \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{2a} - \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})}{1.2.3} \frac{\Gamma(n+\frac{7}{2})}{(2a)^3} + \ldots.$$

2. Considérons la première série et cherchons l'expression du reste. En observant que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1-\frac{iu}{2a}\sin^2 v} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{iu}{2a}}},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{1+\frac{iu}{2a}\sin^2 v} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{iu}{2a}}},$$

il vient

$$2A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\left(1+\frac{iu}{2a}\right)^n}{1+\frac{iu}{2a}\sin^2 v} + \frac{\left(1-\frac{iu}{2a}\right)^n}{1-\frac{iu}{2a}\sin^2 v} \right] du.$$

Soient, pour abréger l'écriture, $N_0$, $N_1$, $N_2$, ... les coefficients du binôme pour la puissance $n$, $\frac{u}{2a} = \alpha$, $s = \sin^2 v$; l'expression entre crochets peut s'écrire, en développant les binômes,

$$2\left[\frac{N_0}{1+s^2\alpha^2} - \frac{N_2\alpha^2}{1+s^2\alpha^2} + \frac{N_4\alpha^4}{1+s^2\alpha^2} - \ldots + \frac{N_1 s\alpha^2}{1+s^2\alpha^2} - \frac{N_3 s\alpha^4}{1+s^2\alpha^2} + \ldots\right];$$

on a ensuite

$$\frac{1}{1+s^2\alpha^2} = 1 - s^2\alpha^2 + s^4\alpha^4 - \ldots \pm s^{2p-2}\alpha^{2p-2} \mp \frac{s^{2p}\alpha^{2p}}{1+s^2\alpha^2},$$

$$-\frac{\alpha^2}{1+s^2\alpha^2} = \quad -\alpha^2 \quad + s^2\alpha^4 - \ldots \pm s^{2p-4}\alpha^{2p-2} \mp \frac{s^{2p-2}\alpha^{2p}}{1+s^2\alpha^2},$$

$$+\frac{\alpha^4}{1+s^2\alpha^2} = \ldots\ldots\ldots + \alpha^4 - \ldots \pm s^{2p-6}\alpha^{2p-2} \mp \frac{s^{2p-4}\alpha^{2p}}{1+s^2\alpha^2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

D'après cela, l'expression entre crochets donne, pour les coefficients de $\alpha^{2p-2}$ et de $\frac{\alpha^{2p}}{1+s^2\alpha^2}$ $(2p \geqq n+2)$,

$$\pm(N_0 s^{2p-2} - N_1 s^{2p-3} + N_2 s^{2p-4} - N_3 s^{2p-5} \ldots),$$
$$\mp(N_0 s^{2p} \quad - N_1 s^{2p-1} + N_2 s^{2p-2} - N_3 s^{2p-3} \ldots),$$

quantités de signes contraires; la seconde peut s'écrire

$$\mp(-1)^n s^{2p-n}(1-s)^n;$$

elle ne peut pas changer de signe dans les limites de l'intégration.

On conclut de là, en revenant à l'expression de A sous forme d'intégrale double,

$$A = T_0 + \ldots \pm T_{p-1} \mp R_{p-1},$$

et de même

$$A = T_0 + \ldots \pm T_{p-1} \mp T_p \pm R_p,$$

les quantités T et R étant positives; ensuite, de la relation

$$R_{p-1} + R_p = T_p,$$

il résulte que le reste est inférieur en valeur absolue au terme auquel on s'arrête et de signe contraire à ce terme.

C'est le résultat que nous avions en vue. La même chose a lieu pour la série B.

Les séries A et B peuvent donc être utilisées pour le calcul numérique de la même manière que la série de Stirling.

3. Il y a lieu de chercher le rang du plus petit terme dans les séries A et B. On trouve qu'il est le même que dans l'exemple traité par M. Stieltjes.

Calculons, pour la série A par exemple, la valeur approchée

du terme en $\frac{1}{a^{2i}}$ qui s'écrit

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(n+\frac{2i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{2i-1}{2}\right)}\frac{1}{1.2\ldots i}\frac{1}{(2a)^{2i}}.$$

On a, en laissant de côté le premier facteur commun à tous les termes,

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{2i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{2i-1}{2}\right)}=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+i)}{\Gamma(n+\frac{1}{2}-i)}$$
$$=\frac{\sin(n+\frac{1}{2}-i)\pi}{\pi}\Gamma(n+\tfrac{1}{2}+i)\,\Gamma(-n+\tfrac{1}{2}+i),$$

à cause de la relation connue

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Ensuite, la formule approchée

$$\Gamma(i+\alpha)=\sqrt{2\pi}e^{-i}i^{i+\alpha-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varepsilon}{i}\right),$$

qui donne la valeur de la fonction $\Gamma(i+\alpha)$ pour $i$ très grand et $\alpha$ fini, montre que la partie principale du terme considéré est indépendante de $n$ et, par suite, la même que pour $n=0$, cas traité par M. Stieltjes.

Or M. Stieltjes a trouvé que le rang du plus petit terme est à peu près égal à $a$.

---

## SUR LA MULTIPLICATION DES SÉRIES;

PAR M. E. CESÀRO.

On sait que, si les séries

(1) $$u_1+u_2+u_3+\ldots,\quad v_1+v_2+v_3+\ldots$$

sont convergentes, de même que la série dont le terme général est

(2) $$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1,$$

on peut écrire

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots).$$

On démontre ordinairement ce théorème, d'après Abel, en s'appuyant sur les propriétés des séries de puissances, alors qu'il est extrêmement facile de le démontrer directement, par un procédé analogue à celui qui a été employé par M. Jensen pour démontrer le théorème de Cauchy et Martens sur la multiplication des séries. Il faut, pour cela, s'appuyer sur le théorème suivant, souvent utile :

*Si, pour $n$ croissant à l'infini, $a_n$ et $b_n$ tendent respectivement vers $a$ et $b$, on a*

$$(3) \qquad \lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = ab.$$

Soit $\nu$ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{2}$, de sorte que

$$\lim \frac{\nu}{n} = \lim \frac{n-\nu}{n} = \frac{1}{2}.$$

On peut prendre $n$ suffisamment grand pour que la valeur absolue de $b_r - b$ soit inférieure au nombre positif $\varepsilon$, arbitrairement petit, dès que $r$ surpasse $n - \nu$. Dès lors, l'expression

$$a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \ldots + a_\nu(b_{n-\nu+1} - b)$$

devient inférieure, en valeur absolue, au produit de $\varepsilon$ par

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_\nu|.$$

On sait d'ailleurs, par un théorème de Cauchy, cas particulier de celui que nous sommes en train de démontrer, que

$$\lim \frac{1}{n} \sum_1^n a_i = a, \qquad \lim \frac{1}{n} \sum_1^n |a_i| = |a|.$$

Conséquemment,

$$\lim \frac{1}{n}[a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \ldots + a_\nu(b_{n-\nu+1} - b)] = 0,$$

d'où

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_\nu b_{n-\nu+1}) = \tfrac{1}{2} ab.$$

De même,

$$\lim \frac{1}{n}(a_{\nu+1}b_{n-\nu} + a_{\nu+2}b_{n-\nu-1} + \ldots + a_n b_1) = \tfrac{1}{2}ab.$$

On obtient (3) par addition des deux dernières égalités.

Cela posé, la somme des $n$ premiers termes de la série, qui a (2) pour terme général, est

$$(4) \qquad W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \ldots + u_n V_1,$$

$U_n$ et $V_n$ étant les sommes des $n$ premiers termes des séries (1). Il en résulte

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \ldots + U_n V_1;$$

puis, en appliquant le théorème (3),

$$(5) \qquad \lim \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \ldots + W_n) = UV.$$

Le théorème de Cauchy, cité plus haut, permet d'affirmer que, si la limite W de $W_n$ existe, elle ne peut différer du premier membre de (5). Donc $W = UV$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On sait, du reste, que la série $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$ est convergente si une, au moins, des séries (1) est absolument convergente. Lorsque les deux séries sont simplement convergentes, et seulement dans ce cas, il peut arriver que la multiplication, effectuée par la règle ordinaire, ne fournisse pas une série convergente; mais l'égalité (5) montre encore que la série obtenue ne peut être divergente. Il faut néanmoins montrer la possibilité de construire des séries simplement convergentes, dont la multiplication produit une série indéterminée. On y parvient sans peine en considérant les séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots, \qquad \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \ldots,$$

évidemment douées de la simple convergence. Ici

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$$

et, par suite,

$$w_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{2\log n} + \ldots + \frac{1}{n\log 2}\right],$$

d'où

$$|w_n| > \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\log(n+1)}.$$

D'ailleurs, en vertu du théorème de Cauchy, cité précédemment,

$$\lim \frac{\log(n+1)}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = \lim n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log e.$$

Donc $w_n$ ne peut tendre vers zéro, et, par suite, la série

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

n'est pas convergente. Il est cependant facile de se convaincre que $w_n$ admet toujours une valeur moyenne, et que cette valeur est *zéro*. En effet, l'application du théorème (3) à la relation (4) montre immédiatement que

$$\lim \frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) = \mathrm{V} \lim u_n = 0.$$

On généralise aisément la proposition (3) comme il suit :

*Si, pour n croissant à l'infini, on a*

$$\lim \frac{a_n}{n^{r-1}} = a, \qquad \lim \frac{b_n}{n^{s-1}} = b,$$

*on a aussi*

$$(6) \qquad \lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n^{r+s-1}} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} ab.$$

En partant de là, on étend sans peine le théorème d'Abel au cas, plus général, où les sommes des $n$ premiers termes des trois séries admettent des valeurs moyennes. Soient U, V, W ces valeurs. Nous allons démontrer que $\mathrm{W} = \mathrm{UV}$. Remarquons d'abord que, pour $r = s = 2$, l'égalité (6) devient

$$(7) \qquad \lim \frac{1}{n^3}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = \frac{1}{6} \lim \frac{a_n}{n} \lim \frac{b_n}{n}.$$

Cela étant, faisons

$$a_n = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{U}_n, \qquad b_n = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \ldots + \mathrm{V}_n.$$

de sorte que

$$\lim \frac{a_n}{n} = \mathrm{U}, \qquad \lim \frac{b_n}{n} = \mathrm{V}.$$

On a

$$\begin{aligned} a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 + \ldots + \mathrm{W}_n) \\ -(n+\tfrac{3}{2})(\mathrm{W}_1 + 2\mathrm{W}_2 + \ldots + n\mathrm{W}_n) \\ + \tfrac{1}{2}(\mathrm{W}_1 + 4\mathrm{W}_2 + \ldots + n^2\mathrm{W}_n). \end{aligned}$$

D'ailleurs, l'hypothèse

$$\lim \frac{1}{n}(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 + \ldots + \mathrm{W}_n) = \mathrm{W}$$

entraîne, en vertu d'une proposition connue, généralisation du théorème de Cauchy, les égalités

$$\lim \frac{1}{n^2}(\mathrm{W}_1 + 2\mathrm{W}_2 + \ldots + n\mathrm{W}_n) = \tfrac{1}{2}\mathrm{W},$$

$$\lim \frac{1}{n^3}(\mathrm{W}_1 + 4\mathrm{W}_2 + \ldots + n^2\mathrm{W}_n) = \tfrac{1}{3}\mathrm{W}.$$

Conséquemment,

$$\lim \frac{1}{n^3}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = \tfrac{1}{6}\mathrm{W},$$

puis, par substitution dans (7),

$$\mathrm{W} = \mathrm{UV}.$$

Les séries considérées en dernier lieu sont les plus simples parmi les séries indéterminées; mais il en est d'autres, dont l'indétermination peut être aussi forte qu'on le veut. Lorsque $\mathrm{U}_n$, sans tendre vers une limite, admet une valeur moyenne U, finie et déterminée, nous dirons que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est simplement indéterminée, et nous conviendrons de dire que U est la somme de la série. C'est la théorie de l'espérance mathématique qui conseille de prendre égale à U la somme dont il s'agit, considérée comme une valeur *attendue* dans la recherche de la limite de la succession

$$u_1, \quad u_1 + u_2, \quad u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots.$$

Lorsque $\mathrm{U}_n$ n'admet pas même de valeur moyenne, on est plus généralement conduit à remplacer la recherche de la limite de $\mathrm{U}_n$

par celle de la limite d'autres fonctions $U_n^{(r)}$, définies par l'égalité

$$(8)\quad C_{r+n-1,n-1}U_n^{(r)} = u_n + C_{r+1,1}u_{n-1} + C_{r+2,2}u_{n-2} + \ldots + C_{r+n-1,n-1}u_1.$$

Si, parmi les fonctions

$$(9)\qquad U_n,\quad U_n^{(1)},\quad U_n^{(2)},\quad U_n^{(3)},\quad \ldots,$$

$U_n^{(r)}$ est la première qui admette une limite U, nous dirons que la série est $r$ fois indéterminée, et que U est sa somme. Il est remarquable que, si un terme de la succession (9) tend vers U, il en est de même de tous ceux qui le suivent. On a, en effet,

$$C_{r+n,n-1}U_n^{(r+1)} = U_1^{(r)} + C_{r+1,1}U_2^{(r)} + C_{r+2,2}U_3^{(r)} + \ldots + C_{r+n-1,n-1}U_n^{(r)},$$

d'où

$$\lim U_n^{(r+1)} = \lim \frac{\sum_1^n C_{r+i-1,i-1}U_i^{(r)}}{\sum_1^n C_{r+i-1,i-1}} = \lim U_n^{(r)},$$

si le second membre existe. Voici d'intéressants exemples de séries $r$ fois indéterminées, dont les sommes s'expriment simplement au moyen des nombres de Bernoulli et d'Euler :

$$1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - 4^{r-1} + \ldots = \frac{2^r - 1}{r}B_r,$$

$$1^{r-1} - 3^{r-1} + 5^{r-1} - 7^{r-1} + \ldots = \tfrac{1}{2}E_{r-1}.$$

Il résulte de là une classification des séries indéterminées, qui est sans doute incomplète et pas assez naturelle, mais qui nous suffit, pour le moment, pour montrer qu'on peut parfaitement bien se servir des séries indéterminées dans les calculs, quoi qu'en pensent la plupart des géomètres. Il est téméraire d'affirmer que les séries non convergentes n'auront jamais d'utilité. Tant que cette assertion restera gratuite, nous serons en droit de rechercher sous quelles conditions on peut soumettre les séries indéterminées aux opérations de l'Analyse. Après tout, n'est-ce pas en vertu d'une convention que les séries convergentes, prises sous leur forme indéfinie, interviennent dans les calculs?

Soient $r$ et $s$ les degrés d'indétermination des séries (1). Si l'on

prend

$$a_n = \sum_1^n C_{r+i-1,i-1} u_{n-i+1}, \qquad b_n = \sum_1^n C_{r+i-1,i-1} v_{n-i+1},$$

on a, d'après (8),

$$\lim \frac{a_n}{n^r} = \frac{U}{r!}, \qquad \lim \frac{b_n}{n^s} = \frac{V}{s!}.$$

D'ailleurs, en ayant égard à l'identité

$$C_{s+\nu,s} + C_{r+1,r} C_{s+\nu-1,s} + C_{r+2,r} C_{s+\nu-2,s} + \ldots = C_{r+s+\nu+1,r+s+1},$$

on trouve aisément

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 = C_{r+s+n,n-1} W_n^{(r+s+1)},$$

puis

$$\lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n^{r+s+1}} = \frac{W}{(r+s+1)!}.$$

Donc, en vertu de (6), $W = UV$. On voit, en outre, que *la série obtenue en multipliant une série $r$ fois indéterminée par une série $s$ fois indéterminée n'est pas plus de $r+s+1$ fois indéterminée.* C'est pourquoi le produit de deux séries convergentes est simplement indéterminé, s'il n'est pas convergent; le produit d'une série convergente par une série simplement indéterminée est une ou deux fois indéterminé, ou bien convergent, etc.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. LEJEUNE-DIRICHLET'S WERKE. — HERAUSGEGEBEN AUS VERANLASSUNG DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN VON L. KRONECKER. Erster Band, mit G. Lejeune-Dirichlet's Bildniss. In-4°, x-644 p. Berlin, Reimer 1889.

Les Œuvres de Lejeune-Dirichlet vont prendre leur place dans la belle et utile Collection que publie l'Académie des Sciences de Berlin; leur publication a été confiée à M. L. Kronecker : c'est dire avec quel soin religieux elle est faite, avec quelle piété pour la Mémoire d'un maître et d'un ami dont M. Kronecker a connu les dernières pensées scientifiques et dont il a, sur des points essentiels, achevé l'œuvre, interrompue par une mort qui frappa Lejeune-Dirichlet, comme elle avait frappé Abel, dans tout l'éclat de son génie. Le premier Volume vient de paraître : l'illustre éditeur aurait voulu y mettre tous les travaux publiés par Dirichlet lui-même; mais il a dû se résigner à n'y placer, sauf une exception, que les écrits antérieurs à 1843. Est-il besoin de dire combien tous les mathématiciens seront heureux de trouver réunis ces admirables Mémoires d'Arithmétique et d'Analyse, qu'ils liront et reliront toujours, où la pensée est si sûre et si pénétrante, l'exposition si parfaite, et qui laissent voir chez Lejeune-Dirichlet un artiste aussi merveilleux que le géomètre était profond? J. T.

---

ZAREMBA. — SUR UN PROBLÈME CONCERNANT L'ÉTAT CALORIFIQUE D'UN CORPS SOLIDE, HOMOGÈNE, INDÉFINI. Thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, le 30 novembre 1889.

L'objet du travail de M. Zaremba est le problème suivant, proposé par l'Académie des Sciences de Paris en 1858 :

*Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide, homogène, indéfini, pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, reste isotherme après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse*

*s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes.*

Ce problème, dont le cas particulier, le plus important au fond, a déjà été traité par M. Bertrand (*Journal de Liouville*, t. XIV, 1re série), offrait encore de l'intérêt, à cause d'un Mémoire de Riemann, relatif à la même question et qui ne contient qu'une esquisse rapide de la marche suivie par l'illustre auteur avec les résultats définitifs qu'il obtient et qu'il paraît considérer comme complets.

Il y avait donc lieu de vérifier la généralité des résultats de Riemann, et c'est en cela que consiste le but principal du travail analysé.

M. Zaremba, avant d'aborder l'objet principal qu'il avait en vue, communique d'abord une solution entièrement nouvelle du problème qui consiste à déterminer tous les cas où la température d'un point d'un corps solide, homogène, indéfini, peut être exprimée en fonction du temps et d'une seule autre variable indépendante. La méthode de l'auteur exige un calcul un peu long et pénible; mais, étant purement analytique, elle reste encore applicable là où celles de MM. Bertrand (Mémoire cité) et Weber (Note au Mémoire de Riemann, *Riemann's Werke*, p. 391) cessent de l'être. Cette circonstance permet à l'auteur de déterminer incidemment tous les couples de fonctions $\alpha$ et $\beta$ de trois variables $x$, $y$, $z$, jouissant de la propriété que toute intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = 0$$

en devient aussi une de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

si l'on y remplace $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs, en fonction de $x$, $y$ et $z$ (p. 48 de la Thèse). Ce résultat permet de simplifier dans certains cas la détermination des éléments arbitraires qui entrent dans l'intégrale de l'équation (1).

M. Zaremba considère ensuite les propriétés générales des coefficients de l'équation de propagation de la chaleur en coordonnées arbitraires et il démontre à cette occasion la relation qui existe

entre la transformation des termes du second ordre d'une équation aux dérivées partielles, linéaire et de second ordre, et la transformation d'une forme différentielle quadratique.

La connaissance de cette relation peut quelquefois rendre service dans l'étude des équations aux dérivées partielles, grâce aux travaux de Riemann et de MM. Cristoffel et Lipschitz sur les formes différentielles.

L'auteur est conduit, par la méthode qu'il suit, à distinguer avec Riemann quatre cas particuliers du problème, caractérisés par les valeurs 1, 2, 3, 4 d'un entier $m$. Le cas $m=1$, qui coïncide avec le cas traité par M. Bertrand, l'a aussi été par M. Weber suivant les indications de Riemann. M. Zaremba a donc dû se borner à reproduire ici la Note de M. Weber; pareillement il n'a rien eu à ajouter au cas $m=4$, très facile d'ailleurs et complètement étudié par Riemann. Par conséquent, c'est sur le cas $m=2$ et $m=3$ que les efforts de l'auteur ont dû porter. Il démontre, dans l'étude qu'il en a faite, que les solutions présentées par Riemann ne sont que très particulières, puisqu'il en déduit, dans chacun de ces cas, plusieurs d'une généralité beaucoup plus grande. L'auteur parvient à déterminer la manière dont le temps entre dans toute expression de la température rentrant dans le cas $m=3$; mais il ne réussit pas à déterminer d'une manière générale les équations des isothermes, question qui revient à l'intégration d'un système compliqué d'équations aux dérivées partielles.

---

Ant. FAVARO. — Per la edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei, sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia.

Esposizione e disegno. Firenze, tipografia di G. Barbera, 1888 (57 p. in-4°).

Indice alfabetico e topografico del Commercio epistolare, 1889 (23 p. in-4°).

Un décret du Gouvernement italien, en date du 20 février 1887, a décidé la publication aux frais de l'État d'une nouvelle édition complète des Œuvres de Galilée, et affecté une somme de 100000 lires à cette publication, qui doit comprendre 20 volumes in-4° d'environ 500 pages chacun.

Les importants travaux que, depuis plus de dix ans, M. Antonio Favaro, professeur de l'Université de Padoue, a consacrés à Galilée, le désignaient d'avance pour la direction de cette nouvelle édition ; on lui a adjoint comme collaborateurs, pour les questions mathématiques, MM. Genocchi, Govi et Schiaparelli, pour le soin du texte, M. Isidoro del Lungo. Ces choix montrent assez que rien ne sera négligé en Italie pour assurer un caractère de perfection définitive au monument que l'on se propose d'élever à la gloire de l'immortel savant du XVII^e siècle.

Les deux opuscules dont nous rendons compte aujourd'hui sont à la fois destinés à servir de programme et à provoquer les Communications des savants et des érudits qui peuvent apporter un concours quelconque à la publication entreprise. Dans le premier, M. Favaro commence par raconter l'histoire des éditions successives des Œuvres de Galilée et aussi celle des projets d'édition qui n'ont pas abouti ; il établit que la grande publication d'Alberi (1841-1856) est loin d'être complète, et il en critique les dispositions.

Il expose les principes adoptés pour l'*édition nationale* et donne le plan des 20 volumes, dont les 10 premiers contiendront les Œuvres proprement dites, et les 9 suivants la correspondance, tandis que le dernier sera consacré aux documents relatifs à la vie de Galilée, à la bibliographie et aux index.

Suit une liste de 87 numéros indiquant les Ouvrages ou opuscules où ont été publiés des écrits de Galilée (ou des pièces à insérer en tous cas dans ses Œuvres) non compris dans l'édition d'Alberi. Cette liste peut permettre à quiconque se croirait en mesure de signaler quelque omission de cette édition de vérifier si le nécessaire n'est pas déjà fait pour la réparer.

Le second opuscule de M. Favaro est destiné à faciliter la recherche des pièces inédites de la correspondance de Galilée ; il comprend une liste alphabétique des correspondants connus de Galilée et une seconde liste où ils sont rangés suivant les villes d'où ils ont écrit ou bien où des lettres leur ont été adressées.

Comme Français je relève dans ces listes les noms suivants : Beaugrand (Florence), Gassendi (Aix, Digne, Grenoble, Lyon, Marseille, Paris), Peiresc (Aix), Carcavi (Toulouse et Paris), et pour Paris, Boulliau, Mersenne, J.-B. Morin.

A propos de l'absence du nom de Fermat dans cette liste, je remarque que, dans ses *Cogitata physico-mathematica* de 1644, Mersenne parle expressément d'une certaine démonstration de Fermat, envoyée à Galilée, et relative à la quadrature de l'aire d'une spirale inventée par le géomètre de Toulouse. Si cet envoi avait eu réellement lieu, le fait aurait quelque importance, parce que Torricelli a donné comme sienne l'invention des spirales déjà faite par Fermat. Mais je considère comme certain, et en cela M. Favaro m'a fait connaître qu'il partageait mon opinion, que l'envoi de la démonstration n'a pas été fait par Mersenne. Ce dernier a dû croire qu'elle avait été communiquée à Galilée par Beaugrand, qui s'en était probablement chargé vis-à-vis de Fermat. Toutefois aucune preuve ne subsiste qu'il ait accompli la commission, et l'on doit au moins douter qu'il l'ait faite.

PAUL TANNERY.

---

VELDE (WILHELM). — UEBER EINEN SPECIALFALL DER BEWEGUNG EINES PUNKTES, WELCHER VON ZWEI FESTEN CENTREN ANGEZOGEN WIRD. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Ersten Städtischen Höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern, 1889. Berlin, R. Gärtners Verl. 26 p. in-4°.

Le mouvement d'un point P attiré vers deux centres fixes A et B avec des intensités inversement proportionnelles au carré des distances et en raison directe des masses, a été étudié par Euler pour le cas du mouvement plan (*Mém. de l'Ac. de Berlin,* 1760). Plus tard Lagrange et Legendre ont intégré les équations différentielles du mouvement dans l'espace, et Lagrange découvrit que la recherche de ce mouvement général revient à celle effectuée par Euler dans le plan. En cherchant d'autres forces sous l'action desquelles la solution d'Euler continue à fournir les intégrales, il trouve qu'on pourrait ajouter une force dirigée vers le milieu C de la droite AB et agissant en raison directe de la distance PC. (La réduction aux fonctions thêta de l'intégrale générale du problème a été achevée par M. Königsberger dans sa dissertation *De motu puncti versus duo fixa centra attracti.* Berolini, 1860.)

M. Velde a traité le problème du mouvement plan dans un cas où le nombre des forces sollicitantes a été encore augmenté; il

place en A et B, à côté des masses d'Euler, deux nouvelles masses chacune égale à $m$ et attirant P avec des intensités proportionnelles à la distance; en outre, il retient C comme centre de force. Soient $PA = r_1$, $PB = r_2$, $PC = r_3$, $m_1$ et $m_2$ les masses primitives des points A et B, $m_3$ celle de C, l'unité celle de P. Les forces qui émanent de A, B, C seront donc respectivement

$$(1) \qquad -\frac{m_1}{r_1^2} - m r_1,$$

$$(2) \qquad -\frac{m_2}{r_2^2} - m r_2,$$

$$(3) \qquad -m_3 r_3.$$

La vitesse initiale est dirigée suivant une droite qui rencontre AB.

Pour intégrer les équations différentielles du mouvement, l'auteur remplace d'abord les coordonnées rectangulaires du point P par ses coordonnées elliptiques, et après cela il a recours à la méthode de Jacobi de réduire le problème à l'intégration d'une seule équation différentielle partielle. Le mouvement résultant du point P se trouve être périodique; la trajectoire reste comprise entre deux ellipses confocales que le point mobile vient toucher tour à tour. Par conséquent, il pourra aussi se présenter le cas où les deux ellipses coïncident, c'est-à-dire le mouvement elliptique, cas spécial dont l'auteur a étudié les conditions. La discussion des formules repose sur un Mémoire de M. Weierstrass : *Ueber eine gewisse Gattung reell periodischer Functionen* (*Monatsberichte der Berliner Akademie,* 22 Febr. 1866).

Supposons, en second lieu, que la masse $m_3$ de C soit double de chacune des deux masses $m$ en A et B, et qu'elle agisse en sens opposé à celles-ci, qu'elle soit, pour fixer les idées, répulsive et les deux masses $m$ attractives. Alors la simplification des expressions analytiques que comporte cette hypothèse fera revenir la question aux transcendantes elliptiques, et l'auteur a consacré la seconde moitié de son travail à réduire toutes les formules du problème aux formes normales introduites par M. Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

HAENTZSCHEL (EMIL). — BEITRAG ZUR THEORIE DER FUNCTIONEN DES ELLIPTISCHEN UND DES KREISCYLINDERS. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der dritten Städtischen Höheren Bürgerschule zu Berlin. Ostern, 1889. Berlin, R. Gärtners Verl. 20 p. in-4°.

On sait que la solution de plusieurs problèmes de la Physique mathématique et de la théorie des perturbations dépend de l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 z}{dw^2} = (h^2 \cos^2 w - \nu^2) z.$$

C'est M. Mathieu qui en a fait le premier une étude détaillée en développant $z$ suivant des puissances paires ou impaires de $\cos w$. Depuis, Heine a donné le nom de *fonctions du cylindre elliptique* aux solutions particulières de (1), et, suivant que ces fonctions procèdent suivant les cosinus ou sinus des multiples pairs ou impairs de $w$, il en distingua *quatre classes*. L'idée fondamentale de M. Mathieu fut reprise par M. Lindemann : ce géomètre s'appliqua à développer $z$ en série de puissances, et en profitant de la méthode dont M. Hermite s'est servi pour intégrer les équations différentielles linéaires de second ordre, il découvrit le lien entre les quatre classes de fonctions de Heine.

M. Häntzschel remplace $\cos w$ par

$$(2) \qquad \frac{1}{2mi}\{\beta e^{miw} - \alpha e^{-miw}\} = \sqrt{x},$$

et choisit $x$ pour variable indépendante. Alors on a

$$(3) \qquad 4x(\alpha\beta - m^2 x)\frac{d^2 z}{dx^2} + 2(\alpha\beta - 2m^2 x)\frac{dz}{dx} - (h^2 x - \nu^2) z = 0,$$

équation qui se transforme, pour $\alpha = \beta = m = 1$, en celle qui a formé le point de départ du travail de M. Lindemann ; pour $m = 0$, elle définit les fonctions du cylindre parabolique et, pour $m = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, la transcendante de Fourier-Bessel.

Tandis que les recherches antérieures avaient approfondi les propriétés du développement de la fonction $z$ dans le voisinage des points singuliers ordinaires $x = 0$ et $x = \frac{\alpha\beta}{m^2}$, M. Häntzschel s'attache à l'étudier dans le domaine du point $x = \infty$. Po-

sant $v = x^{-\frac{1}{2}}$, il tire de (3)

$$(4)\qquad v^4(\alpha\beta v^2 - m^2)\frac{d^2 z}{dv^2} + v^3(2\alpha\beta v^2 - m^2)\frac{dz}{dm} + (\nu^2 v^2 - h^2)z = 0.$$

On voit que le point $v = 0$ en est un *point d'indétermination* (Stelle der Unbestimmtheit), selon M. Fuchs, parce que le degré de multiplicité du point singulier surpasse l'ordre de l'équation différentielle, et qu'il est impossible de former une équation fondamentale déterminante. Substituons, pour étudier l'équation,

$$(5)\qquad z = y\sqrt{v}.$$

Il viendra

$$(6)\quad \begin{cases} v^4(\alpha\beta v^2 - m^2)\dfrac{d^2 y}{dv^2} + v^3(3\alpha\beta v^2 - 2m^2)\dfrac{dy}{dv} \\ \qquad + \left[\dfrac{3}{4}\alpha\beta v^4 + \left(\nu^2 - \dfrac{1}{4}m^2\right)v^2 - h^2\right]y = 0. \end{cases}$$

Pour rendre cette équation divisible par $v^2$, il faut prendre

$$(7)\qquad y = e^{\pm\frac{hi}{m}\frac{1}{v}}\varphi,$$

où $\varphi$ désigne une série de puissances dont quatre coefficients consécutifs sont toujours liés par une relation linéaire. Les expressions pour les coefficients se simplifient un peu par la substitution $\varphi = \dfrac{\psi}{\sqrt[4]{\alpha\beta v^2 - m^2}}$; alors $\psi$ satisfera à l'équation

$$(8)\quad \begin{cases} v^2(\alpha\beta v^2 - m^2)^2\dfrac{d^2\psi}{dv^2} + 2\left(v \mp \dfrac{hi}{m}\right)(\alpha\beta v^2 - m^2)\dfrac{d\psi}{dv} \\ \qquad + \left[\dfrac{3}{4}\alpha\beta m^2 v^2 - n(\alpha\beta v^2 - m^2)\right]\psi = 0. \end{cases}$$

Pour le quotient $\eta$ de deux intégrales particulières de (8) on obtient deux expressions distinctes, suivant le signe double dans le second terme : il existe donc deux systèmes fondamentaux différents d'intégrales $z$ pour l'équation proposée (4). En voici un :

$$\overline{z}_1 = \overline{a}\,\frac{\sqrt{v}\,e^{\frac{hi}{m}\frac{1}{v}}}{\sqrt[4]{\alpha\beta v^2 - m^2}}\,\mathfrak{P}(v\,|+h).$$

$$\overline{z}_2 = c\,z_1^{\star} + \overline{\mathfrak{B}}\,z_1\int\frac{dv}{v}\,e^{-\frac{2hi}{m}\frac{1}{v}} - \overline{b}\,\frac{v\sqrt{v}\,e^{-\frac{hi}{m}\frac{1}{v}}}{\sqrt[4]{\alpha\beta v^2 - m^2}}\,\frac{\overline{\mathfrak{B}}\,m}{2hi}\,\overline{\mathfrak{P}}(v\,|+h).$$

On en fait découler l'autre ($z_1^\star$ et $z_2$) en remplaçant $+h$ par $-h$. $\mathfrak{B}$ est une constante susceptible, comme fonction de $h$, de deux valeurs désignées par $\overline{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{B}^\star$ dont l'étude paraît importante pour un cas spécial. Lorsque $\mathfrak{B}$ s'évanouit, $\overline{z_1}$ et $z_1^\star$ se réunissent pour former un seul système fondamental. C'est dans ce cas que l'auteur croit reconnaître quelques rapports de son travail aux recherches de MM. Bruns et Callandreau. Chez ces géomètres, les deux solutions particulières sont pareillement liées par une équation transcendante, analogue à l'équation $\mathfrak{B} = 0$, entre les constantes de l'équation différentielle. Cette équation établit chez eux la condition nécessaire pour la convergence des séries qui entrent dans les intégrales : c'est ce qui arrivera aussi ici, car les séries $\mathfrak{P}(v|h)$ et $\mathfrak{L}(v|h)$ sont évidemment divergentes. On le vérifie par une spécialisation effectuée à la fin du Mémoire.

Pour $\alpha = 0$, $m = 1$, $h = 1$, $z$ devient la transcendante de Fourier-Bessel, à savoir

$$\bar{z}_1 = c'\sqrt{v}\, e^{\frac{i}{v}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{v}{2i}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - \nu^2 \right] \right\},$$

$$z_1^\star = c_1\sqrt{v}\, e^{-\frac{i}{v}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left(\frac{v}{2i}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - \nu^2 \right] \right\}.$$

Ce sont deux séries semi-convergentes qu'on rencontre, pour $\nu = 0$, en premier lieu chez Riemann (*Theorie der Nobilischen Farbenringe*). En formant

$$\frac{c_1 \bar{z}_1 (\sqrt{i})^{(-1)^\nu} - c' z_1^\star (\sqrt{-i})^{(-1)^\nu}}{c_1 c' i \sqrt{2\pi}},$$

on retombe sur la série semi-convergente plus connue de Jacobi pour la fonction bessélienne et qui a été déjà établie, pour $\nu = 0$, par Poisson. En outre, il existe encore les solutions particulières $\overline{z_2}$ et $z_2^\star$. Enfin, après avoir mis en évidence les relations qui existent entre $\overline{z_1}$ et $z_1^\star$ et les développements en série pour $I_\nu(u)$ et $I_{-\nu}(u)$, l'auteur termine son travail en donnant la liste des publications sur son sujet.

Mathieu. — *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XIII, p. 137-203; 1868).

Heine. — *Handbuch der Kugelfunctionen*. Berlin, 1878-81. Bd. I, p. 401-415, Bd. II, p. 202-210.

Lindemann. — *Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders* (*Math. Annalen*, Bd. XXII, p. 117-123; 1883).

Lindstedt. — *Ueber die allgemeine Form der Integrale des Dreikörperproblems* (*Astron. Nachr.*, n° 2503, p. 97-112; 1883).

Bruns. — *Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie* (*Astron. Nachr.*, n° 2533, p. 193-204; 1883; n° 2553, p. 129-132; 1884).

Stieltjes. — *Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle* (*Astron. Nachr.*, n° 2602, p. 145-152; 1884, et n° 2609, p. 261-266; 1884).

Callandreau. — *Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations* (*Astron. Nachr.*, n° 2547, p. 33-38; 1884).

Schubert. — *Ueber die Integration der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial y^2} + k^2 \mathfrak{v} = 0,$$

*für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden*. Inauguraldissertation. Danzig, 1886.

Gylden. — *Die intermediäre Bahn des Mondes* (*Acta math.*, Bd. VII; 1885).

Haentzschel. — *Zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders*. Duisburg, 1886.

Kummer. — *De generali quadam equatione differentiali tertii ordinis*. (Liegnitz, 1834, und *Journ. für Math.*, Bd. C; 1886.)

Fuchs. — *Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können* (*Sitzungsber. der kgl. Ak. der Wissensch.* Berlin, 1886).

Schwarz. — *Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist* (*Journ. für Math.*, Bd. LXXV; 1873).

Kummer. — *Ueber die hypergeometrische Reihe* (*Journ. für Math.*, Bd. XV, p. 138-141; 1835).

Jacobi. — *Versuch einer Berechnung der grossen Ungleichheiten des Saturn nach einer strengen Entwickelung* (*Astron. Nachr.*, Bd. XXVII, p. 94; 1849).

Stieltjes. — *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, n° 568; 1886).

# MÉLANGES.

## SUR LE NOMBRE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Étant donnée une courbe algébrique de degré $m$

$$f(x, y) = 0,$$

que nous pouvons toujours supposer n'avoir que des points doubles à tangentes distinctes, on démontre aisément que toute intégrale de première espèce est de la forme

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$Q(x, y)$ étant un polynôme de degré $m - 3$, tel que la courbe $Q(x, y) = 0$ passe par les points doubles de $f$. Si $d$ représente le nombre de ces points doubles, le nombre des coefficients arbitraires dans Q, et, par suite, le nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes, sera

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - d,$$

que l'on désigne par $p$.

Cette manière de compter établit seulement qu'*il y a au moins $p$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes*. Elle ne peut pas démontrer, si l'on veut être complètement rigoureux, que le nombre de ces intégrales est, dans tous les cas, précisément égal à $p$. Ce résultat est évident, quand on aborde la théorie des intégrales abéliennes en se plaçant au point de vue de Riemann. On peut l'établir en restant au point de vue algébrique, comme le font MM. Brill et Nœther dans leur mémorable Mémoire *Sur les fonctions algébriques* (*Math. Ann.*, t. VII).

On l'établit très aisément, en se servant du théorème d'Abel, comme je vais le faire voir, en suivant la méthode que j'ai employée l'année dernière dans mon Cours à la Faculté des Sciences.

Quand on se borne aux intégrales de première espèce, la démonstration du théorème d'Abel est, pour ainsi dire, immédiate;

en désignant par $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_q, y_q)$ les points de rencontre mobiles de $f$ avec les courbes d'un faisceau dépendant d'un certain nombre de paramètres arbitraires, on aura, pour toute variation de ces paramètres,

$$\frac{Q(x_1, y_1)}{f'_{y_1}} dx_1 + \frac{Q(x_2, y_2)}{f'_{y_2}} dx_2 + \ldots + \frac{Q(x_q, y_q)}{f'_{y_q}} dx_q = 0.$$

Ceci rappelé, supposons qu'il y ait plus de $p$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Je prends sur la courbe $p$ points arbitraires $a_1$, $a_2$, ..., $a_p$; par ces points passe au moins une courbe Q. Celle-ci rencontre $f$ en dehors des points doubles, en $p - 2$ points $b_1$, $b_2$, ..., $b_{p-2}$. Par les points $b$ passe un faisceau F de courbes Q, comprenant en particulier la courbe d'abord considérée. Je vais appliquer le théorème d'Abel aux points de rencontre du faisceau F avec la courbe $f$. Nous aurons, d'une manière générale,

$$\frac{Q_i(x_1, y_1)}{f'_{y_1}} dx_1 + \ldots + \frac{Q_i(x_p, y_p)}{f'_{y_p}} dx_p = 0.$$

Écrivons seulement ces égalités pour $p$ polynômes $Q_i$ linéairement indépendants. L'élimination des différentielles entre ces équations nous conduit à une relation entre $(x_1, y_1)$, ..., $(x_p, y_p)$, qui ne peut d'ailleurs être identiquement vérifiée, car alors les polynômes Q ne seraient pas linéairement indépendants. Mais cette relation entre $x_1$, $x_2$, ..., $x_p$ est impossible, car nous avons pris arbitrairement, au début, un système de points de rencontre, à savoir les points $a$. Cette contradiction démontre qu'*il n'y a pas plus de p intégrales de première espèce linéairement indépendantes.*

## LISTE CHRONOLOGIQUE DES PIÈCES DE LA CORRESPONDANCE DE FERMAT, QUI SERONT PUBLIÉES DANS LES VOLUMES II ET III DE SES ŒUVRES (1).

La signification des lettres désignant les sources est la suivante :

A Manuscrit Arbogast, appartenant au prince Boncompagni;
B Manuscrit Vicq d'Azyr, appartenant au prince Boncompagni;
D Lettres de Descartes, édition de Clerselier. Volume III (1667).
(Les chiffres suivants indiquent les numéros des lettres dans cette édition).

F Varia Opera mathematica D. Petri de Fermat (1679).
(Les chiffres suivants indiquent les pages de cette édition).

H Manuscrits de la Correspondance de Huygens à Leyde (ou l'édition de cette Correspondance, publiée par la Société hollandaise des Sciences);
P Œuvres de Blaise Pascal, édition de la Haye (1779);
W Commercium epistolicum ed. Wallis (1658).

Les autres cotes se rapportent à des manuscrits de la Bibliothèque Nationale à Paris.

| Nos. | LETTRES DE | DATE. | PREMIERS MOTS. | SOURCE. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Fermat à Mersenne. | 26 avril 1636 | Je vous reste beaucoup obligé | AB |
| 2 | *Propositio geostatica.* | ? | Sit centrum Terræ B | F.143 |
| 3 | Fermat à Mersenne. | 3 juin 1636 | J'ai reçu votre lettre | F.121 |
| 4 | Fermat à Mersenne. | 24 juin 1636 | Je suis marri de n'avoir pu | F.122 |
| 5 | *Nova in Mechanicis Theoremata.* | ? | Fundamenta Mechanices | F.142 |
| 6 | Fermat à Mersenne. | 15 juillet 1636 | Puisque j'ai été assez heureux<br>Pour les lieux plans | F.145<br>AB |
| 7 | Fermat à Roberval. | ? | Après vous avoir remercié | F.133 |
| 8 | Et. Pascal et Roberval à Fermat. | 16 août 1636 | Le principe que vous demandez | F.124 |
| 9 | Fermat à E. Pascal et Roberval. | 23 août 1636 | J'ai lu avec grand soin | F.130 |
| 10 | Fermat à Mersenne. | 2 septembre 1636 | La lettre dont vous me parlez | F.123 |
| 11 | Fermat à Roberval. | 16 septembre 1636 | Je me trouvé ces jours passés | F.134 |
| 12 | Fermat à Mersenne (pour Sainte-Croix). | ? | Quamvis id agam | AB |
| 13 | Fermat à Roberval. | 22 septembre 1636 | Je surseoirai avec votre | F.136 |

(1) Le premier Volume des *Œuvres de Fermat*, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, paraîtra dans le courant de l'année et contiendra l'ensemble des écrits latins. La Correspondance sera comprise dans les Volumes suivants. En insérant ici la liste des pièces de cette Correspondance, telle qu'elle a été arrêtée par M. Paul Tannery, nous espérons provoquer des rectifications et des indications complémentaires qui seront accueillies avec reconnaissance. Nous prions d'adresser les Communications à MM. Gauthier-Villars et Fils, à Paris. (*N. de la R.*)

| Nos. | LETTRES DE | DATE. | PREMIERS MOTS. | SOURCE. |
|---|---|---|---|---|
| 14 | Roberval à Fermat. | 11 octobre 1636 | Je vous envoie la démonstration | F.138 |
| 15 | Fermat à Roberval. | 4 novembre 1636 | Me réservant à vous écrire | F.146 |
| 16 | *Objecta contra prop. mech.* | ? | Si vera esset propositio | F.141 |
| 17 | Fermat à Roberval. | 7 décembre 1636 | Après vous avoir assuré | F.147 |
| 18 | Fermat à Roberval. | 16 décembre 1636 | Je viens de recevoir | F.148 |
| 19 | Fermat à Roberval. | mars 1637 | Je trouve assez de loisir | F.151 |
| 20 | Roberval à Fermat. | 4 avril 1637 | Quoique j'eusse reçu dès lundi | F.152 |
| 21 | Fermat à Roberval. | 20 avril 1637 | Je ne pus pas vous écrire | F.153 |
| 22 | Fermat à Mersenne. | 2 novembre? 1637 | Vous me demandez mon jugement | D.37 |
| 23 | Descartes à Mersenne. | 3 décembre 1637 | Vous me mandez qu'un de vos amis | D.39 |
| 24 | Descartes à Mersenne. | 18 janvier 1638 | Je serois bien aise de ne rien dire | D.56 |
| 25 | Fermat à Mersenne. | 25 janvier? 1638 | J'ai vu dans la lettre de M. Descartes | D.40 |
| 26 | Fermat à Mersenne. | 20 avril 1638 | Je vous suis extrêmement obligé<br>Outre le papier envoyé à R. et P. | D.36<br>A |
| 27 | Descartes à Mersenne. | 3 mai 1638 | Il y a déjà quelques jours | D.60 |
| 28 | Fermat à Mersenne. | mai? 1638 | J'ai appris par votre lettre<br>Je serai bien aise de savoir | AB<br>D.67 |
| 29 | Roberval à Fermat. | 1 juin 1638 | Puisqu'il est vrai qu'il n'y a | F.154 |
| 30 | Fermat à Mersenne. | ? | J'avois déjà fait un mot d'écrit | AB |
| 31 | *Méthode des maximis et de minimis.* | ? | La méthode générale | A |
| 32 | Descartes à Fermat. | 27 juillet 1638 | Je n'ai pas eu moins de joie | D.63 |
| 33 | Fermat à Mersenne. | 10 août 1638 | Je ne vous écris à ce coup | AB |
| 34 | Descartes à Fermat. | 25 septembre 1638 | Je sais bien que mon approbation | D.64 |
| 35 | Fermat à Mersenne. | 22 octobre 1638 | Je reprends le style géométrique | AB |
| 36 | Fermat à Mersenne. | 26 décembre 1638 | Pour les nombres je peux | AB |
| 37 | Fermat à Mersenne. | 20 février 1639 | Vous m'avez envoyé 360 | B |
| 38 | Fermat à Mersenne. | 1 avril 1640 | Je vous dois deux réponses<br>Pour la méthode que j'oppose | F.173<br>B |
| 39 | Fermat à Mersenne. | ? | Je trouve plusieurs abrégés | B |
| 40 | Fermat à Mersenne. | ? | J'ai reçu avec une grande satisfaction | F.176 |
| 41 | Roberval à Fermat. | 4 août 1640 | Encore que depuis près de trois ans | F.165 |
| 42 | Fermat à Roberval | ? | Après avoir remercié | F.161 |
| 43 | Fermat à Frenicle (fr.). | ? | Soit par exemple la progression | A |
| 44 | Fermat à Frenicle. | 18 octobre 1640 | Les vacations qui m'ont éloigné | F.162 |
| 45 | Fermat à Mersenne. | 25 décembre 1640 | Je languissois dans l'attente | AB |
| 46 | Fermat à Mersenne. | 26 mars 1641 | Les occupations que les procès | AB |
| 47 | Fermat à Mersenne. | 15 juin 1641 | Je tâche de contenter | AB |
| 48 | Fermat à Frenicle. | 15 juin ? 1641 | La proposition fondamentale | B |
| 49 | Frenicle à Fermat. | 2 août 1641 | J'étois dans l'impatience | F.166 |
| 50 | Frenicle à Fermat. | 6 septembre 1641 | Votre règle pour trouver | F.169 |
| 51 | Fermat à Mersenne. | 10 novembre 1642 | Bien que la colère du refus | AB |
| 52 | Fermat à Mersenne. | 13 janvier 1643 | J'envoyai par le dernier courrier | A |
| 53 | Fermat à Carcavi. | ? | Vous m'obligez toujours | F.178 |

| N°s. | LETTRES DE | DATE. | PREMIERS MOTS. | SOURCE. |
|---|---|---|---|---|
| 54 | Fermat à Mersenne. | ? | Je vous rends mille grâces | AB |
| 55 | Fermat à Mersenne. | 16 février 1643 | Je vous remercie de vos soins | AB |
| 56 | Fermat à Mersenne. | 7 avril 1643 | Vous n'eûtes pas de mes lettres | AB |
| 57 | *Fragment sur les nombres* | ? | Tout nombre impair non carré | A |
| 58 | Fermat à Frenicle (fr.). | 31 mai 1643 | Donner le sixième triangle | B |
| 59 | Fermat à Mersenne. | août? 1643 | Vous m'écrivez que la proposition | AB |
| 60 | Fermat à Mersenne. | 1 septembre 1643 | J'ai vu par la lettre de M. | AB |
| 61 | Fermat à Carcavi. | 1645? | Je suis marri de la perte | F.178 |
| 62 | Fermat à Gassendi. | 1646 | Pronuntiavit Galileus | F.201 |
| 63 | Fermat à Mersenne (fr.). | 4 juin 1648 | Voici la construction | B |
| 64 | Fermat à Séguier. | 9 juin 1648 | Je sais que la vertu | Fr.17388 |
| 65 | Fermat à La Chambre. | 18 août 1648 | Je ne vous ai point entretenu | Fr.17390 |
| 66 | *Mémoire politique.* | » | L'arrêt que le parlement | Fr.17390 |
| 67 | Fermat à Mersenne? | décembre 1648 | Asymmetrias in Algebraïcis | D.83 |
| 68 | Fermat à Carcavi. | 20 août 1650 | Ma lettre par malheur | lat. 11196 |
| 69 | Fermat à Pascal. | 1654 | Si j'entreprends de faire | P |
| 70 | Pascal à Fermat. | 29 juillet 1654 | L'impatience me prend | P.F.179 |
| 71 | Fermat à Carcavi. | 9 août 1654 | J'ai été ravi d'avoir eu | P |
| 72 | Pascal à Fermat. | 24 août 1654 | Je ne pus vous ouvrir | P.F.184 |
| 73 | Fermat à Pascal. | 29 août 1654 | Nos coups fourrés continuent | P |
| 74 | Pascal à Fermat. | 25 septembre 1654 | N'appréhendez pas | P |
| 75 | Pascal à Fermat. | 27 octobre 1654 | Votre dernière lettre | P.F.188 |
| 76 | Fermat à Carcavi. | 1656 | J'ai reçu un très grand | Fr.20945 |
| 77 | Fermat à Carcavi. | juin 1656 | Si A et B jouent avec deux dez. | H |
| 78 | Carcavi à Huygens. | 28 septembre 1656 | Il y a déjà longtemps | H |
| 79 | *Problemata numerica.* | 28 janvier 1657 | Proponatur si placet | W.F.188 |
| 80 | Fermat à Frenicle (fr.). | ? | Tout nombre non carré | W.H |
| 81 | *Problemata numerica.* | ? | Questiones pure arithmeticas | W.F.190 |
| 82 | Fermat à Digby. | 20 avril 1657 | Puisque vous voulez | W.F.189 |
| 83 | Fermat à Digby. | 20 juin 1657 | J'ai reçu votre dernière | W.F.191 |
| 84 | Fermat à Digby. | 15 août 1657 | J'ai reçu avec joie et satisfaction | W.F.191 |
| 85 | *Sur l'arithmétique des infinis.* | ? | En son épitre il déclare | W.F.193 |
| 86 | Fermat à La Chambre. | août 1657 | Je n'avais garde de vous obéir | D.50 |
| 87 | Digby à Fermat. | 5 décembre 1657 | Je me donnai l'honneur | F.196 |
| 88 | Digby à Fermat. | 12 » | Depuis que je me suis donné | F.197 |
| 89 | Digby à Fermat. | 13 février 1658 | Je suis sur le point d'entrer | F.197 |
| 90 | Fermat à Clerselier. | 3-10 mars 1658 | J'ai reçu votre lettre avec | D.43 et 44 |
| 91 | Fermat à Digby. | 7 avril 1658 | J'ai reçu les nouvelles | W |
| 92 | Digby à Fermat. | 15 mai 1658 | Haurai temuto d'infastidire | F.198 |
| 93 | Clerselier à Fermat. | » | Je ne veux pas m'arrêter | D.45 |
| 94 | Rohault à Fermat. | » | Je ne sais si le P. Mersenne | D.46 |
| 95 | Fermat à Clerselier. | 2 juin 1658 | Je suis si passionné | D.47 |
| 96 | Fermat à Digby. | juin 1658 | Illustrissimos viros | W |
| 97 | Fermat à Clerselier. | 16 juin 1658 | Nous laissâmes dernièrement | D.48 |

| Nos. | LETTRES DE | DATE. | PREMIERS MOTS. | SOURCE. |
|---|---|---|---|---|
| 98 | Lalouvère à Fermat. | 21 juillet 1658 | Decem nunc dies sunt | (Dédicace) |
| 99 | Clerselier à Fermat. | 21 août 1658 | Je me trouve aujourd'hui | D.49 |
| 100 | Fermat à Carcavi. | 16 février 1659 | Je suis embarrassé | P |
| 101 | *Découvertes en la science des nombres.* | août 1659 | Et pour ce que les méthodes | H |
| 102 | Fermat à Billy. | 26 août 1659 | Je suis bien aise que mes solutions | lat. 8600 |
| 103 | Fermat à Carcavi (fr.). | septembre 1659 | Si la ligne spirale n'est pas | AH |
| 104 | Fermat à Carcavi (fr.). | » | J'envoyai l'année passée | AH |
| 105 | Fermat à Carcavi (fr.). | février 1660 | On peut considérer les roulettes | H |
| 106 | Fermat à Carcavi (fr.). | juin 1660 | Data quadratura hyperboles | H |
| 107 | Fermat à Pascal. | 25 juillet 1660 | Dès que j'ai su que nous sommes | P |
| 108 | Pascal à Fermat. | 10 août 1660 | Vous êtes le plus galant homme | P.F.200 |
| 109 | Fermat à Huygens. | décembre 1660 | J'ai appris avec joie | H |
| 110 | Fermat à Carcavi (fr.). | 1661 | Soit la courbe de Diocle | H |
| 111 | Fermat à Séguier. | 13 décembre 1661 | J'ai déjà pris la liberté | Fr.17398 |
| 112 | Fermat à La Chambre. | 1 janvier 1662 | Il est juste de vous obéir | D.51 |
| 113 | Clerselier à Fermat. | 6 mai 1662 | Ne croyez pas que ce soit | D.52 |
| 114 | Clerselier à Fermat. | 13 » | C'est par l'ordre de l'assemblée | D.53 |
| 115 | Fermat à Clerselier. | 21 » | Vos deux lettres du 6e et du 13e | D.54 |
| 116 | Fermat à M. de ***. | 1664 | Puisque M. de ... parle | F.156 |
| 117 | *Démonstration.* | » | Soit la droite AFM | F.158 |
| 118 | Saporta à Fermat. | » | Je vous rends ce qui est vôtre | (Dédicace) |

1re Part

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DOEHLER (MAX). — BEITRAG ZUR POTENTIALTHEORIE. Die Green'sche Function für das Rotationsellipsoid, den unendlichen Kreiscylinder und Schalen, die von zwei confocalen Rotationsellipsoiden resp. zwei coaxialen unendlichen Kreiscylindern begrenzt werden. Inauguraldissertation. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Ritterakademie in Brandenburg a/H. Ostern, 1889; 39 pages in-4°.

Dans l'introduction de deux pages, l'auteur rappelle rapidement les idées qui ont présidé à l'introduction de la fonction de Green.

La première Partie a pour but la formation de cette fonction pour l'ellipsoïde de rotation. A cet effet, l'auteur commence par transformer l'équation

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

en coordonnées elliptiques polaires $r$, $u$, $v$ de l'espace. En abordant alors le problème de la solution de cette équation, il adopte le procédé employé par M. Heine dans son *Handbuch der Kugelfunctionen* et obtient ainsi

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} X_n,$$

$$\begin{aligned} X_n = & \sum_{m=0}^{m=n} (\alpha_m \cos mv + \beta_m \sin mv) P_m^n(\cos u)\, P_m^n\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) \\ & + \sum_{m=0}^{m=n} (\alpha'_m \cos mv + \beta'_m \sin mv) P_m^n(\cos u)\, Q_m^n\left(\sqrt{1-\rho^2}\right), \end{aligned}$$

$P_m^n$ et $Q_m^n$ dénotant des fonctions sphériques, $\rho = \frac{r}{e}$, $e =$ excentricité numérique. Désignons de plus par R la distance de deux points dont l'un appartient à la surface de l'ellipsoïde et l'autre est un point extérieur ou intérieur. Le développement de $\frac{1}{R}$ en fonctions sphériques fournit

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{i}{e} & \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m h_m \\ & \times P_m^n(\cos u)\, P_m^n(\cos u_1)\, P_m^n\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) P_m^n\left(\sqrt{1-\rho_1^2}\right) \cos m(v_1 - v). \end{aligned}$$

Les deux formules sont applicables aux ellipsoïdes aplati et allongé, pourvu qu'on prenne pour l'ellipsoïde allongé, au lieu de $e$, la valeur $ie$ et qu'on change $\sqrt{1-\rho^2}$ en $\sqrt{1+\rho^2}$.

Déplaçons maintenant l'extrémité de R, que l'on suppose être à l'extérieur de l'ellipsoïde, de manière à le faire tomber sur la surface : $r$ se changera en $r_0$, $\rho$ en $\rho_0$. Enfin, égalisons cette valeur de $\frac{1}{R}$ à la solution générale V de $\Delta v = 0$. Ce chemin, indiqué par M. Heine, servira à déterminer les constantes, et la fonction de Green pour un point extérieur se présentera sous la forme

$$\begin{aligned}V_e = \frac{i}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_m (-1)^m h_m P_m^n(\cos u) P_m^n(\cos u_1)\\ \times Q_m^n(\sqrt{1-\rho^2})\, Q_m^n(\sqrt{1-\rho_1^2})\, \frac{P_m^n(\sqrt{1-\rho_0^2})}{Q_m^n(\sqrt{1-\rho_0^2})} \cos m(v-v_1).\end{aligned}$$

Tandis que la déduction de cette formule est commune aux deux espèces d'ellipsoïdes de rotation, on est obligé de recourir à deux méthodes différentes pour parvenir aux expressions qui se rapportent à un point intérieur. Le problème de l'ellipsoïde allongé admet d'être abordé par la voie analogue; mais le sphéroïde se refuse à être traité selon cette méthode. En profitant d'un autre Mémoire de M. Heine [*Theorie der Anziehung eines Ellipsoids* (*Journ. de Crelle,* t. 42)], l'auteur réussit à trouver la solution de son problème. Les deux expressions pour les ellipsoïdes sont parfaitement correspondantes et peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned}V_i = \frac{i}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_m (-1)^m h_m P_m^n(\cos u) P_m^n(\cos u_1)\\ \times P_m^n(\sqrt{1\mp\rho^2})\, P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_1^2})\, \frac{Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_0^2})}{P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_0^2})} \cos m(v-v_1).\end{aligned}$$

La vérification des valeurs de $V_e$ et $V_i$ pour la sphère termine la première Partie du travail.

Dans la deuxième Partie, on trouve la solution de ce problème plus général : Déterminer la fonction de Green pour une nappe limitée par deux ellipsoïdes de rotation confocaux. Les solutions de

l'équation $\Delta v = 0$ et les formules pour $\frac{1}{R}$ de la première Partie se prêtent immédiatement à être appliquées à ce cas. En faisant coïncider le point variable avec un point de la surface intérieure ou extérieure de la nappe, on parvient à déterminer les constantes, et il vient

$$G = \frac{1}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\sum_{0}^{n}{}_{m}\cos m(v - v_1)P_m^n(\cos u)P_m^n(\cos u_1)\frac{N}{D},$$

où l'on a mis pour abréger

$$\begin{aligned} N = \; & P_m^n(\sqrt{1\mp\rho^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_i^2})[P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_e^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_1^2}) \\ & \qquad - P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_1^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_e^2})] \\ & - Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho^2})P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_e^2})[P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_1^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_i^2}) \\ & \qquad - P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_i^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_1^2})], \\ D = \; & P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_e^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_i^2}) - P_m^n(\sqrt{1\mp\rho_i^2})Q_m^n(\sqrt{1\mp\rho_e^2}). \end{aligned}$$

Dans la troisième Partie, l'auteur étudie la fonction de Green pour le cylindre de rotation de longueur infinie. La tentative de tirer la solution de ce problème de celle de la première Partie semble présenter des difficultés d'un ordre élevé. Car pour $e = \infty$, la racine $\sqrt{1+\rho^2}$ se change en 1, $Q_m^n(1)$ devient infini. M. Dœhler préfère donc chercher une solution indépendante de cette question. Transformant l'équation $\Delta v = 0$ en coordonnées cylindriques, il trouve comme solution générale de cette équation

$$V = \sum_{0}^{\infty}{}_{m}(a_m\cos mv + b_m\sin mv)\int_0^\infty [A_m I_m(i\alpha r) + B_m Y_m(i\alpha r)]\cos\alpha z\, d\alpha.$$

Pour gagner la valeur de $\frac{1}{R}$ en coordonnées cylindriques, il fait concourir plusieurs intégrales définies, le théorème de Fourier et le théorème de Bessel sur l'addition des fonctions cylindriques, et il en tire

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_{m}\cos m(v - v_1)\int_0^\infty \cos\alpha z\, I_m(i\alpha r_1)Y_m(i\alpha r_1)\,d\alpha.$$

Les constantes de la première expression se déterminent par le procédé qui la fait passer en $\frac{1}{R}$. Déplaçons le point variable sur la surface du cylindre, et la fonction de Green deviendra pour un point extérieur

$$V_e = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty{}_m \cos m(v - v_1)\int_0^\infty Y_m(i\alpha r)Y_m(i\alpha r_1)\frac{I_m(i\alpha r_0)}{Y_m(i\alpha r_0)}\cos\alpha z\,d\alpha.$$

et analoguement pour un point intérieur

$$V_i = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty{}_m \cos m(v - v_1)\int_0^\infty I_m(i\alpha r)I_m(i\alpha r_1)\frac{Y_m(i\alpha r_0)}{I_m(i\alpha r_0)}\cos\alpha z\,d\alpha.$$

Le développement de la fonction de Green pour une nappe entre deux cylindres coaxiaux infinis se fait dans la quatrième Partie du travail et correspond exactement aux calculs qu'on a effectués dans la deuxième. Il résulte

$$G = \sum_0^\infty{}_m \cos m(v - v_1)\int_0^\infty \frac{N}{D}\cos\alpha z\,d\alpha,$$

où l'on a mis

$$\begin{aligned}N = {} & I_m(i\alpha r)Y_m(i\alpha r_i)[I_m(i\alpha r_e)Y_m(i\alpha r_1) - I_m(i\alpha r_1)Y_m(i\alpha r_e)]\\ & + Y_m(i\alpha r)I_m(i\alpha r_e)[I_m(i\alpha r_1)Y_m(i\alpha r_i) - I_m(i\alpha r_i)Y_m(i\alpha r_1)],\\ D = {} & I_m(i\alpha r_e)Y_m(i\alpha r_i) - I_m(i\alpha r_i)Y_m(i\alpha r_e).\end{aligned}$$

Dans un Appendice, M. Dœhler insiste sur l'analogie apparente entre les valeurs de la fonction de Green pour l'ellipsoïde de rotation allongé et pour le cylindre infini à base circulaire; cette ressemblance des formules pousse à mettre à exécution la transformation de la première formule en celle pour le cylindre. Or Kirchhoff a été d'opinion (*voir* son Mémoire dans le *Journ. für Mathematik*, t. XLVIII, p. 348-376) qu'il est impossible de transformer directement les valeurs qu'on a établies pour l'ellipsoïde de rotation en celles qui ont lieu pour le cylindre infini à base circulaire, parce que $Q_m^n(1)$ est infini; c'est qu'il ne connaissait pas alors la limite, trouvée par Heine, de $\frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,Q_m^n\left(\cos\frac{\mathfrak{z}}{n}\right)$ pour

$n = \infty$, expression qui devient $\int_0^\infty e^{i\mathfrak{z}\cos iu} \cos imu\,du$. Profitant des idées de Heine, l'auteur passe à la limite de $Q_m^n\left[\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2}\right]$ pour $\varepsilon = \infty$ en se servant de l'intégrale définie qui sert à représenter $Q_m^n(x)$, et obtient ainsi $\int_0^\infty e^{i(ir)\cos iu} \cos imu\,du$, c'est-à-dire la forme de l'intégrale définie pour $Y_m(ir)$. Quoique la transformation de l'expression de la fonction de Green pour l'ellipsoïde allongé en celle pour le cylindre infini n'ait donc pas été menée à bout, l'auteur croit être en droit d'en maintenir la possibilité, parce que l'obstacle qui semblait s'opposer à ce procès a été écarté par l'application des idées de Heine. Quand on aura réussi à effectuer la transformation, M. Dœhler affirme qu'il faudra alors trouver un moyen pour transformer $P_m^n(\cos u)\,P_m^n(\cos u_1)$ en $\cos\alpha(z - z_1)$.

---

VILLIÉ. — Compositions d'Analyse, Mécanique et Astronomie, données depuis 1885 à la Sorbonne pour la licence ès Sciences mathématiques, suivies d'exercices sur les variables imaginaires. Seconde Partie. 1 vol. in-8°; VIII-318 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890.

Ce nouveau Volume d'exercices se distingue par les mêmes qualités que le premier, que nous avons signalé en son temps [1]. La plupart des énoncés, dont l'origine est toujours scrupuleusement indiquée, ont été donnés comme sujets de compositions à la Faculté des Sciences de Paris. D'autres, en assez grand nombre, et non moins intéressants, viennent des autres Facultés; quelques-uns ont été empruntés aux Concours d'agrégation, aux Conférences préparatoires à la licence ou à l'agrégation, faites à la Sorbonne, ou sont dus à l'auteur. On ne peut manquer d'être frappé de l'intérêt et de la variété que présentent ces petites questions, du soin et de la conscience dont leur choix témoigne chez ceux qui sont chargés du service des examens. Les solutions sont habi-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IX, p. 296.

tuellement claires, élégantes, et ne comportent pas de longs développements : elles sont plutôt destinées à fournir aux candidats des modèles de composition qu'à augmenter leurs connaissances théoriques, et à éveiller leur curiosité. On peut regretter, de temps en temps, surtout dans un Livre destiné à des élèves, un abus du style elliptique : pourquoi, par exemple, écrire : « Trouver par les imaginaires la valeur d'une intégrale » ? Cela pourrait passer dans la conversation, entre gens qui ne se piquent pas de « parler comme des Livres ». Que les Livres, au moins, ne donnent pas le mauvais exemple aux candidats à la licence, qui sont de futurs professeurs. J. T.

---

# MÉLANGES.

## NOTE SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE;

PAR M. CH. CELLÉRIER (¹).

1. *Préliminaires.* — Parmi les principes ordinairement considérés comme évidents, relatifs à la continuité des fonctions, en particulier des séries, à leur intégration, à leur différentiation, etc., il en est qui sont en effet rigoureusement exacts, d'autres ne le sont pas sans exception ; nous verrons, par exemple, que les termes d'une série peuvent être fonctions continues d'une variable, la série elle-même convergente pour toutes les valeurs de la variable comprise entre deux limites, tandis que la somme de la série est discontinue entre ces limites ; nous verrons aussi des exemples de fonctions explicites, déterminées et continues pour toutes les va-

---

(¹) Ce Mémoire a été trouvé dans les papiers de M. Cellérier, professeur à Genève, mort l'année dernière.

Il est entièrement écrit de sa main sur un papier jauni par le temps ; l'auteur a mis sur la feuille qui le renfermait la suscription que voici : « Très important, et, je crois, nouveau. — Rédaction correcte. Peut être publié tel quel. » Malheureusement, le Mémoire ne porte aucune date, et il sera sans doute impossible de savoir si les résultats essentiels qu'il contient ont été, ou non, obtenus avant ceux

leurs de la variable, et qui n'ont jamais de dérivées, ou qui en ont, de sorte que les dérivées de tous les ordres soient elles-mêmes des fonctions continues, mais telles en même temps que, quelle que soit la valeur de la variable, un accroissement de la fonction ne peut être exprimé en fonction de celui de la variable, quelque petit qu'il soit, par la série de Taylor; cette singularité avait déjà été remarquée pour certaines fonctions, mais seulement pour des valeurs particulières de la variable. D'autres fonctions continues se trouvent ne pouvoir être constamment croissantes ou décroissantes pendant que la variable est comprise entre deux valeurs quelconques, quelque peu différentes qu'elles soient. Il est clair que l'examen de ces cas singuliers n'a pas d'autre but que de discerner les principes essentiels à toute fonction de ceux qui ne le sont pas, car pour ces derniers le moyen le plus simple de prouver qu'ils ne sont pas généraux est d'en produire une exception. Mais pour ceux-là il est utile, en outre, de savoir reconnaître par certains caractères, quand

---

que l'on doit à MM. Weierstrass, Schwarz, du Bois-Reymond, Darboux, Dini, etc. Quoi qu'il en soit, ils ont été obtenus indépendamment des travaux que nous venons de rappeler, comme le prouvera la lecture du Mémoire, et en particulier la phrase suivante que l'auteur n'aurait sûrement pas écrite s'il avait eu connaissance des recherches dont les fondements de l'Analyse ont été l'objet depuis une vingtaine d'années : « On pourrait par un raisonnement analogue... démontrer quelques autres propriétés essentielles de toutes les fonctions continues, celles de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans devenir exactement égale à tout nombre intermédiaire, d'être susceptible d'une valeur maxima et minima qu'elle atteint pour une valeur au moins de la variable, etc. *Ces questions offrent peu d'intérêt...* » Ce passage suffirait, s'il en était besoin, à mettre hors de doute la bonne foi de Cellérier. Comme l'indique la suscription de son Mémoire, celui-ci ne s'était pas trompé sur l'importance des matières qu'il contient, et le lecteur pourra se convaincre que Cellérier avait vu et très bien vu tout ce qu'il y a d'essentiel dans le sujet : notion précise de la continuité, notion de l'u nformité dans la continuité des fonctions, dans la convergence des séries, existence du maximum effectivement atteint, existence de l'intégrale pour les fonctions continues, existence de fonctions continues qui n'admettent point de dérivées, et qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, tout se trouve dans les quelques pages que nous publions. Les raisonnements sont rigoureux et les exemples simples ; aujourd'hui encore, malgré tous les travaux dont la matière a été l'objet, le Mémoire de Cellérier, en changeant quelques termes, et en ajoutant quelques indications que nous avons cru inutile de signaler, constituerait tout au moins une excellente *leçon* sur les principes de l'Analyse.

Nous nous bornerons à remarquer que l'exemple donné par l'auteur d'une fonction continue qui n'admet point de dérivée, exemple qui se prête à une dé-

on les emploie, qu'on ne tombe point dans un cas d'exception. C'est ce que nous avons pu faire pour les séries, comme on le verra, par une règle simple en pratique, celle de la convergence commune.

Une règle analogue, relative à la propriété d'avoir une dérivée, serait difficile à trouver.

Il nous arrivera plusieurs fois de considérer un nombre comme limite d'autres nombres $g_1$, $g_2$, $g_3$, ... allant en croissant, en nombre infini, mais n'augmentant point à l'infini. Pour préciser ce mode de détermination, il faut remarquer que si $g_1$, $g_2$, ..., au lieu d'être des nombres abstraits, sont des grandeurs concrètes, il suffit qu'elles ne croissent point à l'infini pour qu'elles approchent d'une limite $\lambda$ de même espèce, de sorte que, $\gamma$ étant aussi petite qu'on voudra, la suite $g_1$, $g_2$, ... soit constamment, à partir d'un certain rang, comprise entre $\lambda$ et $\lambda - \gamma$. C'est sur cette propriété qu'est basée la notion du nombre en général, ou du signe qui indique

---

monstration très naturelle, est très voisin de l'exemple classique dû à M. Weierstrass et signalé par M. du Bois-Reymond dans le t. 79 du *Journal de Crelle*, savoir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

où $a$ est un entier impair et $b$ un nombre positif tel que l'on ait

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

La fonction choisie par Cellérier est la suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin a^n x}{a^n}.$$

La même série fournit un exemple de fonction continue qui n'est ni croissante ni décroissante. M. Darboux avait signalé, dans cet ordre d'idées, la fonction

$$\Sigma a_n (\sin n x \pi)^{\frac{2}{3}},$$

en supposant la série $\Sigma a_n$ absolument convergente (*Annales de l'École Normale*, année 1875).

le mode de formation de la grandeur au moyen de son unité : l'expression la plus simple de ce signe est un nombre décimal dont les chiffres se prolongent à l'infini suivant une loi fixe. Le signe une fois fixé, les nombres $g_1$, $g_2$, ..., substitués aux grandeurs, déterminent encore un nombre unique $\lambda$.

2. *Continuité des fonctions.* — Une fonction d'une variable $x$ est un nombre qui en dépend suivant une loi fixe, exprimable ou non par les signes usuels. Désignons par $f(x)$ une fonction qui reste finie et déterminée pendant que $x$ croît de $\alpha$ à $\beta$. Nous disons qu'elle est continue pour une valeur particulière $x = c$ lorsque, étant donné un nombre $\gamma$ aussi petit que l'on voudra, on peut toujours en trouver un autre $h$ tel qu'on ait $f(x) - f(c) < \gamma$ quand $x - c < h$, ces inégalités étant simplement numériques. On suppose en outre dans ces énoncés que $x$, comme $c$, est astreint à être compris entre $\alpha$ et $\beta$ ou égal à l'un d'eux. Nous exprimerons en abrégé cette propriété en disant que la limite $h$ *convient* à cette valeur $x = c$.

On dit que la fonction est continue de $\alpha$ à $\beta$ si elle l'est pour chaque valeur particulière de $x$ comprise dans cet intervalle.

Une autre manière de concevoir la continuité consisterait à dire que, quelque petit que soit $\gamma$, on peut toujours trouver un nombre $h$ tel qu'on ait $f(x) - f(y) < \gamma$ quand $x - y < h$, $x$ et $y$ étant compris entre $\alpha$ et $\beta$, du reste quelconques. Cela revient à dire qu'on peut trouver une limite $h$ convenant à la fois à toutes les valeurs de $x$. Ce nouvel énoncé n'est point tout à fait équivalent au précédent, et même il n'en est point la conséquence nécessaire dans le cas où la fonction est déterminée pour les valeurs rationnelles de $x$ seulement. Dans ce cas, les définitions précédentes ont un sens tout aussi précis, pourvu que chaque valeur particulière $c$, $x$, $y$ soit supposée rationnelle ; mais l'expression $\frac{1}{a - x}$, en supposant que $a$ est une constante irrationnelle, nous donne l'exemple d'une fonction qui est continue pour toute valeur rationnelle de $x$, sans qu'une même valeur de $h$ puisse convenir à toutes.

Il en est autrement dans le cas ordinaire où la fonction est déterminée aussi bien pour les valeurs irrationnelles de la variable. En effet, supposons pour un instant que, $\gamma$ étant donné, aucune

limite $h$ ne pût convenir à la fois à toutes les valeurs de $x$ comprises entre $\alpha$ et $\beta$. Alors si nous partageons l'intervalle de $\alpha$ à $\beta$ en un nombre arbitraire $n$ d'intervalles égaux, il faudra admettre que la même anomalie aura lieu pour l'un d'eux, de sorte qu'en nommant $\alpha_1$ et $\beta_1$ ses limites, aucune valeur de $h$ ne pourra convenir à la fois à toutes les valeurs de $x$ contenues entre $\alpha_1$ et $\beta_1$. S'il en était autrement, en effet, et que pour chacun des intervalles une certaine limite $h$ pût convenir, la plus petite conviendrait à l'intervalle entier de $\alpha$ à $\beta$. Nous supposerons, pour que $\alpha_1$ et $\beta_1$ soient entièrement déterminés, que quand $x$ croît à partir de $\alpha$, l'intervalle de $\alpha_1$ à $\beta_1$ est le premier qui ait ce caractère. Cela posé, partageons-le encore en $n$ intervalles égaux; l'un d'eux, de $\alpha_2$ à $\beta_2$, présentera encore la même anomalie qu'aucune valeur de $h$ ne peut convenir à la fois à toutes les valeurs de $x$ qu'il contient, et nous admettrons encore que ce soit le premier qui se trouve dans ce cas quand $x$ croît à partir de $\alpha_1$; nous le partagerons encore en $n$ parties, et ainsi de suite à l'infini. Or les nombres $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ... sont parfaitement déterminés par la règle qui précède, ils sont en nombre infini, vont en croissant (ou du moins non décroissant), mais non à l'infini. Il y a donc un certain nombre $c$ qui en est la limite, et celui-là devrait jouir de la propriété qu'en prenant $\theta$ aussi petit que l'on voudra, aucune limite $h$ ne pourrait convenir à la fois à toutes les valeurs de $x$ comprises entre $c+\theta$ et $c-\theta$; c'est ce qui est impossible, car, la fonction étant continue pour $x=c$, on peut trouver un nombre $2h$ tel que si $x$ est compris entre $c\pm 2h$, on ait

$$f(x)-f(c)<\frac{1}{2}\gamma,$$

et il en résulte que, pour toute valeur de $x$ comprise entre $c\pm h$, la limite $h$ peut convenir; en effet, si $b$ est une de ces valeurs, et que $x$ soit compris entre $b\pm h$, il le sera entre $c\pm 2h$, et par suite on aura

$$f(x)-f(c)<\frac{1}{2}\gamma,\qquad f(c)-f(b)<\frac{1}{2}\gamma;$$

d'où

$$f(x)-f(b)<\gamma,$$

contrairement à l'hypothèse.

On pourrait par un raisonnement analogue, c'est-à-dire en partageant $\beta - \alpha$ en intervalles de plus en plus petits, et considérant le nombre déterminé par la suite de leurs limites inférieures, démontrer quelques autres propriétés essentielles de toutes les fonctions continues, celles de ne pouvoir passer d'une valeur à une autre sans devenir exactement égale à tout nombre intermédiaire, d'être susceptible d'une valeur maxima et minima qu'elle atteint pour une valeur au moins de la variable, etc. Ces questions offrent peu d'intérêt, vu leur évidence. Nous remarquerons seulement que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

a un sens absolument déterminé, en désignant par $f(x)$ la fonction. Si l'on partage l'intervalle $\beta - \alpha$ en $n$ parties égales, puis chacune en $n$ autres, et ainsi de suite à l'infini, on peut faire correspondre une somme de produits dont chacun est celui de la valeur commune de l'intervalle, par la valeur minima de la fonction quand la variable s'y trouve comprise; la somme de ces produits correspondant à chaque intervalle étant désignée par $s_1$ pour le premier mode de partage, par $s_2$ pour le deuxième, et ainsi de suite, ces nombres $s_1, s_2, s_3, \ldots$ formés suivant une loi déterminée, sont en nombre infini, constamment croissants, et la limite dont ils s'approchent est l'intégrale ci-dessus.

3. *Continuité des séries.* — Une série est dite *convergente* lorsqu'il existe un nombre $s$ tel que, étant donné un nombre $\gamma$ aussi petit qu'on voudra, la somme des termes devienne, dès que l'on dépasse un certain rang, constamment comprise entre $s \pm \gamma$.

Une série convergente peut changer de valeur ou même devenir divergente lorsque l'on change l'ordre des termes sans en omettre aucun; c'est ce qui arrive, par exemple, quand, dans la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \cdots$, sans omettre aucun des termes négatifs, on les espace davantage pour intercaler entre eux plusieurs termes positifs; aussi, dans les énoncés suivants, est-il nécessaire de préciser entièrement ce que l'on entend par le premier terme, le deuxième, etc., sans opérer aucune réduction entre un terme et ceux qui le suivent ou le précèdent.

Supposons que chaque terme soit une fonction déterminée et continue d'une variable $x$ pendant qu'elle varie de $\alpha$ à $\beta$. Supposons en outre que la série soit convergente pour chaque valeur de $x$, c'est-à-dire qu'en désignant par le reste de la série la différence entre la somme d'un certain nombre de termes et la somme totale, on puisse pour chaque valeur de $x$ assigner un nombre $n$ de termes tel qu'en en prenant ou $n$ ou un plus grand nombre, le reste soit inférieur à toute quantité donnée $\gamma$. Nous l'exprimerons en abrégé, en disant que le nombre $n$ convient à une certaine valeur de $x$.

Quoique l'on regarde en général la somme de la série comme fonction continue de $x$ quand elle satisfait les conditions précédentes, on peut s'assurer qu'il n'en est pas toujours ainsi par l'exemple suivant, où les termes sont les expressions entre parenthèses

$$(1+x)+\left[\frac{x}{2}+x(1-x^2)\right]+\left[\frac{x^2}{4}+x(1-x^2)^2\right]+\left[\frac{x^3}{8}+x(1-x^2)^3\right]+\ldots,$$

de sorte que le terme général est

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n+x(1-x^2)^n.$$

Chaque terme est une fonction continue; la série est convergente quand $x$ est compris entre $\pm\sqrt{2}$; mais, comme elle ne l'est pas à ces limites, bornons-nous à faire varier $x$ de $-1$ à $+1$; pour $x=1$, les termes sont

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,\quad 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ldots;$$

la série est également convergente pour $x=0$, les termes étant nuls depuis le second; or une semblable série satisfait rigoureusement à la condition de convergence. Pour toute autre valeur de $x$, la série est la somme de deux progressions convergentes, dont la raison est $\frac{1}{2}x$, $1-x^2$, et a pour valeur

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{x};$$

elle est par suite discontinue pour $x=0$.

Une série dont les termes sont fonctions continues entre $x = \alpha$, $x = \beta$ sera aussi fonction continue entre ces limites si elle satisfait ce que nous nommerons la *condition de convergence commune*, c'est-à-dire si, quel que soit $\gamma$, on peut trouver un nombre $n$ qui convienne à la fois à toutes les valeurs de $x$. C'est ce qui n'a pas lieu pour la précédente; car, en n'y prenant que $n$ termes, le reste est

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} - \frac{(1-x^2)^n}{x};$$

or, quelque grand que soit $n$, il y aura toujours de petites valeurs de $x$ pour lesquelles il dépassera $\gamma$.

Mais si la condition est satisfaite, alors, en désignant par $f(x)$ la somme de la série, par $f_n(x)$ celle des $n$ premiers termes, on pourra choisir $n$ de manière qu'à la fois pour toutes les valeurs de $x$ le reste $f(x) - f_n(x)$ soit $< \frac{1}{3}\gamma$; puis, $f_n(x)$ étant une fonction continue, on pourra trouver aussi une limite $h$ telle que l'on ait $f_n(x) - f_n(y) < \frac{1}{3}\gamma$ quand $x - y < h$; alors la limite $h$ conviendra à la fonction $f(x)$, car si $x - y < h$, on aura

$$f(x) - f_n(x) < \frac{1}{3}\gamma, \qquad f_n(x) - f_n(y) < \frac{1}{3}\gamma, \qquad f_n(y) - f(y) < \frac{1}{3}\gamma;$$

et par suite

$$f(x) - f(y) < \gamma.$$

Par exemple, pour s'assurer que le développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ou

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots$$

converge bien vers la limite

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots,$$

quand $m$ croît d'une manière continue à l'infini, on peut considérer $\frac{1}{m}$ comme étant la variable, et il suffit de constater la conver-

gence commune; elle résulte d'ailleurs de ce que le rapport du terme de rang $n+1$ au précédent est inférieur à $\frac{1}{n}$ s'il est positif, à $\frac{1}{m}$ s'il est négatif.

La condition de convergence commune est suffisante, mais non nécessaire, pour que la somme de la série soit fonction continue; c'est ce que l'on peut vérifier par l'exemple suivant, où les termes sont les expressions entre parenthèses

$$(1+xe^{-x^2})+\left(\frac{x}{1}+2xe^{-2x^2}-xe^{-x^2}\right)+\left(\frac{x^2}{1.2}+3xe^{-3x^2}-2xe^{-2x^2}\right)+\ldots,$$

de sorte que le terme général est

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+(n+1)xe^{-(n+1)x^2}-nxe^{-nx^2}.$$

En effet, les termes sont fonctions continues, quel que soit $x$; pour $x=0$, la somme se réduit à 1; pour toute autre valeur, la somme des $n$ premiers est

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+nxe^{-nx^2},$$

et converge, quand $n$ augmente, vers $e^x$: en effet, si, pour un instant, on fait croître $n$ d'une manière continue, quand il augmente de 0 à $\frac{1}{x^2}$, et de $\frac{1}{x^2}$ à l'infini, $nxe^{-nx^2}$ croît de 0 à $\frac{1}{ex}$ et décroît ensuite jusqu'à 0. La somme $e^x$, devenant 1 pour $x=0$, est par suite continue. Toutefois la condition de convergence commune n'est pas satisfaite; car, quelque grand que soit $n$, on pourra prendre $x$ assez petit pour que la valeur $\frac{1}{x^2}$ de $n$, qui rend le principal terme du reste maximum, soit encore plus grande, et par suite, en prenant un plus grand nombre de termes, on aurait un reste peu différent de $\frac{1}{ex}$ et qui peut être très considérable.

4. *Intégration et différentiation des séries.* — Représentons toujours par $f(x)$ la somme d'une série convergente dont les termes sont fonctions continues de $x$ quand cette variable croît de $\alpha$ à $\beta$. S'il y a une convergence commune, alors les intégrales des termes prises entre deux limites comprises entre $\alpha$ et $\beta$ auront pour somme

$\int f(x)\,dx$ prise entre les mêmes limites : il suffit évidemment de le démontrer en supposant que ces dernières soient $\alpha$ et $\beta$ elles-mêmes. Or, quelque petit que soit $\gamma$, on peut choisir $n'$ de manière que, si le nombre $n$ des termes est supérieur ou égal à $n'$, en nommant $f_n(x)$ leur somme, on ait

$$f(x) - f_n(x) + \gamma = \text{ou} > 0, \qquad f(x) - f_n(x) - \gamma = \text{ou} < 0;$$

d'où résulte

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx + \gamma(\beta - \alpha) = \text{ou} > 0,$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx - \gamma(\beta - \alpha) = \text{ou} < 0;$$

d'où résulte évidemment que $\int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx$, c'est-à-dire la somme des intégrales des termes successifs, converge vers $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, quand $n$ augmente.

La propriété relative à la différentiation résulte de celle-là ; car, si $f(x)$, $f'(x)$ sont les sommes des deux séries dont les termes sont fonctions continues de $x$ entre $\alpha$ et $\beta$, si de plus elles ont entre ces limites une convergence commune, et que les termes de la seconde soient les dérivées de ceux de la première, on pourra en conclure que $f'(x)$ est la dérivée de $x$. En effet, si $a$ et $a+h$ sont deux nombres quelconques compris entre $\alpha$ et $\beta$, en nommant $f_n(x)$, $f'_n(x)$ la somme des $n$ premiers termes de chaque série, on aura

$$\int_a^{a+h} f'_n(x) = f_n(a+h) - f_n(a).$$

Or le premier nombre, quand $n$ augmente, diffère aussi peu que l'on voudra, comme on l'a vu, de $\int_a^{a+h} f'(x)\,dx$, tandis que le second converge vers $f(a+h) - f(a)$; il en résulte

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f'(x)\,dx.$$

Or, en prenant $h$ très petit, il est aisé de voir que le second membre diffère aussi peu que l'on voudra de $f'(a)$ qui est bien, par suite, la dérivée de $f(x)$ pour $x = a$; cette valeur $a$ est d'ailleurs un nombre quelconque compris entre $\alpha$ et $\beta$.

S'il n'y a pas convergence commune, il est remarquable que la première de ces deux propriétés se trouve en défaut même pour la seconde série que nous avons prise pour exemple, quoique la somme soit fonction continue; en effet, on a dans ce cas

$$\int_0^x f_n(x) = \left(\frac{x}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right) + \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-2x^2}\right) + \dots$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{1\dots n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-nx^2},$$

qui converge, quand $n$ est très grand, vers $e^x - \frac{1}{2}$, tandis que

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x e^x\,dx = e^x - 1.$$

5. *Exemple de fonctions faisant exception aux règles usuelles.* — Considérons la fonction donnée par la série suivante

$$f(x) = \frac{\sin a x}{a} + \frac{\sin a^2 x}{a^2} + \frac{\sin a^3 x}{a^3} + \dots = \sum \frac{\sin a^n x}{a^n},$$

dans laquelle $a$ est un entier constant que nous supposerons positif et très grand. La série étant plus convergente que la progression $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots$, il est clair qu'elle a une convergence commune entre deux valeurs quelconques de $x$, et que, par suite, $f(x)$ est une fonction continue.

Cette série nous fournira un exemple soit d'une fonction qui n'a jamais de dérivée, soit d'une fonction qui n'a jamais aucune période de croissance ou de décroissance; ces propriétés seront plus aisées à vérifier en supposant $a$ pair pour la première et impair pour la seconde. Dans les deux cas, nous supposerons $a > 1000$, et nous poserons aussi, $i$ étant un exposant positif qui sera pris très grand,

$$k_i = \frac{f\left(x + \frac{2\pi}{a^i}\right) - f(x)}{\frac{2\pi}{a^i}}.$$

Il est clair que, dans cette expression, les termes dans lesquels $n =$ ou $> i$ disparaîtront, et l'on pourra écrire

$$k_i = \sum_1^{i-1} \cos(a^n x) \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{2\pi}{a^{i-n}}} - \sum_1^{i-1} \sin(a^n x) \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{2\pi}{a^{i-n}}};$$

puis dans la seconde somme chaque terme est numériquement inférieur à $\frac{1}{2} \frac{2\pi}{a^{i-n}}$, et par suite la somme entière à la progression indéfinie $\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{a^2} + \ldots = \frac{\pi}{a-1}\cdot$ Dans la première somme, si l'on remplace les sinus par les angles, l'erreur commise sur chaque terme est également inférieure à $\frac{1}{6}\left(\frac{2\pi}{a^{i-n}}\right)^2$ et par suite, sur la somme, elle l'est au produit de la précédente par $\frac{2}{3} \frac{\pi}{a}$, d'où résulte que nous pourrons poser

$$k_i = \cos(ax) + \cos(a^2 x) + \cos(a^3 x) + \ldots + \cos(a^{i-1} x) + \frac{\theta}{a-1},$$

$\theta$ étant compris entre $\pm 4$.

Supposons maintenant $a$ pair et posons

$$k'_i = \frac{f\left(x + \frac{\pi}{a^i}\right) - f(x)}{\frac{\pi}{a^i}};$$

les termes dans lesquels $n > i$ disparaissent encore dans cette différence; le terme de rang $i$ donne $-\frac{2\sin(a^i x)}{\pi}$, de sorte qu'on aura

$$k'_i = \sum_1^{i-1} \cos(a^n x) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{\pi}{a^{i-n}}} - \sum_1^{i-1} \sin(a^n x) \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{a^{i-n}}\right)}{\frac{\pi}{a^{i-n}}} - \frac{2\sin(a^i x)}{\pi}.$$

On verrait encore que la seconde somme est numériquement inférieure à

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2(a-1)},$$

et qu'en remplaçant dans la première les sinus par les angles, l'erreur qui en résulte est une très petite fraction de l'expression précédente. On aura, par suite,

$$k'_i = \cos(ax) + \cos(a^2x) + \cos(a^3x) + \ldots$$
$$+ \cos(a^{i-1}x) + \frac{\theta'}{a-1} - \frac{2\sin(a^ix)}{\pi},$$

$\theta'$ étant compris entre $\pm 2$.

Or s'il arrivait que, pour une certaine valeur de $x$, la fonction $f(x)$ eût une dérivée $f'(x)$, cela supposerait que, $\gamma$ étant aussi petit qu'on voudrait, l'expression

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

fût comprise entre $f'(x) \pm \gamma$, toutes les fois que $y - x$ serait numériquement inférieure à une certaine limite $h$; d'où résulterait que les expressions $k_i$, $k'_i$ devraient, quand $i$ augmente, converger vers une même limite et, par suite, $k_{i+1} - k_i$, $k_i - k'_i$ vers 0; or on a

$$k_{i+1} - k_i = \cos(a^ix) + \frac{\theta''}{a-1}, \qquad k_i - k'_i = \frac{2}{\pi}\sin(a^ix) + \frac{\theta'''}{a-1},$$

en désignant par $\theta''$, $\theta'''$ la somme algébrique de deux quantités analogues, de sorte que $\theta''$ est compris entre $\pm 8$, et $\theta'''$ entre $\pm 6$; il faudrait donc que

$$\cos(a^ix) + \frac{\theta''}{a-1}, \quad \sin(a^ix) + \frac{\frac{\pi}{2}\theta'''}{a-1}$$

devinssent à la fois aussi petits qu'on voudra quand $i$ croît à l'infini.

Or c'est impossible, puisque, leurs seconds termes étant de très petites fractions, la somme de leurs carrés diffère toujours très peu de l'unité.

Supposons maintenant $a$ impair, nous allons démontrer que la fonction ne peut jamais être constamment croissante ni constamment décroissante pendant que $x$ croît de $\alpha$ à $\beta$, quels que soient ces deux nombres. En effet, nous pouvons choisir l'entier $\mu$ assez

grand pour qu'on ait

$$a^{\mu}(\beta - \alpha) > 6\pi,$$

et il en résultera que, pendant que $x$ croît de $\alpha$ à $\beta$, le produit $a^{\mu}x$ devient au moins six fois un multiple exact de $\pi$; soient $x'$ la plus petite valeur de $x$ pour laquelle cela a lieu, $x''$ la suivante; comme il y en a plusieurs encore, il en résulte

$$\beta - x'' > 2(x'' - x') \quad \text{ou} \quad 2\frac{\pi}{a^{\mu}};$$

par suite,

$$x' + \frac{2\pi}{a^{\mu}}, \quad x'' + \frac{2\pi}{a^{\mu}}$$

sont compris entre $\alpha$ et $\beta$, et il en sera de même *a fortiori* de

$$x' + \frac{2\pi}{a^{i}}, \quad x'' + \frac{2\pi}{a^{i}},$$

en supposant $i > \mu$. Or $x'$ et $x''$ étant aussi compris entre $\alpha$ et $\beta$, il résulterait de notre hypothèse que

$$f\left(x' + \frac{2\pi}{a^{i}}\right) - f(x'), \quad f\left(x'' + \frac{2\pi}{a^{i}}\right) - f(x'')$$

devraient avoir le même signe; il en serait, par suite, de même des valeurs de $k_i$ en y substituant $x = x'$, $x = x''$. Or ces deux valeurs se composent chacune des trois expressions suivantes

$$k_i = \frac{\theta}{a - 1} + \sum_{1}^{\mu - 1} \cos(a^n x) + \sum_{\mu}^{i - 1} \cos(a^n x),$$

dont la première est une très petite fraction, la deuxième est numériquement inférieure à $\mu - 1$, quel que soit $i$; quant à la troisième, les valeurs de $a^n x$, étant le produit de $a^{\mu}x$ par un entier impair, deviendront toutes à la fois un multiple pair de $\pi$ pour l'une des valeurs $x = x'$ ou $x''$, et un multiple impair pour l'autre, ce qui donne

$$i - 1 - \mu, \quad -(i - 1 - \mu),$$

dans les deux cas; or on peut prendre $i$ assez grand pour que le signe de $k_i$ soit celui de cette partie de sa valeur; par suite, $k_i$ sera de signe contraire dans les deux cas, contrairement à l'hypothèse.

6. *Remarques sur la série de Taylor.* — Observons que, si une série convergente a tous ses termes positifs, on peut à volonté changer leur ordre, en réunir plusieurs en un seul, ou réciproquement remplacer un seul par d'autres tous positifs, dont il est la somme; on peut aussi mettre à part des termes en nombre infini, la somme des deux séries formées soit par ceux-là, soit par ceux qui restent reproduit la primitive. Convenons, pour abréger, de dire qu'une série est *numériquement* convergente lorsqu'elle a des termes positifs et négatifs, mais reste convergente en les prenant tous avec le signe $+$. Dans ce cas également, on peut changer à volonté l'ordre des termes, remplacer quelques-uns d'entre eux, même en nombre infini, par un seul égal à leur somme, et en répétant l'opération, remplacer la série primitive par une autre dont les termes soient eux-mêmes des séries. Il suffit que tout terme, choisi à volonté dans l'ordre ancien, ait sa place déterminée dans l'ordre nouveau.

Considérons maintenant une fonction quelconque $f(x)$, et supposons que $f(x+t)$ soit développable par la série de Taylor suivant les puissances de $t$ lorsque $x$ a une valeur particulière $x=a$, et que l'accroissement $t$ a une valeur quelconque inférieure à une certaine limite $k$. Soit $\theta$ un nombre numériquement inférieur à $k$, nous allons démontrer que $f(x+t)$ est encore développable suivant les puissances de $t$ lorsque $x=a+\theta$, pourvu que, en désignant par $\theta'$, $t'$ les valeurs numériques de $\theta$ et $t$ quand elles sont négatives, on ait

$$\theta'+t'<k;$$

en effet, nommons $c$, $c_1$, $c_2$, ... les valeurs que prennent $f(x)$ et ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, quand on y pose $x=a$ : comme $\theta+t$ est numériquement inférieur à $k$, on aura

$$f(a+\theta+t)=c+c_1\frac{\theta+t}{1}+c_2\frac{(\theta+t)^2}{1.2}+c_3\frac{(\theta+t)^3}{1.2.3}+\ldots,$$

de sorte que la série sera convergente et donnera bien la valeur de la fonction; la série reste convergente, par hypothèse, quand on y remplace $\theta+t$ par $k$; les termes, dans ce cas, étant tous inférieurs à un certain maximum M, il en résulte que, si l'on rem-

place $\theta+t$ par $\theta'+t'$, le terme général sera inférieur à

$$M\left(\frac{\theta'+t'}{k}\right)^n,$$

et comme nous supposons $\theta'+t'$ différent de $k$ et plus petit, il en résulte que, même en y remplaçant $c$, $c_1$, ... par leurs valeurs positives s'il y en a de négatifs, la série resterait convergente; il en serait, par suite, de même si l'on remplaçait chaque puissance $(\theta'+t')^n$ par son développement, ou le terme quelconque par $n+1$ différents ([1]).

De là résulte que la série qui exprime $f(a+\theta+t)$ quand on y remplace de même le terme contenant $(\theta+t)^n$ par $n+1$ différents est numériquement convergente; on peut, par suite, sans changer sa somme, grouper autrement les termes et écrire

$$\begin{aligned} f(a+\theta+t) = &\left(c+c_1\frac{\theta}{1}+c_2\frac{\theta^2}{1.2}+c_3\frac{\theta^3}{1.2.3}\right)\\ &+\frac{t}{1}\left(c_1+c_2\frac{\theta}{1}+c_3\frac{\theta^2}{1.2}+\ldots\right)\\ &+\frac{t^2}{1.2}\left(c_2+c_3\frac{\theta}{1}+c_4\frac{\theta^2}{1.2}+\ldots\right)+\ldots. \end{aligned}$$

Les séries successives précédentes sont numériquement convergentes; si, dans l'une d'elles, on prend $\theta$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, ... tous avec le signe $+$, elle a évidemment une convergence commune quand $\theta$ diminue jusqu'à o, puisque, alors, le reste de la série, quand on prend $n$ termes, ne fait que décroître. Cette limite supérieure, du reste, ne peut être que trop forte quand on restitue à $\theta$, $c_1$, ... leurs signes; ainsi la série a encore une convergence commune, d'où résulte que celles qui servent de coefficient à $\frac{t}{1}$, $\frac{t^2}{1.2}$, ... sont bien les dérivées successives de la première par rapport à $\theta$; or, celle-ci est $f(a+\theta)$; on aura, par suite,

$$f(a+\theta+t)=f(a+\theta)+f'(a+\theta)\frac{t}{1}+f''(a+\theta)\frac{t^2}{1.2}+\ldots.$$

C. Q. F. D.

---

([1]) Ici et deux lignes plus bas, l'auteur veut dire que l'on remplace le terme *unique* de rang $n+1$ par les $n+1$ termes *distincts* qui résulteraient de son développement.

Ce qui précède suppose que, pour $x = a$, la série qui exprime $f(a+t)$ non seulement est convergente, mais représente bien la fonction; on admet qu'il en est ainsi, en général, quand l'accroissement $t$ est au-dessous d'une limite $k$ suffisamment petite, ou du moins qu'il n'y a d'exception que pour certaines valeurs particulières de $x$. Nous allons toutefois donner un exemple d'une fonction pour laquelle cela n'a jamais lieu; savoir la suivante

$$f(x) = \frac{\sin(gx)}{1} + \frac{\sin(g^2 x)}{1.2} + \frac{\sin(g^3 x)}{1.2.3} + \frac{\sin(g^4 x)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

dans laquelle $g$ est un entier positif très grand. Les séries formées par les dérivées successives des termes donnent bien celles de la fonction, c'est-à-dire on a bien

$$f'(x) = \frac{g\cos(gx)}{1} + \frac{g^2}{1.2}\cos(g^2 x) + \frac{g^3}{1.2.3}\cos(g^3 x) + \ldots,$$

$$f''(x) = -\frac{g^2}{1}\sin(gx) - \frac{g^4}{1.2}\sin(g^2 x) - \ldots,$$

car les termes de $f^{(n)}(x)$ sont numériquement inférieurs à $\frac{g^n}{1}$, $\frac{g^{2n}}{1.2}$, $\frac{g^{3n}}{1.2.3}$, ou à ceux de la série $e^{g^n}$; chacune de ces séries, y compris $f(x)$, a, par suite, une convergence commune entre deux valeurs quelconques de $x$.

Or, s'il arrivait que, pour une certaine valeur $x = a$, la série de Taylor donnât la valeur exacte de $f(a+t)$ quand $t < k$, elle donnerait, comme on l'a vu, aussi celle de $f(x+t)$ quand $x = a + \theta$, $\theta$ et $t$ étant deux nombres que nous supposerons positifs, toutes les fois que $\theta + t < k$; ou en désignant $\frac{1}{2}k$ par $h$, cela arriverait toutes les fois que $x$ est compris entre $a$ et $a+h$, et que $t < h$. Or on peut prendre l'entier $\mu$ assez grand pour que $x$ croissant de $a$ à $a+h$, $g^\mu x$ passe par une valeur multiple de $2\pi$; donnant à $x$ la valeur correspondante, on devrait avoir

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\frac{t}{1} + f''(x)\frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous allons prouver, au contraire, que les termes de celle-là croissent sans limite, quel que soit $t$. En effet, en supposant $n$

impair, on aura

$$\frac{t^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}x = \pm \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{g^n}{1}\cos(gx) + \frac{g^{2n}}{1.2}\cos(g^2x) + \ldots\right],$$

$$\pm \frac{t^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}x = \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l}\frac{g^n}{1}[\cos(gx)-1] \\ + \frac{g^{2n}}{1.2}[\cos(g^2x)-1] + \ldots \\ + \frac{g^{(\mu-1)n}}{1\ldots(\mu-1)}[\cos(g^{\mu-1}x)-1]\end{array}\right\}$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{g^n}{1} + \frac{g^{2n}}{1.2} + \frac{g^{3n}}{1.2.3} + \ldots\right),$$

en remarquant que $\cos(g^\mu x)$, $\cos(g^{\mu+1}x)$, ... sont l'unité.

La première partie de cette expression est inférieure à

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(2\frac{g^n}{1} + 2\frac{g^{2n}}{1.2} + \ldots\right),$$

et *a fortiori* à

$$\frac{2(tg^{\mu-1})^n}{1.2\ldots n},$$

laquelle décroît sans limite quand $n$ augmente; la seconde partie est

$$\frac{(e^{g^n}-1)t^n}{1.2\ldots n},$$

laquelle croît à l'infini, puisque, en laissant de côté le terme $-1$, remplaçant $n$ par $n+1$, le rapport des valeurs est

$$\frac{e^{g^n(g-1)}t}{n+1},$$

lequel lui-même croît à l'infini.

Il ne résulte pas de ce qui précède que la série de Taylor pour cette fonction soit toujours divergente. Supposons, par exemple, que $g$ soit un nombre impair de la forme $4i+3$, de sorte que $g^3$, $g^5$, ... aient cette même forme, et $g^2$, $g^4$, ... la forme $4i+1$. Alors, en posant $x = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$f'(x) = 0, \qquad f'''(x) = 0, \qquad \ldots$$

et

$$f(x) = -\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad f''(x) = \frac{g^2}{1} - \frac{g^4}{1.2} + \frac{g^6}{1.2.3}, \quad \ldots$$

et, en général, $n$ étant pair,

$$\pm f^{(n)}x = \frac{g^{n}}{1} - \frac{g^{(2n)}}{1.2} + \frac{g^{(3n)}}{1.2.3} - \ldots = 1 - e^{-g^{n}},$$

ce qui donne, pour la série de Taylor,

$$(e^{-1} - 1) - \frac{t^2}{1.2}(e^{-g^2} - 1) + \frac{t^4}{1.2.3.4}(e^{-g^4} - 1) - \ldots,$$

série convergente, quel que soit $t$, mais qui, comme nous l'avons prouvé, ne peut point représenter la fonction $f(x + t)$.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

## E. MATHIEU. — Théorie de l'élasticité des corps solides. In-4°. Paris, 1890.

M. Émile Mathieu a entrepris de donner à la Science un Traité complet de Physique mathématique; cette œuvre, dont la conception seule eût effrayé un esprit moins actif que celui du savant professeur de la Faculté de Nancy, avance rapidement vers son achèvement; les principes généraux qui servent à résoudre les problèmes posés par l'étude rationnelle de la nature, la théorie de la capillarité, l'électrostatique, l'étude du magnétisme, l'électrodynamique, ont été exposés à tour de rôle avec une ampleur qui ne se rencontre en aucun autre Traité. Aujourd'hui, M. Émile Mathieu aborde l'une des branches les plus belles et les plus difficiles de la Physique mathématique, l'étude de l'élasticité des corps solides; des deux Volumes qu'il pense lui consacrer, le premier vient de paraître, et c'est de ce Volume que nous devons entretenir les lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Quel merveilleux développement a subi cette Science dont pas une proposition n'existait il y a soixante-dix ans! En 1821, Navier établit les équations d'équilibre d'un solide isotrope; presque aussitôt, Cauchy et Poisson, que guident les idées de Fresnel, abordent le problème dans son entière généralité; Green le discute, le dégage des hypothèses contestables; Lamé, Clapeyron, Clebsch, de Saint-Venant, Kirchhoff, et d'autres géomètres vivants en multiplient les belles et ingénieuses applications.

Du corps de doctrine imposant sorti de ces efforts, nous avons l'exposé sous les yeux, exposé écrit par un de ceux auxquels on doit les plus beaux travaux sur ces matières. Ce Tableau fidèle de l'état de l'élasticité à notre époque suggère quelques réflexions que nous voudrions indiquer.

1. C'est un fait étrange, et dont cependant presque toutes les branches de la Physique nous offrent l'exemple, que celui d'une Science dont les applications analytiques ont acquis un haut degré de précision, de généralité et d'élégance, tandis que les

principes mêmes sur lesquels repose cette Science sont confus et douteux. Rien de plus curieux ni de plus instructif à cet égard que l'étude des querelles qu'ont suscitées, que suscitent encore les fondements de la théorie de l'élasticité.

Le début même du Livre de M. E. Mathieu nous signale un premier sujet de discussion : *la définition de la pression à l'intérieur d'un corps.* M. E. Mathieu met en parallèle, comme le fait d'ailleurs Lamé au début de ses *Leçons sur l'Élasticité,* la définition de Navier, de Cauchy et de Poisson, et la définition de Lamé. Ni l'une ni l'autre de ces définitions ne semble le satisfaire pleinement, bien qu'il n'essaye point de nous en proposer une autre. Plus audacieux que lui, plus téméraire peut-être, nous voudrions essayer de mettre nettement en lumière les défauts présentés par les définitions données jusqu'ici et les moyens d'y remédier.

La pression à l'intérieur d'un milieu quelconque, solide ou fluide (au point de vue des principes fondamentaux, l'Élastique et l'Hydrostatique présentent les mêmes difficultés), n'est autre chose qu'une force de liaison; elle se définit comme se définit une force de liaison quelconque.

Considérez un milieu continu dont les divers éléments de volume sont impénétrables les uns aux autres. Le mouvement de chacune des parcelles de ce milieu est soumis à certaines conditions de liaison qui résultent de l'impénétrabilité des parcelles attenantes. Isolez par la pensée une portion de ce milieu entourée par une surface fermée; éloignez-la de tout le reste du milieu, *tout en conservant inaltérée la force donnée qui agit sur chacun des éléments de la portion ainsi isolée.* Les liaisons auxquelles cette portion est soumise ont changé; cette portion subit les mêmes forces données que lorsqu'elle était placée au sein du reste du milieu; mais ces forces ne vont plus lui imprimer le mouvement qu'elles lui imprimaient alors; si l'on veut que le mouvement de cette masse demeure inaltéré, il faudra joindre aux forces données qui agissaient sur elle lorsqu'elle était environnée par le reste du milieu et qui, par hypothèse, continuent à agir sur elle depuis qu'elle est isolée, d'autres forces qui seront les *forces de liaison.*

On démontre que ces forces peuvent être regardées comme

appliquées exclusivement à la surface qui limite la masse isolée ; que chaque élément de cette surface supporte une force du même ordre de grandeur que son aire ; que, pour connaître la grandeur et la direction de la force que supporte un élément, il n'est pas nécessaire de connaître la grandeur et la forme de la masse qu'il contribuera à isoler, mais seulement de connaître la position de cet élément à l'intérieur du milieu primitif et son orientation ; et ainsi se trouve introduite la notion de la pression à l'intérieur d'un corps en chaque point et pour chaque orientation de l'élément.

Lagrange [1] avait bien compris cette notion de la pression à l'intérieur d'un corps comme la force de liaison qu'introduit la condition d'impénétrabilité des diverses parties du corps les unes pour les autres. Dans son *Hydrostatique*, la pression à l'intérieur du fluide est simplement ce coefficient que la condition d'impénétrabilité introduit dans l'application du principe des vitesses virtuelles à un fluide continu. L'idée si nette de Lagrange n'a pas été saisie.

Lorsque, pour définir la pression à l'intérieur d'un corps, on isole une partie de ce corps de tout ce qui l'environne, il faut avoir grand soin, comme nous l'avons indiqué, de ne supprimer aucune des forces données qui agissent sur cette partie. Si, par exemple, on regarde certaines des forces données qui agissent sur cette partie comme provenant des portions avoisinantes du milieu, de telle sorte que la suppression de ces portions avoisinantes entraîne la disparition de ces forces, on les supposera remplacées par d'autres forces égales émanées de certains corps qui ne seraient pas en contact avec la portion isolée, et, partant, n'apporteraient pas de gène à son mouvement.

Mais il faudrait bien se garder de dire simplement et sans précautions que les pressions sont les forces qu'il faut appliquer à une portion du milieu, isolée de ce qui l'environne, pour lui rendre le mouvement qu'elle prendrait dans sa situation naturelle au sein du milieu. Dans ces conditions, en effet, les pressions remplaceraient non pas seulement les *liaisons* dues à la présence des parties du milieu contiguës à celle que nous avons isolée,

---

(1) Lagrange, *Mécanique analytique*, 2e édition, t. I, p. 199.

mais encore les *forces données* que ces parties peuvent exercer sur celle que nous avons séparée du reste. Cette confusion nous est présentée par la définition qu'a donnée Lamé ([1]).

Cette confusion conduit bien aisément à une autre plus profonde, qui consiste à identifier simplement le système des pressions qu'une partie d'un milieu subit de la part des parties avoisinantes avec le système des forces données que cette partie du milieu subit de la part des mêmes parties avoisinantes. Cette confusion a été introduite dans la Science par Poisson; son rôle dans le développement des diverses parties de la Physique a été immense.

Newton a imaginé qu'à de très petites distances les diverses particules des corps exerçaient les unes sur les autres des forces données se réduisant en attractions ou répulsions mutuelles, proportionnelles au produit des masses des particules entre lesquelles elles agissent et fonctions de la distance qui sépare ces particules. C'est sur cette hypothèse que Clairaut, Laplace, et plus tard Gauss, ont fondé la théorie de la capillarité. Cette théorie, déduite directement ou indirectement du principe des vitesses virtuelles, ne fait point intervenir les forces de liaison, et le rôle que les actions moléculaires y jouent comme forces données est parfaitement correct.

Selon Poisson, les pressions qu'une partie d'un milieu subit de la part du reste du milieu ne sont autre chose que les résultantes des actions moléculaires que cette partie du milieu éprouve de la part des particules qui l'environnent.

C'est dans son *Mémoire sur les surfaces élastiques* ([2]) que, pour la première fois, il introduit cette confusion dans la définition de la tension d'une membrane. Mais bientôt, il en pousse les conséquences dans toutes les parties de la Physique : en Élastique ([3]), en Hydrostatique ([4]), dans la théorie de la Capil-

---

([1]) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, p. 10.

([2]) Poisson, *Mémoire sur les surfaces élastiques*, lu à l'Institut le 1er août 1814.

([3]) Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, lu à l'Académie le 14 avril 1828.

([4]) Poisson, *Mémoire sur l'équilibre des fluides*, lu à l'Académie le 24 novembre 1828.

larité (¹). Selon lui, cette innovation constitue une réforme capitale, la création d'une nouvelle Mécanique, la *Mécanique physique*, qui s'oppose à la *Mécanique analytique* de Lagrange. « Ajoutons, dit-il à la fin du préambule de son *Mémoire sur les corps élastiques*, qu'il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la Mécanique. Il a fallu les traiter d'une manière tout à fait abstraite pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement; et, en ce genre d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points : c'est là ce qui constitue la *Mécanique analytique;* mais, à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la *Mécanique physique,* dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données et sont l'intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'aurait plus d'hypothèses spéciales à faire lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la Mécanique à des questions particulières. Ainsi, dans le problème de l'équilibre des cordes flexibles, la tension qu'on introduit pour le résoudre sera le résultat immédiat des actions mutuelles des molécules, un tant soit peu écartées de leurs positions naturelles; dans le cas de la lame élastique, le moment d'élasticité par flexion proviendra de ces mêmes actions considérées dans toute l'épaisseur de la plaque, et son expression sera déterminée sans aucune hypothèse ; enfin, les pressions exercées par les fluides dans leur intérieur et sur les parois des vases qui les contiennent sont aussi les résultantes des actions de leurs molécules sur les surfaces pressées, ou plutôt sur une couche fluide extrêmement mince, en contact avec chaque surface.... »

Ainsi, pour Poisson, il existe deux manières de concevoir la Mécanique : dans l'une, qui est celle des géomètres, les systèmes étudiés sont soumis seulement à des forces données extérieures et assujetties à des liaisons; dans l'autre, qui est celle des physiciens,

(¹) Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. Paris; 1831.

les systèmes étudiés sont soumis à des forces données extérieures et à des forces données intérieures, ces dernières réductibles aux attractions moléculaires; mais ils sont soustraits à toute liaison; les points qui les composent doivent être regardés comme libres; ces deux Mécaniques sont logiquement équivalentes, mais la dernière pénètre plus profondément la nature même des choses. Pas une fois Poisson ne semble même soupçonner cette vérité que les attractions mutuelles des diverses particules des corps pourraient exister en même temps que ces particules opposeraient certains obstacles aux déplacements de celles qui leur sont contiguës.

On croirait volontiers qu'une semblable erreur ne peut être autre chose qu'une inadvertance, vite reconnue et corrigée ; il n'en est rien. Non seulement Poisson la reproduit dans tous ses Mémoires sur les corps solides ou fluides, mais encore elle domine les recherches de ceux qui, en même temps que lui, édifient la théorie de l'élasticité. On la trouve au début du Mémoire (1) où Navier donnait, pour la première fois, les équations d'équilibre d'un solide élastique. Cauchy (2), en étendant aux corps non isotropes les résultats obtenus par Navier, accepte la même idée; elle sert de fondement aux innombrables travaux que le grand géomètre a consacrés à l'étude de l'élasticité.

Non seulement les fondateurs de l'Élastique ont fondé leurs recherches sur cette idée, mais encore les plus éminents esprits, parmi ceux qui ont traité de cette science, l'ont adoptée et enseignée.

En parlant de la théorie de la capillarité de Poisson, M. J. Bertrand (3) dit :

« ... Il est bien vrai que, dans le fluide physique et compressible, cette pression ne peut être distinguée de la résultante des actions moléculaires, et doit se calculer, comme Poisson l'a si sou-

(1) Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques,* lu à l'Académie des Sciences, le 14 mai 1821.

(2) Cauchy, *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques,* communiqué à l'Académie des Sciences le 30 septembre 1822 (*Bulletin de la Société philomathique,* année 1823, p. 9).

(3) J. Bertrand, *Journal de Liouville;* 1848.

vent remarqué, au moyen de la fonction qui les représente. Mais, au point de vue abstrait auquel les géomètres se placent, cette pression forme une force à part, de la nature de celles que l'on introduit si souvent en Mécanique sous le nom de *forces de liaison*.... »

De Saint-Venant, dont les travaux ont si fortement contribué aux progrès de la théorie de l'élasticité, n'a cessé de défendre la manière de voir de Poisson. En marge d'un exemplaire de la *Mécanique analytique* qui lui a appartenu, auprès du passage où Lagrange marque si nettement que la pression est une force de liaison, nous trouvons cette note de sa main : « La pression, c'est la répulsion moyenne des molécules fluides », et, quelques lignes plus bas, en regard d'un théorème sur la pression hydrostatique dû à Euler : « C'est encore une proposition *analytique;* il serait à désirer qu'on la convertît, ainsi que les autres, en principes physiques. » Au reste, dans la traduction du Traité de Clebsch ([1]), de Saint-Venant consacre une longue Note à l'exposé et à la défense des idées de Poisson.

Dans son Livre récent sur la Mécanique ([2]), M. Boussinesq, conformément aux idées de Poisson et de de Saint-Venant qui l'ont toujours guidé dant ses beaux travaux, ne parle pas une fois des forces de liaison, mais seulement des actions moléculaires.

Dans son remarquable *Traité de Mécanique rationnelle* ([3]), M. de Freycinet, suivant de tout près l'idée de Poisson, étudie parallèlement les systèmes qu'il nomme *géométriques,* dont les différentes parties sont unies par des liaisons comprises à la manière de Lagrange, et les systèmes qu'il nomme *dynamiques,* dont les différents points, libres de tout lien, exercent les uns sur les autres des attractions ou des répulsions; il affirme (t. I, p. 244) que, dans la nature, il n'y a que des systèmes dynamiques.

Nous n'en finirions pas, si nous voulions citer tous les esprits éminents qui ont adopté la manière de voir de Poisson ; ceux mêmes qui, comme Green, comme Lamé, se sont fortement élevés contre

---

([1]) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides,* traduit par MM. Barré, de Saint-Venant et Flamant, p. 63 et suiv. Paris, 1881.

([2]) Boussinesq, *Leçons synthétiques de Mécanique générale.* Paris, 1889.

([3]) De Freycinet, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, p. 240. Paris, 1858.

certaines conséquences erronées auxquelles conduit cette manière de voir, ne l'ont pas moins plus ou moins implicitement acceptée. Bien des doutes sur les principes de la théorie de l'élasticité ont assailli l'esprit de Lamé ([1]), mais ils ne l'ont pas amené à découvrir et à rejeter l'erreur radicale que ces principes renfermaient. A notre connaissance, un seul physicien, depuis Lagrange, a été amené, par ses méditations sur la théorie que Poisson avait donnée de l'action capillaire, à reconnaître le vice fondamental de cette théorie; ce physicien est Quet ([2]), qui écrivait :

« En effet, il n'y est tenu aucun compte des forces de liaison, que l'on est pourtant obligé d'admettre si l'on veut que les liquides supposés incompressibles soient capables d'appuyer plus ou moins fortement leurs éléments les uns contre les autres et de transmettre les pressions à l'intérieur. La suppression de ces forces de liaison fait disparaître non seulement les phénomènes capillaires, mais aussi l'Hydrostatique tout entière et l'Hydrodynamique, et il n'est pas besoin de calculs pour le voir. Sans elles, les conditions d'équilibre sont nécessairement incomplètes, et il y aurait lieu de s'étonner qu'on ne fût pas conduit à de flagrantes contradictions par une méthode qui ne tient pas compte de toutes les causes. »

2. En effet, l'idée de Poisson a conduit à énoncer bien des contradictions, a engendré bien des discussions. L'histoire de ces contradictions et de ces discussions nous semble contenir un utile enseignement. Bien des gens se refusent à accorder une valeur quelconque aux efforts de ceux qui cherchent à apporter, dans l'exposé des principes de la Mécanique ou de la Physique, un peu de précision et de clarté. « A quoi bon, disent-ils, ces recherches subtiles, ces discussions épineuses? Peu importe que les fondements mêmes de la Science restent troubles et vagues; le flair des physiciens leur permet d'appliquer avec sécurité des

---

([1]) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 20e Leçon. Paris, 1859.

([2]) Quet, *Rapport sur les progrès de la capillarité*. Paris, 1867.

principes qu'ils seraient bien embarrassés d'énoncer avec précision; ces principes doivent donc nous satisfaire, tout indécis qu'ils soient, puisqu'ils conduisent à des conséquences justes dans les applications, ce qui constitue le seul objet digne d'être poursuivi. » Et cependant le flair, disons mieux, le génie de Poisson et de Cauchy ne les a pas empêchés de déduire des principes inexacts qu'ils avaient adoptés des conséquences fausses dont la Physique ne s'est point encore entièrement débarrassée.

On peut, si l'on veut, étudier, conformément aux principes de la Mécanique rationnelle, des systèmes dont les parties contiguës se gênent les unes les autres dans leur mouvement; ces systèmes peuvent d'ailleurs être soumis seulement à des forces données extérieures, ou bien aussi à des forces données intérieures parmi lesquelles peuvent figurer les attractions ou les répulsions mutuelles de leurs particules.

On peut aussi étudier des systèmes formés par des points matériels affranchis de tout lien et soumis seulement à des forces données dont les unes sont extérieures, tandis que les autres, intérieures, résultent d'attractions et de répulsions mutuelles de ces points.

Chacune de ces deux sortes de problèmes peut être abordée logiquement. Mais deux erreurs sont à éviter.

En premier lieu, il faut bien se garder de confondre ces deux sortes de problèmes; il ne faut point s'étonner comme d'une contradiction de ce que les systèmes du premier genre ne possèdent pas les mêmes propriétés que les systèmes du second genre.

En second lieu, il n'est pas du tout évident, même pour ceux qui admettent que les phénomènes présentés par les solides élastiques ou les fluides doivent s'expliquer par les seules ressources de la Mécanique rationnelle, que cette explication doive être forcément donnée en assimilant les solides ou les fluides aux systèmes de la seconde classe.

Or ces deux erreurs ont été commises et ont provoqué des débats qui tiennent une grande place dans l'histoire de la Science; la première de ces erreurs a été commise dans la théorie de l'équilibre des fluides, la seconde dans l'étude de l'élasticité des corps solides.

Considérons un corps composé, comme le veut Poisson, de points matériels absolument libres, mais exerçant les uns sur les autres certaines actions attractives ou répulsives, et prenons ce corps dans son *état naturel,* c'est-à-dire dans l'état d'équilibre qu'il présente lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure. Dans ces conditions, les différents points matériels qui composent le corps doivent se distribuer de manière que les actions moléculaires s'équilibrent sur chacun d'eux. C'est seulement lorsque, par une déformation, la distribution de ces points matériels est troublée, que les forces moléculaires peuvent exercer une action sur chacun d'eux. L'état naturel devant être un état d'équilibre stable, l'action que les forces moléculaires exercent sur chacun des points devra tendre à écarter ces points si la modification les a rapprochés, et à les rapprocher si la modification les a écartés.

Cette première remarque, disons-le incidemment, a amené certains auteurs, tels que Navier et Lamé, à modifier légèrement la définition des actions moléculaires; Poisson regardait l'action mutuelle de deux molécules comme ne dépendant que de la distance qui les sépare, et demeurant la même, pour une même valeur de cette distance, que le corps dont ces molécules font partie soit ou non déformé; Navier et Lamé admettent que, dans un corps à l'état naturel, deux molécules quelconques n'exercent l'une sur l'autre aucune action; leur action ne naît que par l'effet de la déformation qui écarte ou rapproche ces deux particules; elle est proportionnelle au changement de distance des deux particules et tend à s'opposer à ce changement; sa grandeur dépend d'ailleurs de la distance primitive des deux particules.

Mais laissons de côté cette modification de la théorie moléculaire, dont les conséquences ne diffèrent pas de celles auxquelles conduit la théorie de Poisson. Le corps étant pris dans l'état naturel, appliquons aux divers points qui le composent certaines forces extérieures; peut-il arriver que ces points conservent exactement la distribution qu'ils avaient avant l'action de ces forces? Non, car les forces moléculaires continueraient à se faire équilibre entre elles, et ne pourraient faire équilibre aux forces extérieures. Ainsi, sous l'action de forces extérieures, les distances des divers points matériels qui constituent le corps devront va-

rier. Le solide absolument rigide, le fluide incompressible ne peuvent exister si l'on veut se représenter les corps comme formés d'un assemblage de points matériels sans liaison.

Cela n'empêche nullement l'étude du solide parfaitement rigide ou du fluide incompressible d'être parfaitement logique et rationnelle, si l'on admet l'existence de liaisons entre les diverses parties du milieu. Il n'est nullement contradictoire et absurde de supposer l'existence d'un solide rigide ou d'un fluide compressible; ce qui serait absurde, c'est de regarder l'existence de semblables corps comme compatible avec le système de Poisson.

Poisson n'a pas fait cette distinction. Il regarde volontiers comme contradictoires tous les résultats qui ne s'accordent pas avec sa définition des corps. Dans le préambule de son *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques,* il regarde comme absurdes certains résultats de la théorie des corps solides rigides; mais c'est surtout dans l'étude des fluides qu'il a donné une grande importance aux critiques de ce genre. Toutes les attaques que, dans sa *Théorie nouvelle de l'action capillaire,* il a adressées à l'œuvre de Laplace n'ont pas d'autre fondement. Laplace a regardé les liquides comme incompressibles, ce qu'il avait le droit de faire en admettant entre leurs diverses parties l'existence de forces de liaison qui n'avaient pas, d'ailleurs, à figurer dans ses calculs déduits du principe des vitesses virtuelles; Poisson, dont la théorie est incompatible avec la notion de fluide incompressible, trouve des résultats en désaccord avec ceux de Laplace et en conclut que Laplace a erré, détournant ainsi pour longtemps de l'une des plus belles parties de la Mécanique céleste l'admiration qu'elle méritait.

Mais laissons de côté ces critiques, mal justifiées, adressées par Poisson et par ceux qui ont adopté son système aux physiciens qui préféraient suivre les idées de Lagrange. Demandons-nous si le système de Poisson est vraiment propre à représenter les propriétés des solides et des fluides, à constituer, comme Poisson l'annonçait, une Mécanique physique.

Admettons sans discussion que le système développé par l'auteur du *Mémoire sur l'équilibre des fluides* et de la *Théorie nouvelle de l'action capillaire* suffise à rendre compte de toutes les propriétés des liquides, et venons à l'étude des solides.

Et d'abord, lorsqu'on nie l'existence des liaisons, lorsqu'on regarde les corps comme formés de points matériels libres, exerçant les uns sur les autres des attractions ou des répulsions, quels caractères introduira-t-on dans une semblable définition pour distinguer les solides d'avec les fluides, les corps non isotropes des corps isotropes? Ces caractères semblent assez difficiles à trouver et à marquer avec précision; il suffit, pour s'en convaincre, de lire les *Notions préliminaires* qui forment le premier paragraphe du *Mémoire sur l'équilibre des fluides* de Poisson; non seulement Poisson est obligé de regarder les éléments des corps non plus comme des points matériels, mais comme des particules douées de forme, mais encore il invoque sous le nom d'*action secondaire* une force, dépendant de la forme des molécules, qui gêne ou facilite leur mobilité, et à laquelle il attribue tous les effets qui devraient être attribués, si l'on supposait le corps continu, aux liaisons qui existeraient entre ses diverses parties.

Mais passons sur ces difficultés; admettons que, en supprimant toute notion de liaison, on soit parvenu à donner une définition satisfaisante des corps solides isotropes ou non isotropes, et poursuivons l'étude de l'élasticité de ces corps, telle que l'ont tracée Cauchy et Poisson, telle que M. Mathieu l'expose (p. 39). Nous trouverons les équations générales de l'équilibre d'élasticité d'un corps quelconque; dans ces équations figurent quinze coefficients qui dépendent de la nature du corps. Si le corps est isotrope, ces quinze coefficients se réduisent à un seul; les équations obtenues conduisent alors à des conséquences remarquablement simples; aussi, dans un prisme étiré, le rapport de la contraction transversale à l'allongement longitudinal serait indépendant de la nature du corps et égal à $\frac{1}{4}$; ou bien encore le rapport du coefficient de compressibilité au coefficient d'élasticité serait indépendant de la nature du corps et égal à $\frac{2}{3}$.

L'expérience vérifie-t-elle ces conclusions? M. Cornu, Kirchhoff les ont trouvées vérifiées dans certains cas; mais, d'après Wertheim, elles ne seraient pas exactes pour les métaux. Par conséquent, comme le dit M. E. Mathieu (p. VI), « un corps solide, même isotrope, ne peut être considéré comme formé par un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance... sans être assujetties (p. 39)

à de certaines liaisons telles qu'on en considère en Mécanique analytique ». Il est vrai que les partisans de la théorie de Poisson pourront toujours opposer aux contradictions de l'expérience une fin de non-recevoir, en déclarant que les corps dont les propriétés ne s'accordent pas avec leurs formules ne sont pas parfaitement isotropes.

3. Adopter la théorie de Navier, de Cauchy et de Poisson; nier l'existence des liaisons entre les diverses parties d'un solide, c'est faire une hypothèse qui, probablement, est en désaccord avec la réalité, qui, à coup sûr, est inutile : une semblable hypothèse ne doit pas être faite. Avec Green (¹), avec Lamé (²), on ne doit conserver que des relations qui puissent être établies indépendamment de cette hypothèse. L'œuvre entière des fondateurs de l'Élastique sera-t-elle pour cela perdue?

« Il faut le reconnaître, dit Lamé (³), élevés à l'école de Laplace, ni Poisson, ni Cauchy ne devaient penser qu'il fût possible d'établir une théorie de Physique mathématique sans présupposer aucune loi. Mais, doués d'une puissance et d'une fécondité qui n'appartiennent qu'aux génies, en remuant, pour ainsi dire, de fond en comble le sujet qu'ils avaient adopté, ils ne pouvaient manquer de rencontrer les formules pures de toute hypothèse, puisqu'elles existaient. Et peut-être nous fallait-il le concours et l'autorité de ces deux grands géomètres, pour amener au jour un tel résultat, si contraire aux idées reçues. »

Et en effet, l'œuvre de Poisson et de Cauchy subsiste à peu près complète dans la théorie actuelle de l'élasticité; il a suffi à Green et à Lamé de retrancher ce que la négation des liaisons donnait de trop particulier à quelques-unes des formules obtenues par les illustres géomètres.

---

(¹) G. Green, *On the laws of reflexion and refraction*, 11 novembre 1837. *On propagation of light in crystallised media*, 20 mai 1839.

(²) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1852. *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, 20e Leçon, 1859.

(³) Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur; discours préliminaire*.

Quoique parti d'une définition inexacte de la pression à l'intérieur d'un corps, Cauchy a établi, sur la grandeur et l'orientation de la pression subie par les divers éléments qui se croisent en un point, des théorèmes qui demeurent exacts lorsqu'on emploie une définition correcte de la pression; Lamé a complété ces théorèmes par l'étude des belles propriétés de l'ellipsoïde d'élasticité; M. E. Mathieu donne de ces théorèmes fondamentaux un exposé très précis et très élégant. Il démontre aussi d'une façon très complète et très claire les diverses propriétés des déformations infiniment petites d'un corps, propriétés découvertes par Cauchy en 1823.

L'établissement des équations mêmes de l'équilibre de l'élasticité, tel qu'il est ordinairement exposé, ne paraît peut-être pas suffisamment exempt des hypothèses de Poisson et de Cauchy sur l'identité entre les liaisons et les actions moléculaires. Il nous semble que le raisonnement par lequel on parvient à ces équations serait tout à fait correct et exempt de toute supposition, si on lui donnait la forme suivante :

Si $X_1$, $Y_2$, $Z_3$, $Y_3 = Z_2$, $Z_1 = X_3$, $X_2 = Y_1$ sont les composantes des pressions sur trois éléments parallèles aux plans coordonnés; si $\rho$ est la densité du corps au point où se croisent ces trois éléments; si A, B, C sont les composantes de la force accélératrice donnée, tant extérieure qu'intérieure, on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} + \rho A = 0,$$

et deux équations analogues.

Imaginons qu'on envisage un corps de même forme que celui que nous considérons, soumis aux mêmes forces extérieures, aux mêmes liaisons, mais dont les diverses parties n'exercent les unes sur les autres aucune force intérieure donnée. Les pressions à l'intérieur de ce nouveau corps seront différentes; elles vérifieront des équations, de même forme que les précédentes, que nous écrirons

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z} + \rho \alpha = 0.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Modifions les forces extérieures d'une petite quantité, de façon que $\alpha$ devienne $\alpha'$; $\beta$, $\beta'$; $\gamma$, $\gamma'$. Le corps réel subira une petite dé-

formation. Imposons la même déformation au corps fictif dénué de forces intérieures. Les composantes des pressions à l'intérieur de ce corps fictif déformé deviendront des quantités $\xi'_1$, $\xi'_2$, ... peu différentes de $\xi_1$, $\xi_2$, ..., et l'on aura

$$\frac{\partial \xi'_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi'_3}{\partial z} + \rho \alpha' = 0.$$

.........................

En comparant les deux systèmes d'équations que nous venons d'écrire, on trouve le nouveau système

$$\frac{\partial(\xi'_1 - \xi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\xi'_2 - \xi_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\xi'_3 - \xi_3)}{\partial z} + \rho(\alpha' - \alpha) = 0,$$

..................................................

Les quantités $(\xi'_1 - \xi_1)$, $(\xi'_2 - \xi_2)$, ... seront connues si l'on connaît la nature des liaisons qui s'exercent dans le corps réel et les déformations qu'il a subies lorsque les forces extérieures ont subi les variations $(\alpha' - \alpha)$, $(\beta' - \beta)$, $(\gamma' - \gamma)$. Chacune d'elles s'annule si ces déformations s'annulent. Si les déformations sont infiniment petites, chacune des neuf quantités, dont six seulement sont distinctes, $(\xi'_1 - \xi_1)$, ... sera une fonction linéaire et homogène des trois dilatations et des trois glissements. On aura ainsi obtenu, sans aucune hypothèse contestable, les formules d'équilibre contenant trente-six coefficients caractéristiques de la nature du corps, telles que Lamé les a écrites.

L'établissement des conditions aux limites pourrait de même être dégagé de toute hypothèse contestable.

4. Considérons un solide élastique en équilibre sous l'action de certaines forces extérieures; donnons aux diverses parties de ce solide des déplacements virtuels infiniment petits; les forces extérieures effectueront un certain travail; ce travail devra être, d'après le principe des vitesses virtuelles, égal et de signe contraire au travail des forces intérieures; ce dernier se trouvera donc défini sans qu'aucune hypothèse contestable ait été faite sur la nature des forces intérieures. L'emploi des équations d'équilibre permet de donner de ce travail une expression où les déformations figurent linéairement, et où figurent aussi linéairement les variations subies par ces déformations.

Green a admis (¹) que cette expression du travail des forces intérieures devait être la variation totale d'une fonction uniforme des six déformations en chaque point du corps. Cette hypothèse introduit quinze conditions qui réduisent de trente-six à vingt et un le nombre des coefficients d'élasticité réellement distincts. Les équations de l'élasticité prennent donc une forme intermédiaire entre la forme trop compliquée que leur donne Lamé et la forme trop simplifiée que leur avaient donnée Poisson et Cauchy.

Quelle est la raison d'être du principe admis par Green pour opérer cette réduction considérable du nombre des coefficients d'élasticité?

Ce principe n'est compatible avec la théorie de l'attraction moléculaire que moyennant certaines hypothèses.

D'après la théorie de l'attraction moléculaire, la force donnée qui s'exerce entre deux particules de masses $m$ et $m'$ situées à la distance $r$ est une force répulsive ayant pour grandeur $mm'f(r)$. La fonction $f(r)$ a une forme qui dépend de la nature des molécules $m$, $m'$ et de leur état; il est parfaitement admissible que les déformations de la matière auxquelles appartiennent ces particules influent sur la forme de cette fonction; si, par exemple, ces particules se trouvent au sein d'une matière compressible, la forme de la fonction $f(r)$ pourra dépendre de la densité $\Delta$ de la matière qui forme la particule $m$ et de la densité $\Delta'$ de la matière qui forme la particule $m'$, ce qu'on peut exprimer en écrivant cette fonction sous la forme $f(r, \Delta, \Delta')$. S'il en est ainsi, le travail effectué par les forces intérieures dans une modification infiniment petite

$$\Sigma f(r, \Delta, \Delta') mm' \delta r$$

ne sera pas la variation totale d'une fonction de l'état du système. Ainsi, si l'on veut regarder le principe de Green comme une conséquence du principe des vitesses virtuelles joint à la théorie de l'attraction moléculaire, il faudra convenir que la forme de la fonction d'attraction de deux particules ne dépend pas de l'état de compression ou de déformation de ces deux particules. Cette hypothèse,

(¹) GREEN, *On propagation of light in crystallised media*, 1839.

par exemple, devra être faite, si l'on veut accepter la théorie de M. E. Mathieu sur l'action capillaire (¹).

Green, pour justifier son principe, ne remonte pas si haut; il se contente de remarquer que, si ce principe était inexact, « le mouvement perpétuel serait possible; et nous avons toute raison de penser que les forces, dans l'univers, sont disposées de manière à faire de cela une impossibilité naturelle ».

De là l'idée de relier le principe de Green à l'axiome qui a remplacé, dans la Physique moderne, l'impossibilité du mouvement perpétuel, c'est-à-dire à l'axiome de Carnot. W. Thomson (²) a montré à plusieurs reprises que le principe de Carnot était destiné à devenir le fondement logique de la théorie de l'élasticité; on peut dire que le principe de Carnot est destiné à suppléer au principe des vitesses virtuelles, ou, plutôt, à donner son véritable sens à ce dernier, toutes les fois que les systèmes étudiés se composent d'autre chose que de points matériels et de solides rigides. En particulier dans le cas qui nous occupe, le travail virtuel des forces extérieures doit, pour l'équilibre, être égal, au signe près, à la variation du potentiel thermodynamique interne du système. Le principe de Green est ainsi justifié, du moins dans le cas où le système admet un potentiel thermodynamique interne, hypothèse qui exclut la possibilité des modifications permanentes.

Le principe de Green ouvre, pour écrire les équations de l'équilibre d'élasticité, une voie plus directe que celle qu'ont suivie Navier, Poisson, Cauchy et Lamé. Si le système admet un potentiel thermodynamique interne, celui-ci devra être minimum lorsque le système, soustrait à l'action de toute force extérieure, sera à l'état naturel; car cet état doit être un état d'équilibre stable. On voit alors sans peine que le potentiel thermodynamique interne d'un corps peu déformé doit être formé d'un terme indépendant des déformations et d'une intégrale triple, étendue à tout le système, dont l'élément est une forme homogène et du second degré des six déformations en chaque point du corps. Cette forme dépend de vingt et un coefficients qui sont les coefficients d'élasticité; de plus,

(¹) E. MATHIEU, *Théorie de la capillarité*.

(²) THOMSON et TAIT, *Treatise on natural Philosophy*. Part II, p. 461.

elle doit être toujours positive, ce qui donne une série de conditions d'inégalités relatives à ces coefficients. Il suffira d'écrire que, pour toute déformation infiniment petite du système, la variation de ce potentiel est égale, au signe près, au travail des forces extérieures, pour obtenir les équations de l'équilibre de l'élasticité.

Green et Thomson ont suivi cette voie, qui dispense de passer par l'étude des pressions à l'intérieur d'un corps.

5. Nous avons pris la liberté, dans ce qui précède, de développer quelques-unes des réflexions que nous a suggérées la lecture des premiers Chapitres du Livre de M. E. Mathieu. Abandonnons maintenant ces discussions relatives aux principes de la théorie de l'élasticité, et arrivons à l'exposé que le savant professeur de Nancy nous donne des principales applications de cette science.

Sous le titre *Corps isotropes. — Solutions de quelques problèmes sur l'équilibre d'élasticité de ces corps,* M. E. Mathieu nous donne, au deuxième Chapitre de son Ouvrage, un exposé très clair de quelques-uns des problèmes les plus simples sur la traction et la compression des corps isotropes. Ce Chapitre, joint au premier, où M. E. Mathieu expose les principes, représente, selon nous, la partie élémentaire de l'élasticité que l'on devrait exiger aux examens de la Licence ès Sciences mathématiques ou de la Licence ès Sciences physiques. N'est-il pas regrettable, en effet, que des professeurs de Physique, pourvus de tous leurs grades, ignorent que le problème de la compressibilité des liquides est intimement lié à la détermination du rapport des coefficients de Lamé?

A partir du troisième Chapitre, consacré à la *torsion* et à la *flexion des prismes,* nous entrons dans les régions vraiment difficiles de la théorie de l'élasticité.

Le problème de la torsion et de la flexion des prismes présente de telles difficultés, qu'avant les travaux de de Saint-Venant, un seul cas particulier de ce problème, celui de la torsion uniforme d'une tige à section circulaire, supposée n'être sollicitée qu'aux divers points de ses bases par des forces tangentielles, avait été résolu d'une manière rigoureuse par les efforts simultanés de Poisson, de Cauchy, de Lamé et de Clapeyron. Poisson et Cauchy tentèrent seulement, pour le problème de la flexion, quelques approximations peu satisfaisantes.

De Saint-Venant est parvenu à donner la solution rigoureuse d'un certain nombre de problèmes de torsion et de flexion; voici comment le savant mathématicien caractérise lui-même, dans une note du Livre de Clebsch, l'ingénieuse méthode qu'il a suivie :

« Les formules des composantes de la tension fournissent, comme on sait, par de simples différentiations, les intensités des forces, quand on se donne la loi des déplacements des points. Le problème inverse, celui d'obtenir les déplacements quand on se donne les forces qui les produisent, dépend d'intégrations qu'on ne sait généralement pas effectuer. Mais si l'on prend pour données, à la fois, *une partie* des forces et *une partie* des déplacements ou de leurs rapports, et si l'on cherche quels doivent être, en conséquence, les autres déplacements et les autres forces, on conçoit qu'en réduisant ainsi la part des intégrations, l'on puisse n'en rencontrer que d'abordables, et arriver à la solution rigoureuse et complète d'une série de problèmes de torsion et de flexion qui soient de ceux qu'offre la pratique ou qui leur soient très approximativement assimilables.

» C'est cette méthode *mixte* ou *semi-inverse* que j'ai employée. Je prenais pour *donnée sur les forces* la nullité de toute action sur la surface latérale; à quoi j'ai dû ajouter, par manière d'essai, pour pouvoir poursuivre le calcul, la supposition naturelle que, sur les faces des fibres ou éléments longitudinaux intérieurs, les actions étaient nulles aussi dans tous les sens transversaux; et, pour *donnée sur les déplacements,* que le prisme éprouvait d'un bout à l'autre, tantôt une *torsion uniforme,* tantôt une *flexion,* caractérisée par des dilatations longitudinales inégales, qui ne varient que linéairement dans les sens transversaux.

» Le calcul a justifié le choix de ces données et suppositions, en tant que compatibles entre elles, et il a montré bientôt qu'elles réduisent à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du second ordre la détermination de ce qui est inconnu, notamment la distribution que les forces doivent prendre sur les éléments des bases ou sections extrêmes des prismes pour que les déplacements suivent rigoureusement partout les lois supposées.

» Et cette intégration s'effectue pour une infinité de formes des contours des sections des prismes soit tordus, soit fléchis, comme

je l'ai reconnu dans mon Mémoire de 1853 *sur la torsion*, et dans celui de 1854-1855 *sur la flexion.* »

Clebsch a donné de ce *problème de de Saint-Venant* un exposé plus général; abandonnant toute donnée sur les déplacements, il conserve seulement la donnée de de Saint-Venant sur les forces, et il parvient ainsi à embrasser, dans une même analyse, l'extension, la torsion et la flexion des prismes.

C'est cette méthode de Clebsch que M. E. Mathieu expose avec clarté et élégance, après avoir étudié directement la torsion des cylindres à base circulaire ou elliptique et du prisme rectangle. Indiquons toutefois une objection assez délicate faite par M. E. Mathieu (p. 73), à la possibilité de l'une des hypothèses fondamentales de cette théorie, l'égalité à zéro des pressions sur les faces transversales des fibres.

6. Le Chapitre IV est consacré aux *Équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes.*

On sait que Lamé a, le premier, donné la forme que prennent les équations d'élasticité rapportées à un système triple de surfaces orthogonales. M. E. Mathieu reproduit cette théorie de Lamé, puis il en donne une importante extension.

En général, une famille de surfaces étant donnée, on ne pourra pas trouver deux autres familles de surfaces orthogonales à celles de la première famille et entre elles. Mais les surfaces de la première famille admettront toujours un système de trajectoires orthogonales. Cela étant, sur une surface de la première famille, $\sigma$, traçons les deux systèmes de lignes de courbure $s_1$, $s_2$. Par tous les points des lignes $s_1$, $s_2$, menons des trajectoires orthogonales aux surfaces $\sigma$ de la première famille; nous obtiendrons deux familles de surfaces $\sigma_1$, $\sigma_2$, orthogonales aux surfaces de la première famille, mais, en général, non orthogonales entre elles. Tel est le système de coordonnées curvilignes auquel M. E. Mathieu étend, presque sans modification, l'analyse de Lamé, qui est ainsi largement généralisée.

7. L'étude de la déformation d'une *tige* très longue par rapport à sa section, est un des problèmes les plus importants de la théorie

de l'élasticité. Même dans le cas où la tige est primitivement droite, ce problème ne rentre pas dans celui de la déformation d'un cylindre, parce que, bien que les déformations de chaque partie de la tige soient très petites, les déplacements de certaines parties de la tige sont finis.

Poisson et Cauchy avaient abordé le problème de la déformation des tiges élastiques par des développements en série dont la légitimité est fort douteuse. Kirchhoff a tenté de la même question une solution plus rationnelle qui a été reprise par Clebsch. Voici en quoi consiste cette théorie de Kirchhoff.

La tige, dont la section est très petite, mais non pas infiniment petite, est partagée par des sections infiniment voisines en tronçons infiniment peu épais. Les forces qui sollicitent la tige sont supposées appliquées seulement à ces sections. Chacun des tronçons en lesquels la tige a été partagée, est alors traité comme un prisme auquel on applique les formules de M. de Saint-Venant.

Cette analyse est loin d'échapper à toute critique. M. Boussinesq l'a déjà soumise à une discussion sévère; les reproches qu'on peut lui adresser se résument, d'après M. E. Mathieu, à deux chefs principaux.

En premier lieu, les formules de de Saint-Venant sur la déformation des cylindres sont établies en admettant l'égalité à zéro des tensions sur les faces latérales des fibres en lesquelles un cylindre peut être décomposé. Or, d'après M. E. Mathieu, si cette hypothèse peut être faite pour des cylindres très longs par rapport à leur section, elle est en général contradictoire pour un cylindre dans lequel les dimensions de la section seraient très grandes par rapport à la hauteur; et tel est précisément le cas auquel on les applique dans la théorie de Kirchhoff, puisque chaque tronçon a une hauteur infiniment petite et une section seulement très petite.

En second lieu, pour que les formules de de Saint-Venant soient exactement applicables à un prisme, il faut que les forces extérieures qui sollicitent ce prisme soient appliquées exclusivement à ses deux bases et distribuées dans le plan de ses deux bases suivant une loi que fait connaître la théorie même de de Saint-Venant. Il est bien vrai que, dans le cas où le prisme est long par rapport aux dimensions de sa section, on peut remplacer les forces appliquées aux bases du prisme et distribuées suivant la loi de de Saint-Venant

par des forces statiquement équivalentes quelconques, appliquées aux bases ou aux parties du prisme voisines des bases. Mais une pareille substitution ne peut être admise pour des tronçons de hauteur infiniment petite et de section seulement très petite.

Ces raisons ont poussé M. E. Mathieu à reprendre dès ses fondements la théorie de la déformation des tiges minces. Au lieu de prendre pour point de départ des hypothèses approximatives, M. E. Mathieu commence par établir les équations entièrement rigoureuses de l'équilibre d'une tige droite. C'est seulement lorsque toutes les formules sont obtenues qu'il y introduit certaines hypothèses approximatives, qui lui redonnent les résultats trouvés par Kirchhoff.

Pour étudier la déformation d'une tige courbe, M. E. Mathieu ramène le problème à l'étude des déformations d'une tige droite par l'artifice qu'a imaginé Kirchhoff.

M. E. Mathieu fait de nombreuses applications des résultats trouvés à divers problèmes sur l'équilibre et le mouvement vibratoire des tiges.

8. Le problème des surfaces élastiques est un des plus célèbres de la Physique mathématique; il se relie de très près au problème des membranes parfaitement flexibles. C'est à l'étude de l'équilibre et du mouvement vibratoire des plaques et des membranes planes que M. E. Mathieu consacre le dernier Chapitre du Volume que nous avons sous les yeux.

Jacques Bernoulli a, le premier, donné la figure d'équilibre de la lame élastique; c'est le premier problème d'élasticité qui ait été traité. Euler et Daniel Bernoulli ont ensuite publié un grand nombre de recherches sur cette question; mais le problème général de la plaque élastique présentait de bien autres difficultés. Euler commença à s'en occuper à propos du son des cloches, et un autre, Jacques Bernoulli, à propos des expériences de Chladny; mais leurs recherches n'avaient point amené aux véritables équations d'équilibre de la plaque.

Poisson publia le premier, en 1814, la démonstration de l'équation d'équilibre de la plaque élastique. Lagrange y était parvenu de son côté en examinant le Mémoire dans lequel Sophie Germain cherchait à étendre à la plaque élastique la méthode donnée par

l'auteur de la *Mécanique analytique* pour mettre en équation le problème de la lame élastique. Navier en 1820, Poisson et Cauchy en 1828, en redonnèrent de nouvelles démonstrations qui n'échappent pas d'ailleurs à toute critique.

Poisson et Cauchy avaient donné non seulement l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le déplacement transversal d'une plaque plane, mais encore les conditions aux limites que doit vérifier ce déplacement. Ces conditions aux limites, proposées par Poisson et Cauchy, étaient au nombre de trois.

Dans un important Mémoire publié en 1850, Kirchhoff montra que ce nombre était surabondant. La méthode employée par Kirchhoff pour mettre en équation le problème de la plaque élastique est la méthode générale de Green, fondée sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles. Cette méthode, en redonnant à Kirchhoff, pour le déplacement transversal de la plaque, l'équation aux dérivées partielles déjà connues, lui fit voir que ce déplacement devait satisfaire seulement à deux conditions aux limites et non à trois, comme le voulaient Poisson et Cauchy.

Les raisonnements de Poisson et de Cauchy étaient, en effet, inexacts; on peut, comme l'a fait M. E. Mathieu, mettre l'erreur en évidence et, en corrigeant cette erreur, on retrouve les deux conditions aux limites données par Kirchhoff.

La méthode de Kirchhoff a été exposée par Clebsch dans son Traité classique. Cette méthode n'est point exempte de défaut. Elle repose sur l'hypothèse non justifiée qu'une droite, normale à la plaque avant la déformation, lui demeure encore normale après la déformation. M. de Saint-Venant a signalé ce que cette hypothèse avait de peu vraisemblable. Sur son conseil, M. Boussinesq a donné de l'équilibre des plaques une théorie qui en est indépendante. Abandonnant l'emploi du principe des vitesses virtuelles, M. Boussinesq examine directement l'équilibre de chacun des éléments de la plaque. Il obtient, pour le déplacement transversal, l'équation aux dérivées partielles donnée par Poisson et les conditions aux limites obtenues par Kirchhoff.

M. E. Mathieu est revenu à la méthode de G. Kirchhoff, mais en la rendant sauve de toute hypothèse contestable sur les glissements parallèles à la plaque. Il est parvenu ainsi à une théorie dont

il nous semble difficile de surpasser la généralité, la rigueur et l'élégance.

Le problème de la membrane flexible est ensuite traité par M. E. Mathieu suivant une méthode entièrement analogue à celle qui lui a servi à trouver les équations d'équilibre de la plaque élastique; la similitude des méthodes permet de bien saisir les analogies qui unissent les deux problèmes comme les différences qui les séparent. M. E. Mathieu indique ensuite la voie plus rapide par laquelle Poisson a traité le même problème.

Les principes généraux établis dans ce Chapitre servent à étudier dans tous leurs détails l'équilibre et le mouvement vibratoire d'une plaque circulaire.

Tel est le résumé des matières contenues dans ce premier Volume sur l'élasticité des corps solides; nous souhaitons que ce résumé, malgré ses imperfections, ait réussi à bien mettre en lumière les qualités éminentes de ce Livre; l'élégance avec laquelle les principes sont établis conformément aux idées de Lamé; et surtout la perfection des trois Chapitres sur la torsion et la flexion des prismes, sur les tiges et sur les plaques et les membranes; tout ce que, depuis cinquante ans, ont écrit d'excellent sur ces questions de Saint-Venant, Kirchhoff, Clebsch et M. Boussinesq se trouve condensé dans cet exposé parfaitement clair et élégant.

M. Mathieu nous promet à bref délai un second Volume qui, plus encore que celui dont on vient de lire l'analyse, subira l'influence des recherches personnelles de l'auteur. Nous l'attendons avec impatience.

P. Duhem.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SALMON. — LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. Ouvrage traduit de l'anglais par *O. Chemin*. Deuxième édition française publiée d'après la quatrième édition anglaise. 1 vol. in-8°, 576 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890.

L'éloge du *Traité d'Algèbre supérieure* du Rév. Salmon n'est plus à faire : c'est un Livre qui restera longtemps précieux par le nombre de faits algébriques qu'il contient, et par le caractère suggestif que présentent les démonstrations, lors même qu'elles ne sont pas poussées jusqu'au dernier degré de rigueur; l'auteur a, du reste, l'excellente habitude de prévenir le lecteur quand ce dernier inconvénient se présente. Il était éminemment désirable que cet excellent Livre fût traduit en français, car il ne s'adresse pas exclusivement aux savants de profession, obligés, malgré qu'ils en aient, à se débrouiller tant bien que mal au milieu des diverses langues de l'Europe : l'Algèbre, dite *supérieure*, pénètre de jour en jour davantage dans l'enseignement élémentaire, et les parties essentielles qu'on en dévoile aux élèves, si intéressantes par elles-mêmes et liées si intimement aux vérités géométriques, éveillent chez eux une curiosité qui ne demande qu'à se satisfaire. Ils accueilleront sans doute avec plaisir, comme leurs maîtres, la traduction que leur offre M. Chemin; il y aura tout bénéfice pour eux à entrer ainsi en contact direct avec un savant qui a pris lui-même une large part au développement de cette partie de la Science, dont il a décrit les résultats les plus importants dans son *Treatise of higher Algebra*. La première édition française, si utile qu'elle ait été, était un peu écourtée, et presque tout ce qu'elle contenait avait passé dans l'enseignement usuel. Ajoutons que le nouvel éditeur a conservé, sous forme de notes, les deux intéressantes Leçons sur les formes ternaires et quaternaires, que M. Bazin avait introduites dans cette première édition; il n'avait garde d'ailleurs d'oublier les deux Notes dont M. Hermite l'avait enrichie.

J. T.

---

## MÉLANGES.

### EXPOSITION DE LA DÉMONSTRATION, DONNÉE PAR M. WEIERSTRASS DANS LES « SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER AKADEMIE » (DÉCEMBRE 1885), DE CE THÉORÈME : « $\pi$ EST UN NOMBRE TRANSCENDANT » ;

PAR M. JULES MOLK.

1. Rappelons d'abord quelques définitions et propositions d'Algèbre :

Si $z_0$ est racine de l'équation

$$\alpha_0 z^p + \alpha_1 z^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} z + \alpha_p = 0,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ sont des nombres *entiers,* nous dirons, avec M. Kronecker, que $z_0$ est un *nombre algébrique;* dans le cas particulier où $\alpha_0 = 1$, nous dirons que $z_0$ est un *nombre algébrique entier.*

Un nombre algébrique entier qui est en même temps un nombre rationnel est un nombre entier, au sens ordinaire du mot.

Toute fonction rationnelle entière à coefficients entiers d'un nombre algébrique entier est un nombre algébrique entier.

La somme de deux nombres algébriques entiers, ou d'un nombre fini quelconque de nombres algébriques entiers, est un nombre algébrique entier.

La racine carrée d'un nombre algébrique est un nombre algébrique; plus généralement, toute fonction algébrique d'un nombre algébrique est elle-même un nombre algébrique [1].

2. Soient

$$h(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_{k-1} z + b_k,$$
$$H(z) = B_0 z^k + B_1 z^{k-1} + \ldots + B_{k-1} z + B_k$$

deux polynômes entiers en $z$, de degré $k$, et tels que l'on ait

$$\frac{d}{dz}[H(z)e^{-z}] + h(z)e^{-z} = 0 \tag{1}$$

ou, en désignant par $H'(z)$ la dérivée de $H(z)$

$$H'(z) - H(z) + h(z) = 0; \tag{1 bis}$$

[1] L'équation algébrique entière qui relie la *fonction* au *nombre* doit, bien entendu, avoir ses coefficients rationnels ou, si l'on veut, entiers.

les coefficients de ces deux polynômes seront liés par les relations

$$(2)\quad \begin{cases} B_0 = b_0, \\ B_\mu = (k-\mu+1)B_{\mu-1} + b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

qui montrent que les coefficients de l'un quelconque des polynômes s'expriment linéairement au moyen des coefficients de l'autre; en particulier, les coefficients de $H(z)$ sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients entiers des coefficients de $h(z)$; ainsi [1]

$$B_\mu = (k-\mu+1)(k-\mu+2)\ldots k b_0$$
$$+ (k-\mu+1)(k-\mu+2)\ldots(k-1)b_1 + \ldots + (k-\mu+1)b_{\mu-1} + b_\mu.$$

3. Soit

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z + a_{n+1}$$

un polynôme entier en $z$, à coefficients entiers, de degré $n+1$, dont le discriminant soit différent de zéro, en sorte que les $n+1$ nombres algébriques

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_n,$$

définis par l'équation $f(z) = 0$, soient tous différents.

Soit, en outre,

$$h(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

un polynôme entier en $z$, de degré au plus égal à $n$ : les coefficients de ce polynôme, entièrement arbitraires, seront regardés tantôt comme des quantités déterminées, tantôt comme des indéterminées.

A l'aide de ces deux polynômes $f(z)$ et $h(z)$ nous déterminerons, d'une façon univoque, une suite de $m+1$ polynômes

$$H_0(z), \quad H_1(z), \quad \ldots, \quad H_m(z),$$

au moyen des $m+1$ égalités

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}[H_0(z)e^{-z}] + h(z)e^{-z} = 0, \\ \dfrac{d}{dz}[H_\mu(z)e^{-z}] + f'(z)H_{\mu-1}(z)e^{-z} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

---

[1] On peut remarquer, avec M. Hermite, que l'on a

$$H(z) = h(z) + h'(z) + h''(z) + \ldots + h^{(k)}(z).$$

Le nombre entier $m$ reste arbitraire, on en disposera plus tard; $f'(z)$ désigne la dérivée du polynôme $f(z)$

En posant

$$h_0(z) = h(z), \qquad h_\mu(z) = f'(z)\mathrm{H}_{\mu-1}(z),$$

les égalités (3) prennent la forme

$$\frac{d}{dz}[\mathrm{H}_\mu(z)e^{-z}] + h_\mu(z)e^{-z} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

En tenant compte des relations analogues à (1 *bis*), on déduit aisément de ces égalités les suivantes, où $f^{m-\mu}(z)$ désigne la puissance $(m-\mu)^{\text{ième}}$ de $f(z)$,

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\mathrm{H}_\mu(z)}{(m-\mu)!}f^{m-\mu}(z)e^{-z}\right] = \frac{h_{\mu+1}f^{m-\mu-1}(z)e^{-z}}{(m-\mu-1)!} - \frac{h_\mu(z)f^{m-\mu}(z)e^{-z}}{(m-\mu)!}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités et celle-ci

$$\frac{d}{dz}[\mathrm{H}_m(z)e^{-z}] = -h_m(z)e^{-z},$$

on trouve

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{\mathrm{H}_\mu(z)}{(m-\mu)!}f^{m-\mu}(z)\,e^{-z}\right] + \frac{h(z)}{m!}f^m(z)e^{-z} = 0;$$

si donc on pose

$$(4) \qquad \mathrm{K}_m(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu=m}\left[\frac{\mathrm{H}_\mu(z)}{(m-\mu)!}f^{m-\mu}(z)\right],$$

on aura

$$(5) \qquad \mathrm{K}'_m(z) - \mathrm{K}_m(z) + \frac{h(z)}{m!}f^m(z) = 0.$$

On verra bientôt le parti que l'on peut tirer de ces dernières égalités; la considération du polynôme $\mathrm{K}_m(z)$, quoique ce polynôme ne soit dans la démonstration qu'un intermédiaire, nous permettra, en effet, d'établir les propriétés des éléments analytiques qui jouent le rôle essentiel. Mais il nous faut faire d'abord sur les polynômes $\mathrm{H}_0(z)$, $\mathrm{H}_1(z)$, ..., $\mathrm{H}_m(z)$ quelques remarques que leur définition rend d'ailleurs évidentes. En allant de proche en proche à partir de $\mathrm{H}_0(z)$, on voit d'abord que leurs coefficients sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients entiers des quantités $c_0, c_1, \ldots, c_n$; si on laisse ces quantités indéterminées,

les degrés des polynômes sont respectivement $n$, $n+n$, ..., $n+\mu n$, ..., $n+mn$; dans tous les cas, ces derniers nombres seront donc des limites supérieures des degrés. Il en résulte que le degré de $K_m(z)$ est au plus égal à $(m+1)(n+1)-1$; en effet, le degré du terme

$$\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!}f^{m-\mu}(z)$$

est au plus égal à

$$n+\mu n+(m-\mu)(n+1)=(m+1)(n+1)-1-\mu.$$

La même conclusion se tire de l'égalité (5).

En laissant toujours indéterminées les quantités $c_0$, $c_1$, ..., $c_n$, on voit que le premier coefficient de $h_1(z)$, et par suite le premier coefficient de $H_1(z)$, contient $a_0$ en facteur; le premier et le second coefficient de $h_2(z)$ sont respectivement divisibles par $a_0^2$ et $a_0$; il en est donc de même du premier et du second coefficient de $H_2(z)$ et, finalement, les coefficients des puissances

$$z^{mn+n},\quad z^{mn+n-1},\quad \ldots,\quad z^{mn+n-(m-1)},$$

qui figurent dans $H_m(z)$, sont respectivement divisibles par

$$a_0^m,\quad a_0^{m-1},\quad \ldots,\quad a_0.$$

Par suite, en se reportant à la règle de la division des polynômes, on voit que l'on peut écrire

$$a_0^{m(n-1)}H_m(z)=G(z,m)f(z)+g(z,m),$$

en désignant par $G(z, m)$, $g(z, m)$ des polynômes entiers en $z$ dont les coefficients sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients entiers des indéterminées $c_0$, $c_1$, ..., $c_n$, et dont le second est au plus de degré $n$; on pourra donc écrire

$$g(z,m)=\sum_{\nu=0}^{\nu=n}c_\nu\, g_\nu(z,m),$$

$$G(z,m)=\sum_{\nu=0}^{\nu=n}c_\nu\, G_\nu(z,m);$$

les coefficients des polynômes $g_\nu(z, m)$, $G_\nu(z, m)$, où les $c$ ne figurent plus, seront des nombres entiers; les polynômes $g_\nu(z, m)$ sont de degré au plus égal à $n$; c'est eux qui vont jouer dans la démonstration le rôle essentiel, grâce aux propriétés que nous allons établir.

Les notations précédentes nous permettent d'écrire

$$(6) \qquad a_0^{m(n-1)} \mathrm{H}_m(z) = f(z) \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_\nu \mathrm{G}_\nu(z, m) + \sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_\nu g_\nu(z, m).$$

Lemme I. — *Si les quantités $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ne sont pas toutes nulles, la fonction $\mathrm{H}_m(z)$ n'est pas divisible par $f(z)$.*

L'égalité (4), qui définit le polynôme $\mathrm{K}_m(z)$, montre en effet que la différence

$$\mathrm{K}_m(z) - \mathrm{H}_m(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \frac{\mathrm{H}_\mu(z)}{(m-\mu)!} f^{m-\mu}(z)$$

est divisible par $f(z)$; il suffit donc de prouver que le polynôme $\mathrm{K}_m(z)$ n'est pas divisible par $f(z)$. Or, si, en désignant par $\rho$ un nombre entier positif, et par $\mathfrak{L}_m(z)$ un polynôme qui ne soit plus divisible par $f(z)$ on avait

$$\mathrm{K}_m(z) = \mathfrak{L}_m(z) f^\rho(z),$$

on voit d'abord, puisque le degré de $\mathrm{K}_m(z)$ est au plus égal à $(m+1)(n+1)-1$, que $\rho$ ne pourrait dépasser $m$; en substituant ensuite la valeur précédente de $\mathrm{K}_m(z)$ dans l'égalité (5), on trouverait, après avoir divisé par $f^{\rho-1}(z)$,

$$\left[\mathfrak{L}'_m(z) - \mathfrak{L}_m(z) + \frac{h(z)}{m!} f^{m-\rho}(z)\right] f(z) + \rho\, \mathfrak{L}_m(z) f'(z) = 0;$$

cette égalité montre que $f(z)$ devrait diviser $\rho\,\mathfrak{L}_m(z) f'(z)$, et par conséquent $\rho\,\mathfrak{L}_m(z)$, puisque $f(z)$ est premier avec $f'(z)$; or ceci n'est possible que si $\rho$ est nul. Le lemme est donc démontré.

Lemme II. — *Les polynômes $g_0(z, m), g_1(z, m), \ldots, g_n(z, m)$ précédemment définis sont linéairement indépendants.*

Puisque le polynôme $\mathrm{H}_m(z)$ n'est divisible par $f(z)$ que dans le cas où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont nuls, l'identité (6) montre, en effet, que l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_\nu g_\nu(z, m)$$

ne peut être identiquement nulle en $z$ que si toutes les quantités $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont nulles.

Il résulte de là que le déterminant

$$\begin{vmatrix} g_0(z_0, m) & g_1(z_0, m) & \dots & g_n(z_0, m) \\ g_0(z_1, m) & g_1(z_1, m) & \dots & g_n(z_1, m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(z_n, m) & g_1(z_n, m) & \dots & g_n(z_n, m) \end{vmatrix},$$

où $z_0, z_1, \dots, z_n$ sont $n+1$ nombres distincts, ne peut être nul; si, en effet, ce déterminant était nul, il existerait $n+1$ nombres $c_0$, $c_1, \dots, c_n$, non tous nuls, tels que l'on eût

$$c_0 g_0(z_\nu, m) + c_1 g_1(z_\nu, m) + \dots + c_n g_n(z_\nu, m) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n);$$

la fonction entière de $z$

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \dots + c_n g_n(z, m),$$

du degré $n$ au plus, s'annulant pour $n+1$ valeurs distinctes de $z$, serait donc identiquement nulle en $z$, ce qui est impossible.

Lemme III. — *Si l'on désigne toujours par $z_0, z_1, \dots, z_n$ les $n+1$ nombres algébriques différents que définit l'équation algébrique entière, de degré $n+1$, à coefficients entiers, à discriminant non nul*

$$f(z) = 0,$$

*et si $\delta$ est un nombre positif donné quelconque, on peut, de diverses manières, former un système de $n+1$ polynômes*

$$g_0(z), \quad g_1(z), \quad \dots, \quad g_n(z),$$

*à coefficients entiers, de degrés inférieurs ou égaux à $n$, tels que chacun des nombres positifs* (¹)

$$|g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0}| \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n)$$

*soit plus petit que $\delta$, et tels que le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_1(z_0) & \dots & g_n(z_0) \\ g_0(z_1) & g_1(z_1) & \dots & g_n(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(z_n) & g_1(z_n) & \dots & g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

*soit différent de zéro.*

Conservons en effet toutes les notations précédentes et formons.

(¹) Le symbole $|A|$ désigne la valeur absolue ou le module d'une quantité réelle ou imaginaire A.

comme il a été expliqué plus haut, à l'aide du polynôme donné $f(z)$ et du polynôme $h(z)$ à coefficients indéterminés $c_0, c_1, \ldots, c_n$, la suite de polynômes

$$H_0(z), \quad H_1(z), \quad \ldots, \quad H_m(z),$$

ainsi que le polynôme $K_m(z)$ qui s'en déduit par la relation (4), on aura

$$\frac{d}{dz}[K_m(z)e^{-z}] = -\frac{h(z)}{m!}f^m(z)e^{-z};$$

en désignant par $\lambda$ l'un des entiers positifs $1, 2, \ldots, n$ et en intégrant entre les limites $z_0$ et $z_\lambda$, on aura

$$\begin{aligned}&K_m(z_\lambda)e^{-z_\lambda} - K_m(z_0)e^{-z_0}\\ &\quad = H_m(z_\lambda)e^{-z_\lambda} - H_m(z_0)e^{-z_0} = -\int_{z_0}^{z_\lambda}\frac{h(z)}{m!}f^m(z)e^{-z}dz;\end{aligned}$$

en multipliant par $a_0{}^{m(n-1)}$ et en tenant compte de l'égalité (6), on déduit de là

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} c_\nu[g_\nu(z_\lambda, m)e^{-z_\lambda} - g_\nu(z_0, m)e^{-z_0}] = -\int_{z_0}^{z_\lambda}\frac{h(z)}{m!}[a_0^{n-1}f(z)]^m e^{-z}dz.$$

Cette égalité en fournit $n+1$ autres en égalant dans les deux membres les coefficients des indéterminées $c_0, c_1, \ldots, c_n$, savoir

$$g_\nu(z_\lambda, m)e^{-z_\lambda} - g_\nu(z_0, m)e^{-z_0} = -\int_{z_0}^{z_\lambda}\frac{z^\nu}{m!}[a_0^{n-1}f(z)]^m e^{-z}dz;$$

on peut toujours supposer que l'intégration soit effectuée le long du segment de droite qui va du point $z_0$ au point $z_\lambda$ : lorsque $z$ parcourt ce segment de droite, les quantités

$$|z^\nu e^{-z}|, \quad |a_0^{n-1}f(z)|$$

restent inférieures à des nombres positifs fixes $\theta_{\nu,\lambda}$, $\varphi_\lambda$, et l'égalité précédente montre que l'on a

$$|g_\nu(z_\lambda, m)e^{-z_\lambda} - g_\nu(z_0, m)e^{-z_0}| < |z_\lambda - z_0|\,\theta_{\nu,\lambda}\frac{\varphi_\lambda^m}{m!};$$

on aura donc, quels que soient les indices $\lambda$, $\nu$,

$$|g_\nu(z_\lambda, m)e^{-z_\lambda} - g_\nu(z_0, m)e^{-z_0}| < l\theta\frac{\varphi^m}{m!},$$

pourvu que les nombres positifs fixes $l$, $\theta$, $\varphi$ soient respectivement

supérieurs à tous les nombres

$$|z_\lambda - z_0|, \quad \theta_{\nu,\lambda}, \quad \varphi_\lambda \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \lambda = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Les nombres $\theta$, $\lambda$, $\varphi$ ne dépendent pas de $m$; or, lorsque l'on fait croître $m$ indéfiniment, le nombre

$$\frac{\varphi^m}{m!}$$

tend vers zéro; si donc on se donne un nombre positif $\delta$, on pourra fixer un nombre entier positif M, tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de $m$ égales ou supérieures à M,

$$l\theta \frac{\varphi^m}{m!} |e^{z_\lambda + z_0}| < \delta,$$

et cela quel que soit l'indice $\lambda$ pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$; si l'on désigne par $g_\nu(z)$ la fonction $g_\nu(z, m)$ pour une valeur fixe de $m$ qui est assujettie seulement à être supérieure ou égale à M, il est clair que l'on aura

$$(7) \quad |g_\nu(z_\lambda) e^{z_0} - g_\nu(z_0) e^{z_\lambda}| < \delta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n);$$

la première partie du lemme est donc établie, puisque les coefficients des polynômes $g_\nu(z)$ sont entiers et que leurs degrés respectifs sont égaux ou inférieurs à $n$.

Quant au déterminant D, c'est, pour une valeur spéciale donnée à $m$, le déterminant considéré dans le lemme II; il est donc différent de zéro.

Théorème I. — *Le nombre e ne peut être racine d'aucune équation algébrique entière à coefficients entiers.*

Les résultats contenus dans les lemmes I, II, III sont équivalents à quelques-unes des propositions données par M. Hermite dans son admirable Mémoire *Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus,* t. LXXVII, 1873, p. 18, 74, 226, 285). La considération de polynômes liés par une relation un peu plus générale que la relation (1) joue, comme on sait, un rôle essentiel dans ce Mémoire; mais c'est par une voie différente que l'illustre auteur est parvenu à des égalités qui équivalent aux inégalités (7), égalités d'où il a déduit sa seconde démonstration du théorème que nous venons d'énoncer. Il convient, en restant au même point de vue que précédemment, de

rappeler ici cette démonstration, qui facilitera l'intelligence de la démonstration donnée par M. Weierstrass, du théorème analogue pour le nombre $\pi$.

Supposons que le nombre $e$ soit racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers

$$\Phi(z) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 z + \mathcal{A}_2 z^2 + \ldots + \mathcal{A}_n z^n = 0.$$

On peut évidemment supposer que cette équation est de degré supérieur à 1, puisque l'on sait que $e$ est un nombre irrationnel.

Prenons pour $f(z)$ le polynôme

$$f(z) = z(z-1)\ldots(z-n);$$

on aura

$$z_\lambda = \lambda, \qquad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

On déterminera d'abord le nombre $\delta$ de manière que son produit par la somme $\mathcal{A}$ des valeurs absolues des nombres entiers $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ soit plus petit que 1. Puis on déterminera, comme il a été expliqué dans le lemme précédent, à l'aide de la fonction $f(z)$, les polynômes à coefficients entiers, $g_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$); les inégalités (7) pourront alors être remplacées par les égalités suivantes

$$g_\nu(0)\, e^\lambda - g_\nu(\lambda) = \delta_{\nu,\lambda} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où l'on a

$$\delta_{\nu,0} = 0, \qquad |\,\mathcal{A}\,\delta_{\nu,\lambda}\,| < 1.$$

Si l'on multiplie par $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ les égalités que l'on obtient en supposant successivement $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$, et que l'on ajoute, on obtiendra

$$g_\nu(0)\,\Phi(e) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \mathcal{A}_\lambda\, g_\nu(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \mathcal{A}_\lambda\, \delta_{\nu,\lambda},$$

d'où

$$\left|\, g_\nu(0)\,\Phi(e) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \mathcal{A}_\lambda\, g_\nu(\lambda) \,\right| < 1$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Dans cette inégalité figure le nombre $\Phi(e)$ dont on veut prouver qu'il n'est pas nul; pour cela, il suffit de montrer que quelqu'une des inégalités

$$\left|\, \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \mathcal{A}_\lambda\, g_\nu(\lambda) \,\right| < 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

est impossible; or, puisque tous les nombres $\mathcal{A}_\lambda g_\nu(\lambda)$ sont entiers, les inégalités précédentes ne pourraient avoir toutes lieu que si l'on avait

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \mathcal{A}_\lambda g_\nu(\lambda) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n);$$

mais cela est impossible, puisque les nombres entiers $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ ne sont pas tous nuls, et que le déterminant des coefficients de ces quantités n'est pas nul.

Pour établir, d'une façon toute semblable, la transcendance du nombre $\pi$, nous n'avons plus besoin que du lemme suivant, pour lequel nous reprenons les notations qui nous ont servi avant de parler du nombre $e$.

Lemme IV. — *Chacune des quantités*

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

*est un nombre algébrique entier.*

D'abord chacun des nombres

$$a_0 z_0, \quad a_0 z_1, \quad \ldots, \quad a_0 z_n$$

est un nombre algébrique entier, puisque l'on a

$$a_0^n f(z) = (a_0 z)^{n+1} + a_1 (a_0 z)^n + a_2 a_0 (a_0 z)^{n-1} + \ldots + a_{n+1} a_0^n.$$

Soit maintenant

$$g_\nu(z) = \alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \ldots + \alpha_k;$$

on aura

$$a_0^k g_\nu(z_\lambda) = \alpha_0 (a_0 z_\lambda)^k + \alpha_1 a_0 (a_0 z_\lambda)^{k-1} + \ldots + \alpha_k a_0^k.$$

Le second membre est une fonction entière à coefficients entiers du nombre algébrique entier $a_0 z_\lambda$; c'est donc, en vertu d'une des remarques préliminaires, un nombre algébrique entier; d'ailleurs $k$ est au plus égal à $n$ et le nombre

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda),$$

qui s'obtient en multipliant par un nombre entier le nombre algébrique entier $a_0^k g_\nu(z_\lambda)$, est lui-même un nombre algébrique entier.

Théorème II. — *La fonction transcendante entière de* $x$,

$$e^x + 1,$$

*ne s'annule pour aucune valeur algébrique de* $x$.

Soit, en effet, un nombre algébrique quelconque $x_1$ défini comme l'une des racines de l'équation de degré $r$

$$x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r = 0,$$

dont les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sont des nombres rationnels.

On peut évidemment supposer que cette équation a au moins deux racines distinctes : autrement $x_1$ serait un nombre rationnel réel et $e^{x_1} + 1$ serait, par suite, une quantité positive.

L'équation qui définit $x_1$ a alors encore $r - 1$ racines $x_2, x_3, \ldots, x_r$, et il suffira de démontrer que la quantité

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda} + 1)$$

est différente de zéro, quels que soient l'entier $r$ et les nombres rationnels $b_1, b_2, \ldots, b_r$. Or, si l'on désigne par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_r$$

$r$ variables quelconques, on a identiquement

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum e^{\varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2 + \ldots + \varepsilon_r\xi_r},$$

où la somme est étendue aux $2^r = p$ combinaisons que l'on obtient en donnant, de toutes les manières possibles, aux nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ les valeurs zéro et un. Si donc on désigne par

$$\zeta_0, \quad \zeta_1, \quad \ldots, \quad \zeta_{p-1}$$

les $p$ fonctions

$$\varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2 + \ldots + \varepsilon_r\xi_r,$$

rangées dans un ordre quelconque, on aura

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{\xi_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} e^{\zeta_\mu};$$

et de même, en désignant par $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ ce que deviennent les fonctions $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ quand on y remplace $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ par $x_1, x_2, \ldots, x_r$,

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} e^{z_\mu};$$

parmi les quantités $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ figurent les quantités

$$0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r;$$

si donc on suppose que parmi les quantités $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ il y en ait $n+1$ qui soient différentes, on aura

$$n > 1.$$

On peut toujours supposer que les quantités $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_p$ soient rangées de manière que les $n+1$ premières soient différentes et que la première $z_0$ soit égale à zéro. Il est ensuite bien aisé d'établir que les quantités

$$z_0 = 0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

sont les racines d'un polynôme

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z,$$

à coefficients entiers. Si, en effet, on forme le produit

$$\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} (z - z_\lambda),$$

on obtiendra évidemment un polynôme en $z$ dont les coefficients seront des fonctions symétriques entières de $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$, à coefficients entiers; ce sont donc aussi des fonctions symétriques à coefficients entiers de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et par conséquent des nombres rationnels. Il suffira de diviser ce polynôme par le plus grand commun diviseur qu'il a avec sa dérivée, et de multiplier au besoin le quotient par un nombre entier convenablement choisi, pour obtenir le polynôme cherché $f(z)$, dans lequel on pourra évidemment supposer que le premier coefficient $a_0$ est positif.

Déterminons maintenant le nombre positif $\delta$ de manière que l'on ait

$$(p-1) a_0^n \delta < 1,$$

et formons ensuite, à l'aide du polynôme $f(z)$ et d'après les règles du lemme III, les polynômes à coefficients entiers

$$g_0(z), \quad g_1(z), \quad \ldots, \quad g_{n+1}(z);$$

les inégalités (7) pourront être remplacées par les égalités suivantes

$$a_0^n g_\nu(0) e^{z_\lambda} - a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \delta_{\nu,\lambda} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

où l'on a

$$\delta_{\nu,0} = 0, \qquad |(p-1)\delta_{\nu,\lambda}| < 1;$$

on peut même attribuer à $\lambda$ toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$; celle des égalités qui se rapporte au cas où l'on a

$$\lambda = j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

se trouvera alors répétée $\beta_j$ fois, en désignant par $\beta_j$ le nombre des quantités

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1}$$

qui sont égales à $z_j$.

En donnant donc à $\lambda$ les valeurs $0, 1, \ldots, p-1$ et additionnant les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$a_0^n g_\nu(0) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} e^{z_\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \delta_{\nu,\lambda}$$

ou

$$\left| a_0^n g_\nu(0) \prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda}+1) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) \right| < 1.$$

Dans cette dernière égalité figure la quantité

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda}+1),$$

dont il faut prouver qu'elle n'est pas nulle; pour cela, il suffit de montrer que l'une au moins des inégalités

$$(8) \qquad \left| \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) \right| < 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

est impossible. Or les quantités

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

sont toutes des nombres *entiers :* en effet, l'expression précédente est une fonction symétrique à coefficients entiers de $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$, par conséquent de $x_1, x_2, \ldots, x_r$; c'est donc un nombre *rationnel.* Mais on a prouvé que les quantités

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

étaient des nombres *algébriques entiers;* il en est de même, en

vertu d'une des remarques préliminaires, de la somme d'un nombre fini de ces quantités; par conséquent,

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

est à la fois un nombre rationnel et un nombre algébrique entier; *c'est un nombre entier*.

Les inégalités (8) ne peuvent donc être vérifiées que si l'on a

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum_{j=0}^{j=n} \beta_j g_\nu(z_j) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Or cela est impossible, puisque les nombres positifs $\beta_j$ ne sont pas nuls et que le déterminant de leurs coefficients est différent de zéro.

Corollaire. — *Le nombre $\pi$ ne peut être algébrique.* Autrement en effet, les nombres $-\pi^2$, $\sqrt{-\pi^2} = \pi i$ seraient aussi algébriques; or on a

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Il résulte de ce corollaire que *la quadrature du cercle ne peut être effectuée par aucune construction géométrique où l'on ne fait usage que de courbes ou de surfaces algébriques.*

La première démonstration de la transcendance du nombre $\pi$ est due, comme on sait, à M. Lindemann (*Mathematische Annalen*, t. XX). Elle suppose connu l'ensemble des résultats obtenus par M. Hermite dans son Mémoire déjà cité, tandis que la démonstration très élémentaire que l'on doit à M. Weierstrass, et que nous venons de reproduire, n'implique, parmi ces résultats, que ce qui semble strictement indispensable (1).

(1) La seconde Partie du Mémoire de M. Weierstrass fera l'objet d'un prochain article.

## EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. GOMES TEIXEIRA A M. HERMITE.

Permettez, Monsieur, que je prenne la liberté de vous présenter quelques conséquences relatives aux développements des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$ et $\cos(x-a)$, que je viens de déduire de la considération de l'intégrale curviligne

$$J = \int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}.$$

Je prendrai pour contour de l'intégration le rectangle, dont le centre est le point qui a pour affixe $a$, et dont les côtés sont deux droites parallèles à l'axe des abscisses, égales à $\pi$, et deux droites parallèles à l'axe des ordonnées, égales à $2l$; et je supposerai que la fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'aire limitée par ce contour, et que $x$ est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

1. Cela posé, j'applique à l'intégrale J le théorème de Cauchy qui donne l'expression de l'intégrale des fonctions uniformes, prise le long d'un contour fermé, et je trouve

$$J = 2i\pi(A+B),$$

en représentant par A et B les résidus de la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\sin^m(x-a)}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)},$$

par rapport à $x$ et à $a$, qui sont les racines de $\sin(z-x)=0$ et $\sin(z-a)=0$ qui sont représentées par des points de l'intérieur de l'aire considérée.

Le résidu de $F(z)$, par rapport à $x$, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$F(x+h) = \frac{f(x+h)\sin^m(x-a)}{\sin h\,\sin^m(x-a+h)},$$

en série ordonnée suivant les puissances de $h$; et nous avons, par conséquent,

$$A = f(x).$$

Le résidu B de $F(z)$, par rapport à $a$, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans

le développement de

$$F(a+h) = \frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{\sin(a-x+h)\sin^m h} = \frac{f(a+h)\sin^m(x-a)}{h^m \sin(a-x+h)\dfrac{\sin^m h}{h^m}}$$

en série ordonnée suivant les puissances de $h$. Mais nous avons, en développant les trois fonctions

$$f(a+h), \quad \sin^{-1}(a-x+h), \quad \frac{h^m}{\sin^m h}$$

en série ordonnée suivant les puissances de $h$,

$$F(a+h) = \frac{1}{h^m}\sum \frac{h^u}{u!} f^u(a)\sin^m(x-a)$$
$$\times \sum \frac{h^v}{v!}\left[\frac{d^v \sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0 \times \sum \frac{h^w}{w!}\left[\frac{d^w(h\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,h)^m}{dh^w}\right]_0.$$

Donc on a

$$B = \sum \frac{\sin^m(x-a)}{u!\,v!\,w!} f^u(a)\left[\frac{d^v \sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0 \left[\frac{d^w(h\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,h)^m}{dh^w}\right]_0,$$

où la somme représentée par $\Sigma$ se rapporte à toutes les solutions entières positives ou nulles de l'équation

$$u+v+w = m-1.$$

En formant maintenant les dérivées successives de $\sin^{-1}(x-a)$, je trouve

$$\left[\frac{d^v \sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0$$
$$= -\frac{d^v \sin^{-1}(x-a)}{dx^v} = \frac{B_0 + B_1 \sin^2(x-a) + \ldots + B_{\frac{1}{2}v} \sin^v(x-a)}{\sin^{v+1}(x-a)},$$

si $v$ est un nombre pair, et

$$\left[\frac{d^v \sin^{-1}(a-x+h)}{dh^v}\right]_0$$
$$= \frac{\cos(x-a)\left[B'_0 + B'_1 \sin^2(x-a) + \ldots + B'_{\frac{1}{2}(v-1)} \sin^{v-1}(x-a)\right]}{\sin^{v+1}(x-a)},$$

si $v$ est un nombre impair.

Donc l'expression du résidu B a la forme suivante

$$B = -[K_1 \sin(x-a) + K_3 \sin^3(x-a) + \ldots + K_{m-1}\sin^{m-1}(x-a)]$$
$$-[L_0 + L_2 \sin^2(x-a) + \ldots + L_{m-2}\sin^{m-2}(x-a)]\cos(x-a),$$

si $m$ est un nombre pair, et la forme suivante

$$B = -[K'_0 + K'_2 \sin^2(x-a) + \ldots + K'_{m-1} \sin^{m-1}(x-a)]$$
$$-[L'_1 \sin(x-a) + L'_3 \sin^3(x-a) + \ldots + L'_{m-2} \sin^{m-2}(x-a)]\cos(x-a),$$

si $m$ est un nombre impair.

Nous avons donc les formules suivantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = {} & \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) \\ & + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n} \sin^{2n}(x-a) \\ & + \int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}, \end{aligned} \right.$$

si $m$ est pair;

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = {} & \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n} \sin(x-a) \\ & + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) \\ & + \int_s \frac{f(z)\sin^m(x-a)\,dz}{\sin(z-x)\sin^m(z-a)}, \end{aligned} \right.$$

si $m$ est impair.

2. *Détermination des coefficients qui entrent dans les formules* (1) *et* (2). — La méthode que nous venons d'employer pour obtenir les formules (1) et (2) ne donne pas facilement les coefficients K et L, et ne fait pas voir que ces coefficients sont indépendants de $m$. Nous allons donc les obtenir d'une autre manière qui fait voir cette circonstance importante.

Dans ce but, je remarque que la fonction $\sin^m(x-a)$ et ses dérivées, par rapport à $x$ jusqu'à l'ordre $m-1$, s'annulent pour $x = a$ et, par conséquent, que les fonctions

$$\begin{aligned} \Theta(x) = {} & \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} K_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a) \\ & + \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}m-1} L_{2n} \sin^{2n}(x-a) \end{aligned}$$

et

$$\Theta_1(x) = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-1)} K'_{2n} \sin^{2n}(x-a)$$
$$+ \cos(x-a) \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(m-3)} L'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x-a)$$

doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\Theta(a) = f(a), \quad \Theta'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad \Theta^{m-1}(a) = f^{m-1}(a),$$
$$\Theta_1(a) = f(a), \quad \Theta'_1(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad \Theta_1^{m-1}(a) = f^{m-1}(a).$$

On peut obtenir, au moyen de ces équations, les coefficients K et L, et l'on trouve ainsi les coefficients de la première formule

$$(3) \quad \begin{cases} L_0 = f(a), \\ K_1 = f'(a), \\ L_2 = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f''(a), \\ K_2 = \frac{1}{6} [f'(a) + f'''(a)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et les coefficients de la seconde

$$(4) \quad \begin{cases} K'_0 = f(a), \\ L'_1 = f'(a), \\ K'_2 = \frac{1}{2} f''(a), \\ L'_3 = \frac{1}{6} [f'''(a) + 4f'(a)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

3. *Séries qui résultent de* (1) *et* (2). — Les formules (1) et (2) donnent deux développements de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$, si l'intégrale curviligne

$$J = \int_s \frac{f(z) \sin^m(x-a)\, dz}{\sin(z-x) \sin^m(z-a)}$$

tend vers zéro quand $m$ tend vers l'infini. Or on a

$$J = \frac{\theta \sigma}{2\pi} \frac{f(\zeta) \sin^m(x-a)}{\sin(\zeta - x) \sin^m(\zeta - a)},$$

où $\zeta$ représente l'affixe d'un point du contour de l'intégration, $\sigma$ le périmètre de ce contour et $\theta$ un facteur, dont le module ne peut pas dépasser l'unité. Donc, si l'on a

$$(A) \quad |\sin(x-a)| < |\sin(z-a)|,$$

en tous les points du contour de l'intégration, l'intégrale J tend vers zéro quand $m$ tend vers l'infini et les formules (1) et (2) mènent à deux développements de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin(x-a)$.

Nous allons étudier la condition (A). Si l'on pose

$$z = x_1 + iy_1, \qquad a = \alpha + i\beta,$$

nous avons

$$\sin(z-a) = \sin(x_1-\alpha)\cos i(y_1-\beta) + i\cos(x_1-\alpha)\frac{\sin i(y_1-\beta)}{i}$$

et par conséquent, en représentant par M le module de $\sin(z-a)$,

$$\mathrm{M}^2 = \sin^2(x_1-\alpha)\cos^2 i(y_1-\beta) - \cos^2(x_1-\alpha)\sin^2 i(y_1-\beta).$$

Nous allons, maintenant, chercher la plus petite valeur que peut prendre $\mathrm{M}^2$ quand $z$ décrit le rectangle qui constitue le contour de l'intégration, c'est-à-dire le rectangle donné par les droites dont les équations sont

$$x_1 = \alpha - \tfrac{1}{2}\pi, \qquad x_1 = \alpha + \tfrac{1}{2}\pi, \qquad y_1 = \beta - l, \qquad y_1 = \beta + l.$$

Pour trouver le minimum des valeurs que prend $\mathrm{M}^2$ quand $z$ décrit la droite $x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\pi$, nous devons chercher la valeur de $y_1$ qui rend minimum l'expression dans laquelle se transforme $\mathrm{M}^2$ quand on y pose $x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\pi$, c'est-à-dire l'expression

$$\cos^2 i(y_1-\beta).$$

On trouve, de cette manière, en représentant par $m_1^2$ ce minimum,

$$m_1^2 = 1,$$

et que le minimum correspond à $y_1 = \beta$, c'est-à-dire à un point du rectangle considéré.

On trouve, de la même manière, que le minimum des valeurs que prend $\mathrm{M}^2$ quand $z$ décrit la droite $x_1 = \alpha + \frac{1}{2}\pi$ est encore égal à l'unité et correspond à $y_1 = \beta$.

Pour trouver le minimum de $\mathrm{M}^2$ quand $z$ décrit la droite $y_1 = \beta - l$, on doit transformer l'expression de $\mathrm{M}^2$ en y posant $y_1 = \beta - l$, ce qui donne

$$\mathrm{M}^2 = \sin^2(x_1-\alpha)\left(\frac{e^l + e^{-l}}{2}\right)^2 + \cos^2(x_1-\alpha)\left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2,$$

et, ensuite, chercher le minimum de cette expression. On trouve, de cette manière, que ce minimum correspond à $x_1 = \alpha$ et qu'il est, en le représentant par $m_2^2$,

$$m_2^2 = \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

On trouve, de la même manière, que le minimum des valeurs que prend $M^2$ quand $z$ décrit la droite $y_1 = \beta + l$ correspond à $x_1 = \alpha$ et est égal à $m_2^2$.

De tout ce que je viens de démontrer, il résulte que le minimum des valeurs que prend $M^2$ quand $z$ décrit le contour de l'intégration est égal à la plus petite des quantités

$$1, \quad \left(\frac{e^l - e^{-l}}{2}\right)^2.$$

Or on voit facilement que

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} > 1,$$

si $l > \log(1 + \sqrt{2})$; et que

$$\frac{e^l - e^{-l}}{2} < 1,$$

si $l < \log(1 + \sqrt{2})$.

Donc nous avons le théorème suivant :

*Si $l \gtreqless \log(1 + \sqrt{2})$, l'intégrale* J *tend vers zéro quand $m$ tend vers l'infini, si $x$ satisfait à la condition*

$$|\sin(x - a)| < 1.$$

*Si $l < \log(1 + \sqrt{2})$, l'intégrale* J *tend vers zéro quand $m$ tend vers l'infini, si $x$ satisfait à la condition*

$$|\sin(x - a)| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}.$$

*Dans ces deux cas, on peut développer $f(x)$ en série convergente au moyen des formules suivantes :*

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K}_{2n+1} \sin^{2n+1}(x - a) + \cos(x - a) \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_{2n} \sin^{2n}(x - a),$$

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{K}'_{2n} \sin^{2n}(x - \alpha) + \cos(x - a) \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}'_{2n+1} \sin^{2n+1}(x - a).$$

4. *Application.* — Pour faire une application de ce résultat, je vais considérer la fonction $f(x) = \cos kx$, $k$ représentant un nombre quelconque.

Les formules (3) donnent

$$L_0 = 1, \qquad K_1 = 0, \qquad L_2 = -\frac{k^2 - 1}{2}, \qquad K_2 = 0, \qquad \ldots,$$

et, par conséquent, la formule (5) donne la formule d'Euler

$$\cos kx = \cos x \left[ 1 - \frac{k^2 - 1}{1.2} \sin^2 x + \frac{(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \ldots \right],$$

et l'on voit que cette formule a lieu toutes les fois que

$$|\sin x| < 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

En appliquant les formules (4) à la même fonction, on trouve

$$K'_0 = 1, \qquad L'_1 = 0, \qquad K'_2 = -\frac{k^2}{2}, \qquad L'_3 = 0, \qquad \ldots,$$

et, par conséquent, la formule (6) donne la formule connue

$$\cos kx = 1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 x + \frac{k^2(k^2 - 2^2)}{2.3.4} \sin^4 x - \ldots,$$

quand $|\sin x| < 1$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

On trouve de la même manière les développements suivants :

$$\sin kx = k \sin x - \frac{k(k^2 - 1)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{k(k^2 - 1^2)(k^2 - 3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots,$$

$$\sin kx = \cos x \left[ k \sin x - \frac{k(k^2 - 2^2)}{2.3} \sin^3 x + \ldots \right],$$

quand $|\sin x| < 1$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

La méthode que nous venons d'employer pour obtenir les coefficients qui entrent dans les développements de $\cos kx$ et $\sin kx$ donne ces coefficients de proche en proche, mais n'en donne pas la loi. Mais cette loi est toujours la même quel que soit $k$, et dans le cas de $k$ entier positif, on l'obtient par des moyens tout à fait élémentaires.

5. Je vais maintenant considérer l'intégrale

$$M = \int_S \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)}\,dz,$$

qui va me permettre d'étudier les conditions de convergence de votre formule (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 331),

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)} f(\alpha) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)} f(\beta) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\ldots\sin(\gamma-\lambda)} f(\gamma) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

quand le nombre des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... tend vers l'infini. Je suppose la partie réelle de $x$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

En prenant pour contour de l'intégration le rectangle considéré dans le cas antérieur, on trouve

$$M = 2i\pi(A + B + C + \ldots),$$

où A, B, C, ... représentent les résidus de la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)},$$

par rapport à $x$, $\alpha$, $\beta$, ....

Or le résidu de cette fonction par rapport à $x$ est égal au coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$\frac{f(x+h)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots}{\sin h\sin(x-\alpha)\sin(x+h-\beta)\ldots}$$

en série ordonnée suivant les puissances de $h$, c'est-à-dire à $f(x)$.

Le résidu B de la même fonction est égal au coefficient de $h$ dans le développement de

$$\frac{f(\alpha+h)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots}{\sin(\alpha+h-x)\sin h\sin(\alpha+h-\beta)\ldots}$$

en série ordonnée suivant les puissances de $h$, et, par conséquent,

$$B = -\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}f(\alpha).$$

On trouve de la même manière les autres résidus.

Nous avons donc la formule

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}f(\alpha) \\ & + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}f(\beta) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \int_s \frac{f(z)\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(z-x)\sin(z-\alpha)\sin(z-\beta)\ldots\sin(z-\lambda)}\,dz. \end{aligned}$$

Or on voit, au moyen du théorème de M. Darboux déjà employé dans le cas antérieur, que l'intégrale qui entre dans cette formule tend vers zéro quand

$$|\sin(x-\alpha)| < |\sin(z-\alpha)|, \qquad |\sin(x-\beta)| < |\sin(z-\beta)|, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire quand

$$|\sin(x-\alpha)| < 1, \qquad |\sin(x-\beta)| < 1, \qquad \ldots,$$

si $l > \log(1+\sqrt{2})$, et quand

$$|\sin(z-\alpha)| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}, \qquad |\sin(x-\beta)| < \frac{e^l - e^{-l}}{2}, \qquad \ldots,$$

si $l < \log(1+\sqrt{2})$; donc, quand les conditions précédentes sont satisfaites, l'expression

$$\frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots}f(\alpha) + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots}f(\beta) + \ldots,$$

représente $f(x)$ avec d'autant plus d'approximation que le nombre des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... est plus grand.

Je termine ici les considérations relatives aux intégrales M et J que je me proposais de soumettre à votre considération. Je serai bien heureux si elles méritent votre haute approbation.

Porto, le 18 juin 1890.

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LANDSBERG (O.). — UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE GRUPPEN EINER LINEAREN FÜNFFACHEN MANNIGFALTIGKEIT. Inaugural-Dissertation, in-8°, 81 p. Breslau. Grass et Barth, 1889.

Supposons l'espace ordinaire rapporté à un système de coordonnées homogènes $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$; les coordonnées des points d'une droite peuvent être mises sous la forme

$$x_i = x'_i \lambda' + x''_i \lambda'' \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où $\lambda'$, $\lambda''$ peuvent prendre des valeurs quelconques; l'ensemble des points (de la droite) représentés par ces équations n'est pas altéré quand on substitue aux coordonnées $x'_i$, $x''_i$ les coordonnées $y'_i$, $y''_i$ de deux points quelconques appartenant audit ensemble, c'est-à-dire de la forme

$$x'_i \lambda'_1 + x''_i \lambda''_1, \quad x'_i \lambda'_2 + x''_i \lambda''_2;$$

cet ensemble de points (ou la droite) dépend de quatre constantes. Les *coordonnées* de la droite sont les six déterminants $x'_\alpha y'_\beta - x''_\alpha y''_\beta$, liés par une relation identique bien connue; inversement six quantités qui satisfont à cette relation identique peuvent être prises pour six déterminants de la forme précédente. Si l'on se donne quatre relations linéaires entre six pareils déterminants, la droite dont ils sont les coordonnées est déterminée, et l'on sait qu'elle peut occuper deux positions. Ce sont ces propriétés, si connues, que M. Otto Landsberg généralise entièrement d'abord, et à un point de vue purement algébrique, pour se restreindre ensuite à un cas particulier d'ordre élevé, susceptible d'intéressantes interprétations géométriques.

En regardant un *point* comme déterminé par $n$ coordonnées homogènes $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, considérons l'ensemble de points que l'on obtient en donnant toutes les valeurs possibles aux $m$ variables $\lambda^{(\mu)}$, en nombre moindre que $n$, dans les formules

$$x_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} x_i^{(\mu)} \lambda^{(\mu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où l'on suppose indépendantes les formes linéaires des seconds membres, formes dans lesquelles les $\lambda^{(\mu)}$ sont les variables et les $x_i^{(\mu)}$ les coefficients, cet ensemble de points est ce que l'auteur appelle un *groupe à m termes*. De même que tout à l'heure, ce groupe n'est pas changé quand on remplace les $m$ points fixes $x_i^{\mu}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$) par $m$ autres points appartenant au groupe; le groupe, comme le montre M. Landsberg par un raisonnement très simple, dépend de $m(n-m)$ constantes. Il est déterminé quand on se donne ses

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$$

coordonnées, c'est-à-dire les déterminants en nombre égal obtenus par la suppression de $m$ colonnes dans la matrice

$$\| x_i^{(\mu)} \|.$$

Les questions suivantes se posent immédiatement : Étant données $\binom{n}{m}$ quantités, à quelles conditions peuvent-elles être regardées comme les coordonnées d'un groupe à $m$ termes? Étant données $m(n-m)$ relations linéaires entre les coordonnées d'un groupe à $m$ termes, construire ce groupe; combien de solutions admet le problème?

Il suffit d'ailleurs d'examiner les cas où $m$ est inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$; en effet, à chaque groupe à $m$ termes correspond un groupe *conjugué* à $n-m$ termes, groupe dont tous les éléments $u_i$ vérifient l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i x_i = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs des $x_i$ qui appartiennent au groupe à $m$ termes. Deux groupes conjugués ont les mêmes coordonnées, et les propriétés de l'un font aisément connaître celles de l'autre.

L'intérêt que présente l'étude purement algébrique des questions de cet ordre est manifeste. Des propositions géométriques, d'apparences très diverses, et que l'on relie habituellement par des

méthodes de transformation, se trouvent ramenées de cette façon à leur véritable unité.

M. Landsberg étudie d'abord avec des détails suffisants le cas des groupes à deux termes lorsque $n$ est égal à 4 ou à 5 : ce sont alors les seuls groupes à étudier; il retrouve ainsi surtout des propositions connues, en particulier les théorèmes de M. Stephanos sur les systèmes de cercles. Il aurait certainement signalé, s'il en avait eu connaissance, le travail que M. G. Kœnigs a publié, en 1888, dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, sous le titre *Contribution à la théorie du cercle dans l'espace*, et qui se rapporte au même ordre d'idées.

Le cas de $n = 6$, sur lequel s'étend particulièrement l'auteur, est plus compliqué. Le groupe à deux termes a alors quinze coordonnées

$$v_{\alpha\beta} = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha.$$

Inversement étant données quinze quantités $v_{\alpha\beta}$, pour qu'elles puissent être mises sous la forme $x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$, il faut et il suffit que le déterminant gauche

$$| v_{\alpha\beta} |,$$

où l'on suppose

$$v_{\beta\alpha} = - v_{\alpha\beta}, \qquad v_{\alpha\alpha} = 0,$$

ait tous ses mineurs du premier, du second et du troisième ordre nuls. Ces conditions se ramènent à quinze, qui sont de la forme suivante : en posant

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = v_{\alpha\beta}v_{\gamma\delta} + v_{\alpha\gamma}v_{\delta\beta} + v_{\alpha\delta}v_{\beta\gamma},$$

les quinze quantités $(\alpha\beta\gamma\delta)$ doivent être nulles. Le groupe dépend de huit constantes, et huit relations linéaires entre ses coordonnées, regardées comme inconnues, admettent quatorze solutions.

M. Landsberg passe ensuite à l'étude du groupe à trois termes pour $n = 6$. Il y a alors vingt coordonnées, et le groupe dépend de neuf constantes. L'auteur ramène à trente-six le nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour que vingt quantités données puissent être regardées comme les coordonnées d'un tel groupe, et discute encore le système de neuf équations linéaires entre les coordonnées, regardées comme inconnues, qui permettent de les déterminer.

Les diverses propositions auxquelles il parvient ainsi sont susceptibles de nombreuses interprétations géométriques; nous signalerons en particulier celles qui concernent les systèmes linéaires de coniques. J. T.

---

# MÉLANGES.

## GÉNÉRALISATION DE LA RÈGLE DE CONVERGENCE DE GAUSS;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Gauss a fait connaître une loi qui s'applique à un grand nombre de séries importantes et qui permet de voir immédiatement si leurs termes tendent vers zéro ou vers une limite finie, si elles sont convergentes ou divergentes. Nous allons formuler une règle applicable à des séries un peu plus générales que celles qui ont été considérées par Gauss et en donner une démonstration plus facile à retrouver que celle du grand géomètre.

Considérons une série U à termes positifs $u_0$, $u_1$, ... et telle qu'on ait

$$(1)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + A n^{\lambda-\alpha} + B n^{\lambda-\beta} + C n^{\lambda-\gamma} + \ldots + F n^{\lambda-\varphi}}{n^\lambda + a n^{\lambda-\alpha} + b n^{\lambda-\beta} + c n^{\lambda-\gamma} + \ldots + f n^{\lambda-\varphi}},$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... étant des nombres positifs croissants; soit, pour fixer les idées, $B - b$ la première des différences $A - a$, $B - b$, $C - c$, ... qui ne s'annule pas. Je vais établir les propositions suivantes :

1° Suivant que $B - b$ est $> 0$ ou $< 0$, les termes de U, à partir d'un certain rang, vont constamment en croissant ou en diminuant;

2° Si $\beta > 1$, ces termes tendent vers une limite finie; si $\beta$ ne surpasse point l'unité, ils tendent vers l'infini ou vers zéro;

3° La condition nécessaire et suffisante pour que la série U soit convergente est que l'on ait $\beta < 1$ et $B - b < 0$ ou $\beta = 1$ et $B - b < -1$.

Puisque A est égal à $a$, nous pouvons tirer de l'égalité (1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \rho, \qquad \rho = \frac{1}{n^\beta} \frac{B - b + (C - c) n^{-(\gamma-\beta)} + \ldots}{1 + a n^{-\alpha} + b n^{-\beta} + \ldots};$$

la forme même de $\rho$ rend notre première proposition évidente.

Pour établir le second point, il y a quatre cas à considérer. Supposons d'abord $\beta > 1$ et $B - b < 0$ : les termes de U décroissent à partir d'un certain rang; mais, si l'on prend un nombre négatif $-k$ inférieur algébriquement à $B - b$, on aura, pour une valeur de $n$ suffisamment grande,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{k}{n^\beta}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > 1 - \frac{k}{(n+1)^\beta}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} > 1 - \frac{k}{(n+p-1)^\beta};$$

d'où l'on conclut

$$u_{n+p} > u_n \left[1 - \frac{k}{n^\beta}\right] \left[1 - \frac{k}{(n+1)^\beta}\right] \cdots \left[1 - \frac{k}{(n+p-1)^\beta}\right],$$

ou, comme on peut supposer $\frac{k}{n^\beta} < 1$.

$$u_{n+p} > u_n \left\{1 - k \left[\frac{1}{n^\beta} + \frac{1}{(n+1)^\beta} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)^\beta}\right]\right\};$$

or la série dont le terme général est $\frac{1}{n^\beta}$ est convergente; on peut donc prendre $n$ assez grand pour que le coefficient de $k$ soit inférieur à un nombre donné, $\frac{1}{2k}$ par exemple, quel que soit $p$; $u_{n+p}$ décroissant constamment quand $p$ augmente, mais restant supérieur à $\frac{1}{2} u_n$, tend vers une limite finie.

Soit $B - b > 0$, $\beta$ étant encore $> 1$. Considérons une série U' dont le terme général $u'_n$ est l'inverse de $u_n$ : si nous formons le rapport $\frac{u'_{n+1}}{u'_n}$, les rôles des lettres $a$ et A, $b$ et B, etc., seront intervertis; cette série U' est dans les mêmes conditions que la série U dans l'hypothèse précédente; quand $n$ augmente indéfiniment, $u'_n$ décroît, mais tend vers une limite finie : on en conclut que les termes de U vont constamment en croissant, mais tendent vers une limite finie.

Supposons maintenant que $\beta$ ne surpasse point l'unité et que $B - b$ soit positif. Soit $k$ un nombre compris entre zéro et $B - b$ : on aura, pour une valeur de $n$ suffisamment grande,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 + \frac{k}{n^\beta}, \quad \dots, \quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} > 1 + \frac{k}{(n+p-1)^\beta},$$

$$u_{n+p} > u_n \left[1 + \frac{k}{n^\beta}\right]\left[1 + \frac{k}{(n+1)^\beta}\right]\dots\left[1 + \frac{k}{(n+p-1)^\beta}\right];$$

et, *a fortiori*,

$$u_{n+p} > u_n \left\{1 + k\left[\frac{1}{n^\beta} + \frac{1}{(n+1)^\beta} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)^\beta}\right]\right\};$$

mais le coefficient de $k$, formé de la somme de termes appartenant à une série divergente, croît indéfiniment avec $p$; il en est de même pour le terme $u_{n+p}$.

Considérons enfin le cas où, $\beta$ ne surpassant point l'unité, $B - b$ est négatif. La série U', dont les termes sont les inverses de ceux de U, est dans les conditions où cette dernière série se trouvait avec l'hypothèse précédente, et ses termes croissent au delà de toute limite; ceux de U tendent donc indéfiniment vers zéro.

Ce dernier cas est évidemment le seul dans lequel la série U puisse être convergente; pour montrer à quelles conditions elle l'est effectivement, je rappellerai que la série V, dont le terme général $v_n$ est égal à $\frac{1}{n^t}$, est convergente lorsque $t > 1$ et que, si l'on pose

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\theta}{n},$$

la limite de $\theta$ est $t$ pour $n$ infini. Il suffit de considérer l'expression de $\rho$ pour reconnaître que, dans l'un ou l'autre des cas spécifiés au n° 3, on peut trouver une valeur de $t$ supérieure à l'unité et telle qu'on ait, si $n$ est suffisamment grand,

$$\rho < -\frac{\theta}{n}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n};$$

la série V étant convergente, la dernière inégalité entraîne, on le sait, la convergence de U.

La condition reconnue suffisante est nécessaire. Pour s'en assurer, il suffit, d'après ce qui a été dit, de voir que U est divergente si, $\beta$ étant égal à l'unité, $B - b = -1$; elle le sera *a fortiori* pour $B - b > -1$. En faisant $\beta = 1$, $B = b - 1$, on a identiquement

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\frac{an^{-\alpha} + bn^{-1} + \ldots + (C - c)n^{-(\gamma-1)} + \ldots}{1 + an^{-\alpha} + bn^{-1} + \ldots};$$

mais la série W dont le terme général serait

$$w_n = \frac{1}{(n-1)\log(n-1)},$$

est divergente et l'on peut écrire

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\log n + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\theta}{n\log n},$$

$\theta$ ayant pour limite l'unité quand $n$ croît indéfiniment; mais en même temps, $\frac{1}{\log n}$ est infiniment moins petit que $n^{-\alpha}$ ou $n^{-(\gamma-1)}$; on a donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{w_{n+1}}{w_n};$$

et la série U est divergente. Si $\alpha$, $\beta$, ... eussent été des nombres entiers, on aurait pu prendre pour série de comparaison, au lieu de W, celle où le terme de rang $n$ est de la forme $\frac{1}{n-k}$.

## SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. F. TANO.

Je suppose que, dans l'expression $a^2 + 4$, $a$ soit un entier positif impair $> 1$, et que, dans l'expression $a^2 - 4$, $a$ soit entier positif impair $> 3$. Ceci établi, développant les deux expressions $\sqrt{a^2 + 4}$

et $\sqrt{a^2-4}$ en fraction continue, on trouve

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt{a^2+4} &&= a + \frac{1}{x_1},\\
x_1 &= \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{4} &&= \frac{a-1}{2} + \frac{1}{x_2},\\
x_2 &= \frac{\sqrt{a^2+4}+a-2}{a} &&= 1 + \frac{1}{x_3},\\
x_3 &= \frac{\sqrt{a^2+4}+2}{a} &&= 1 + \frac{1}{x_4},\\
x_4 &= \frac{\sqrt{a^2+4}+a-2}{4} &&= \frac{a-1}{2} + \frac{1}{x_5},\\
x_5 &= \sqrt{a^2+4}+a &&= 2a + \frac{1}{x_6},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x'_0 &= \sqrt{a^2-4} &&= a-1 + \frac{1}{x'_1},\\
x'_1 &= \frac{\sqrt{a^2-4}+a-1}{2a-5} &&= 1 + \frac{1}{x'_2},\\
x'_2 &= \frac{\sqrt{a^2-4}+a-4}{4} &&= \frac{a-3}{2} + \frac{1}{x'_3},\\
x'_3 &= \frac{\sqrt{a^2-4}+a-2}{a-2} &&= 2 + \frac{1}{x'_4},\\
x'_4 &= \frac{\sqrt{a^2-4}+a-2}{4} &&= \frac{a-3}{2} + \frac{1}{x'_5},\\
x'_5 &= \frac{\sqrt{a^2-4}+a-4}{2a-5} &&= 1 + \frac{1}{x'_6},\\
x'_6 &= \sqrt{a^2-4}+a-1 &&= 2(a-1) + \frac{1}{x'_7},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

De ces développements, que je crois nouveaux, on peut déduire plusieurs conséquences; j'en exposerai quelques-unes. Observant le nombre des termes de la *période* de chaque développement, on conclut que :

*L'équation*

$$x^2-(a^2+4)y^2=-1$$

*est toujours résoluble en nombres entiers lorsque a est un nombre entier impair quelconque; tandis que l'équation*

$$x^2-(a^2-4)y^2=-1.$$

*est impossible, sauf le cas* $a=3$.

En outre, observant les dénominateurs des quotients complets dans les développements précédents, il est clair qu'*il existe une infinité de solutions entières de l'équation du troisième degré*

$$x^2-yz^2=\pm a,$$

*a étant un entier impair quelconque, et y toujours la somme de deux carrés.*

Indiquant par N un entier quelconque, *il existe une infinité de*

*solutions entières de l'équation*

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2+\mathrm{N}.$$

En effet, si N est pair, additionnant membre à membre les deux équations

$$x^2-(a^2+4)y^2=+a,$$
$$x_1^2-(a^2-4)y_1^2=-(2a-5),$$

on obtient l'autre

$$(ay)^2+(2y)^2+(ay_1)^2=x^2+x_1^2+(2y_1)^2+a-5;$$

si par contre N est impair, additionnant les deux équations

$$x^2-(a^2+4)y^2=-a,$$
$$x_1^2-(a^2-4)y_1^2=+4,$$

on obtient l'autre

$$(ay)^2+(2y)^2+(ay_1)^2=x^2+x_1^2+(2y_1)^2+a-4.$$

En multipliant membre à membre les deux

$$x^2-a^2y^2-4y^2=\pm a,$$
$$u^2-a^2v^2+4v^2=1,$$

on obtient une équation de la forme

$$\sum_1^4{}_r x_r^2-\sum_1^5{}_r y_r^2=\pm a;$$

en multipliant celle-ci, membre à membre, par l'autre

$$u_1^2-a^2v_1^2+4v_1^2=1,$$

on obtient une équation de la forme

$$\sum_1^{13}{}_r x_r^2-\sum_1^{14}{}_r y_r^2=\pm a,$$

et, en général, on a l'équation

$$\sum_1^{k}{}_r x_r^2-\sum_1^{k+1}{}_r y_r^2=\pm a,$$

laquelle *aura un nombre infini de solutions entières,* ayant posé $k=\frac{3^n-1}{2}$ et $n$ étant un entier positif quelconque.

En dernier lieu, si l'on observe que les diviseurs premiers de la forme $a^2+4$, dans laquelle $a$ est impair, sont tous de la forme $4m+1$, en indiquant par $p$ un d'eux quelconque, on peut poser

$$a^2+4 \equiv 0 \pmod{p}:$$

mais, ayant démontré que

$$x^2-(a^2+4)y^2=a,$$

il s'ensuit

$$x^4+4 \equiv 0 \pmod{p}:$$

c'est-à-dire que *le nombre* $-4$ *est résidu biquadratique de tous les nombres premiers de la forme* $4m+1$.

Ce théorème est dû à Sophie Germain ([1]). Dans la même Lettre, Sophie Germain donne un autre théorème sur les résidus biquadratiques, lequel est une conséquence immédiate de ce qui a été exposé ci-dessus. En effet, si A est un entier impair quelconque, il est évident que l'expression $A^2+4$ doit avoir quelque diviseur premier $p$ de la forme $8m+5$; mais il a été démontré que

$$x^2-(A^2+4)y^2=A;$$

donc, on pourra dire que

$$x^4 \equiv A^2 \pmod{p};$$

c'est-à-dire : *Chaque carré impair, pris avec le signe* $-$, *est non résidu biquadratique de quelque nombre premier de la forme* $8m+5$; ce qui est précisément l'autre théorème de Sophie Germain.

## SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE;

PAR M. V. WILLIOT,
Chef du Service technique à la Direction des Travaux de Paris.

Dans une Lettre adressée par M. Hermite à M. Borchardt et insérée au *Journal de Crelle* (t. 84, p. 70), l'éminent géomètre a traité, avec son élévation de vue habituelle, la question de la généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange.

---

([1]) *Voir* Lettre du 22 mai 1809 adressée par Sophie Germain à Gauss.

Le but de la présente Note est simplement de développer quelques considérations sur la nature et le mode de formation du polynôme d'interpolation, de donner une démonstration très simple de la forme symbolique très concise à laquelle on aboutit et d'en tirer une application de pratique courante.

Pour trouver un polynôme $F(x)$ du degré $(n-1)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll} F(a)=f(a), & F'(a)=f'(a), & \ldots, & F^{\alpha-1}(a)=f^{\alpha-1}(a), \\ F(b)=f(b), & F'(b)=f'(b), & \ldots, & F^{\beta-1}(b)=f^{\beta-1}(b), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ F(l)=f(l), & F'(l)=f'(l), & \ldots, & F^{\lambda-1}(l)=f^{\lambda-1}(l), \end{array}$$

$f(x)$ étant une fonction donnée de $x$,

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n,$$

M. Hermite pose

$$F(x)-f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{x-z}\,\frac{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}{(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\ldots(z-l)^\lambda}\,dz,$$

et en posant, pour abréger,

$$\Phi(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda,$$

il évalue les résidus de la fonction

$$\varphi(x)=\frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)},$$

pour les valeurs $z=a$, $z=b$, ..., $z=l$, en calculant celui qui correspond à $z=a$, soit le terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(a+h)$ suivant les puissances ascendantes de $h$.

On arrive ainsi à la forme suivante du premier terme de la formule d'interpolation, pour $x=a$,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda \\ \times\left[AX_{\alpha-1}+A_1X_{\alpha-2}(x-a)+A_2X_{\alpha-3}(x-a)^2+\ldots+A_{\alpha-1}X_0(x-a)^{\alpha-1}\right].\end{array}\right.$$

Dans cette expression, $A$, $A_1$, ..., $A_{\alpha-1}$ sont des coefficients numériques résultant du développement

$$\begin{aligned}&(a-b+h)^{-\beta}(a-c+h)^{-\gamma}\ldots(a-l+h)^{-\lambda}\\ &\quad=A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}+\ldots.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $\Lambda(x)$ le produit

$$(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda,$$

et si l'on développe, suivant les puissances de $h$,

$$\frac{1}{\mathcal{A}_0(a+h)} = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)_a + \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)'_a \frac{h}{1} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)''_a \frac{h^2}{1.2} + \dots$$
$$+ \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)^{\alpha-1}_a \frac{h^{\alpha-1}}{1.2\dots\alpha-1} + \dots,$$

on trouve la concordance

$$\mathrm{A} = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)_a,$$
$$\mathrm{A}_1 = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)'_a,$$
$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)''_a,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathrm{A}_{\alpha-1} = \frac{1}{1.2\dots(\alpha-1)}\left(\frac{1}{\mathcal{A}_0 x}\right)^{\alpha-1}_a.$$

Quant aux polynômes $\mathrm{X}_{\alpha-1}$, $\mathrm{X}_{\alpha-2}$, ..., $\mathrm{X}_0$ qui figurent dans la formule (1), ils résultent du développement

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h} = \frac{\mathrm{X}_0}{x-a} + \frac{\mathrm{X}_1}{(x-a)^2}h + \frac{\mathrm{X}_2}{(x-a)^3}h^2 + \dots + \frac{\mathrm{X}_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}h^{\alpha-1} + \dots,$$

effectué par le produit des deux séries

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1} + f''(a)\frac{h^2}{1.2} + \dots + f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\dots(\alpha-1)},$$
$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \frac{h^2}{(x-a)^3} + \dots + \frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}.$$

Or ce produit donne

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h} = \frac{f(a)}{x-a} + \frac{f(a)+f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}h$$
$$+ \frac{f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}}{(x-a)^3}h^2 + \dots$$
$$+ \frac{f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\dots+f^{\alpha-1}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\dots(\alpha-1)}}{(x-a)^\alpha}h^{\alpha-1}.$$

Les polynômes $\mathrm{X}_i$ sont donc les développements incomplets de la fonction donnée $f(x)$ suivant les puissances de $(x-a)$ jusqu'à la $i^{\text{ième}}$ puissance : nous rappellerons cette formation par la nota-

tion

$$X_i = \left[\overset{i}{f}x\right]_{x-a},$$

$$X_0 = \left[\overset{0}{f}x\right]_{x-a} = f(a),$$

$$X_1 = \left[\overset{1}{f}x\right]_{x-a} = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1},$$

$$X_2 = \left[\overset{2}{f}x\right]_{x-a} = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$X_{\alpha-1} = \left[\overset{\alpha-1}{f}x\right]_{x-a} = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots + f^{\alpha-1}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}.$$

Le premier terme (1) de la formule d'interpolation peut donc s'écrire

$$(2)\quad \mathcal{A}(x)\left[\left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)_a \left[\overset{\alpha-1}{f}x\right]_{x-a} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)'_a \left[\overset{\alpha-2}{f}x\right]_{x-a}\frac{x-a}{1} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)''_a \left[\overset{\alpha-3}{f}x\right]_{x-a}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)^{\alpha-1}_a \left[\overset{0}{f}x\right]_{x-a}\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right].$$

Cette forme n'est pas la plus avantageuse. Si l'on y remplace les facteurs $\left[\overset{i}{f}x\right]_{x-a}$ par les développements incomplets qu'ils représentent, on peut classer les termes de deux autres manières et parvenir à des résultats intéressants :

1° On peut énoncer explicitement les polynômes multiplicateurs des valeurs $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{\alpha-1}(a)$ de la fonction et de ses $(\alpha-1)$ dérivées,

$$\mathcal{A}(x)\times\left\{\begin{aligned}
& f(a)\left[\left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)_a + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)'_a\frac{x-a}{1} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)''_a\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)^{\alpha-1}_a\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1}\right]\\
& + f'(a)\left[\left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)_a + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)'_a\frac{x-a}{1} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)''_a\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)^{\alpha-2}_a\frac{(x-a)^{\alpha-2}}{1.2\ldots\alpha-2}\right]\frac{x-a}{1}\\
& + f''(a)\left[\left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)_a + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)'_a\frac{x-a}{1} + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)''_a\frac{(x-a)^2}{1.2} + \ldots + \left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)^{\alpha-3}_a\frac{(x-a)^{\alpha-3}}{1.2\ldots\alpha-3}\right]\frac{(x-a)^2}{1.2}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + f^{\alpha-1}(a)\left[\left(\frac{1}{\mathcal{A}x}\right)_a\right]\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}
\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on désigne, comme précédemment, par $\left[\frac{1}{\psi x}\right]_{x-a}^{i}$ le développement incomplet suivant les puissances de $(x-a)$ et jusqu'à la $i^{ième}$ puissance de la fonction $\frac{1}{\psi(x)}$, on aura, pour le premier terme du polynôme d'interpolation, la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x)\left[f(a)\left[\frac{1}{\psi x}\right]_{x-a}^{\alpha-1}+f'(a)\left[\frac{1}{\psi x}\right]_{x-a}^{\alpha-2}\frac{x-a}{1}\right.\\ &\qquad+f''(a)\left[\frac{1}{\psi x}\right]_{x-a}^{\alpha-3}\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots\\ &\qquad\left.+f^{\alpha-1}(a)\left[\frac{1}{\psi x}\right]_{x-a}^{0}\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right].\end{aligned}\right.$$

2° En classant les termes, suivant les puissances de $(x-a)$, on trouve

$$\begin{aligned}\psi(x)\Big\{&f(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)_a+\frac{x-a}{1}\left[f(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)'_a+f'(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)_a\right]\\ &+\frac{(x-a)^2}{1.2}\left[f(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)''_a+2f'(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)'_a+f''(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)_a\right]+\ldots\\ &+\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\left[f(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)^{\alpha-1}_a+\frac{\alpha-1}{1}f'(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)^{\alpha-2}_a\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2}f''(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)^{\alpha-3}_a+\ldots+f^{\alpha-1}(a)\left(\frac{1}{\psi x}\right)_a\right]\end{aligned}$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x)\left[\left(\frac{fx}{\psi x}\right)_a+\left(\frac{fx}{\psi x}\right)'_a\frac{x-a}{1}\right.\\ &\qquad+\left(\frac{fx}{\psi x}\right)''_a\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots\\ &\qquad\left.+\left(\frac{fx}{\psi x}\right)^{\alpha-1}_a\frac{(x-a)^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\right]=\psi(x)\left[\frac{fx}{\psi x}\right]_{x-a}^{\alpha-1}\end{aligned}\right.$$

avec

$$\psi(x)=(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

en désignant toujours par la même notation $\left[\frac{fx}{\psi x}\right]_{x-a}^{i}$ les développe-

ments incomplets de la fonction $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ suivant les puissances de $(x-a)$ jusqu'à la $i^{\text{ième}}$ puissance.

Sous cette forme très simple, le premier terme de la formule d'interpolation se présente avec un caractère d'évidence remarquable, et l'on peut démontrer presque immédiatement qu'il reproduit, pour $x=a$, la fonction $f(x)$ et ses $\alpha-1$ dérivées.

En effet, si l'on prend, pour $x=a$, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de (4), $p$ étant au plus égal à $\alpha-1$, on trouve

$$(\psi x)_a\left(\frac{fx}{\psi x}\right)_a^p+\frac{p}{1}(\psi x)'_a\left(\frac{fx}{\psi x}\right)_a^{p-1}$$
$$+\frac{p(p-1)}{1.2}(\psi x)''_a\left(\frac{fx}{\psi x}\right)_a^{p-2}+\ldots+(\psi x)_a^p\left(\frac{fx}{\psi x}\right)_a,$$

ce qui n'est que le développement de

$$\left(\psi x\frac{fx}{\psi x}\right)_a^p=[f^p(x)]_a=f^p(a).$$

Cette démonstration laisse indéterminée la fonction $\psi(x)$ qui n'est assujettie qu'à la condition de ne pas s'annuler pour $x=a$ et de s'annuler, au contraire, pour $x=b$, $x=c$, $x=l$ (¹).

La formule d'interpolation ainsi généralisée peut rendre des services dans le calcul des intégrales définies, comme l'a si bien fait ressortir M. Hermite dans l'article précité.

On en tire également des formules d'interpolation analogues à celles de Cotes, mais où figurent, à côté des valeurs de la fonction, celles de ses dérivées. Nous donnons ci-après les formules relatives au cas d'une seule dérivée, formules qui correspondent aux habitudes pratiques des dessinateurs de tracer une courbe avec quelques points et avec les tangentes en ces points : $\xi$ est la distance de deux points consécutifs.

---

(¹) Nous avions trouvé cette démonstration avant de connaître l'article de M. Hermite que M. Darboux a bien voulu nous signaler.

Points.

2.. $$\int_{x_0}^{x_1} X\,dx = \xi\left[\frac{X_0+X_1}{2} + \xi\,\frac{X'_0-X'_1}{2}\right],$$

3.. $$\int_{x_0}^{x_2} X\,dx = \xi\left[\frac{7X_0+16X_1+7X_2}{15} + \xi\,\frac{X'_0-X'_1}{15}\right],$$

4.. $$\int_{x_0}^{x_3} X\,dx = \xi\left[\frac{465(X_0+X_3)+1215(X_1+X_2)}{1120} + \xi\,\frac{57(X'_0-X'_3)-81(X'_1-X'_2)}{1120}\right]$$

5.. $$\left\{\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_4} X\,dx = \xi\Bigg[&\frac{3202(X_0+X_4)+8192(X_1+X_3)+11232X_2}{8505}\\ &+\xi\,\frac{348(X'_0-X'_4)-1536(X'_1-X'_3)}{8505}\Bigg],\end{aligned}\right.$$

6.. $$\left\{\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_5} X\,dx = \xi\Bigg[&\frac{2233595(X_0+X_5)+4843125(X_1+X_4)+8890000(X_2+X_3)}{6386688}\\ &+\xi\,\frac{221850(X'_0-X'_5)-1886250(X'_1-X'_4)-1635000(X'_2-X'_3)}{6386688}\Bigg]\end{aligned}\right.$$

1re Part.

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOLDSCHEIDER (Franz). — Das Reciprocitätsgesetz der achten Potenzreste. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Luisenstädtischen Realgymnasiums. Ostern, 1889. Berlin, R. Gärtner's Verl. 29 p. in-4°.

On sait que les lois de réciprocité pour les résidus quadratiques, cubiques et biquadratiques découlent sans difficulté des principes de la division du cercle; mais il semble que peu de géomètres se soient doutés que les moyens fournis par la théorie de la division du cercle suffisent encore pour déduire la loi de réciprocité pour les huitièmes résidus. A ce qu'on peut voir, Jacobi a été d'opinion qu'il fallait chercher des principes essentiellement nouveaux dans ce cas (*Journal de Crelle*, t. XIX, et *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1837), et les recherches d'Eisenstein, qui en appela aux fonctions de la lemniscate, n'ont pas été terminées : ainsi l'énoncé même de la loi ne paraît pas avoir été donné jusqu'à présent. En partant de la division du cercle, on gagne toujours des lois de réciprocité qui n'ont lieu qu'entre des nombres dont l'un soit réel. Mais tandis que, dans la théorie des nombres complexes composés des troisièmes et quatrièmes racines de l'unité, il est facile de procéder d'ici aux lois générales, cette généralisation oppose, pour les nombres composés des huitièmes racines de l'unité, des difficultés d'un ordre plus élevé.

Le Mémoire que nous avons à analyser ne fait qu'une petite partie des recherches générales que l'auteur a entreprises sur cette théorie. Des raisonnements d'arithmétique pure, mais qui reposent sur les principes de la division du cercle, l'avaient engagé à entrer dans cette étude, où il est parvenu à des résultats remarquables, mais dont il n'a rien encore publié. Profitant de l'occasion qui vint s'offrir, d'en communiquer quelques fruits aux mathématiciens, il a publié un fragment comme *Beilage* du programme, car le cadre restreint qu'on impose aux auteurs lui imposa la nécessité de faire un choix convenable de ses recherches. Pour donner quelque chose de nouveau en ce qui concerne les résultats et la méthode, il se résolut à faire imprimer la démonstration de la loi de réciprocité pour les huitièmes résidus et une application de la loi

à un problème de Gauss. En renonçant à suivre l'auteur dans toutes les subtilités de ses raisonnements, nous nous contentons de transcrire la loi de réciprocité énoncée à la page 25.

Soit $\lambda = \sqrt[4]{-1}$, et considérons les nombres complexes premiers

$$f(\lambda) = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 = f,$$
$$f_1(\lambda) = \alpha_1 + \beta_1\lambda + \gamma_1\lambda^2 + \delta_1\lambda^3 = f_1.$$

Un nombre $f$ sera appelé *primaire* quand on a $\alpha$ impair, $\beta, \gamma, \delta$ pairs, $\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 1 \pmod{4}$, c'est-à-dire $f \equiv 1\,[\text{mod.}\ 2(1+\lambda)]$.

Soient de plus

$$Nf(\lambda) = f(\lambda)\,f(\lambda^3)\,f(\lambda^5)\,f(\lambda^7),$$
$$\varphi(\lambda) = \alpha' + \beta'\lambda + \gamma'\lambda^2 + \delta'\lambda^3,$$
$$[\varphi(\lambda)]^{\frac{1}{8}[Nf(\lambda)-1]} \equiv \left[\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)}\right] \qquad [\text{mod.}\ f(\lambda)] = \lambda^n,$$

si $f(\lambda)$ est un nombre premier. Alors, $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)$ étant des nombres premiers primaires, la loi se met sous la forme

$$\left[\frac{f_1}{f}\right] = \left[\frac{f}{f_1}\right] \lambda^{\gamma\gamma_1 + \frac{1}{2}(\beta\delta_1 - \beta_1\delta) + \frac{1}{2}(\beta+\delta)(\beta_1+\delta_1)(\beta+\gamma+\beta_1+\gamma_1)}.$$

La même loi subsistera encore pour des nombres primaires en général, quand on entendra le symbole dans la signification plus étendue

$$\left[\frac{\varphi}{F}\right] = \prod \left[\frac{\varphi}{f}\right],$$

où le produit s'étend à tous les facteurs premiers $f$ de F.

Au moyen de quelques corollaires, cette loi de réciprocité permet de déterminer le caractère résiduel d'un nombre quelconque, ce que l'auteur prouve par un exemple.

L'application que l'auteur fait après cela se rapporte à un problème posé par Gauss. Soit $p$ un nombre premier de la forme $4n+1$; on a

$$4n + 1 = a^2 + b^2,$$

où nous supposerons $a$ impair, $b$ pair, et $a$ sera le plus petit résidu de $\frac{1}{2}[2n]_n$ (mod. $p$), $b$ le plus petit résidu, sans avoir égard au signe, de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p+3}{4}\,\frac{p+7}{4}\cdots\frac{p-1}{2}\right)^2 \qquad (\text{mod.}\ p).$$

ce résidu étant quelquefois positif, quelquefois négatif. Il s'agit de trouver ce signe, détermination qui ne semble pas être possible en toute généralité [voir GAUSS, *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima* et *Anzeige de ce Mémoire* (*Werke*, t. II, p. 91 et 168)]. A l'aide de la loi de réciprocité pour les résidus biquadratiques, on reconnaît que l'on a $b \equiv a - 1 + \mathrm{H}_p$ (mod. 8), où il faut prendre $a \equiv 1$ (mod. 4), $\mathrm{H}_p$ égal au nombre des classes proprement primitives des formes binaires quadratiques ayant le déterminant $-p$. Cette congruence, d'une simplicité remarquable, déterminera le signe de $b$ dans le cas de $p \equiv 5$ (mod. 8), parce que $b$ est alors $\equiv 2$ (mod. 4). Mais si l'on a $p \equiv 1$ (mod. 8), où $b \equiv 0$ (mod. 4), la congruence a lieu pour l'un et l'autre signe et ne peut donc plus servir à le déterminer. Ce critère a été déjà signalé par Gauss qui ressentait une joie vive en le communiquant à Dirichlet (lettre à Dirichlet, *Gauss' Werke*, t. II, p. 516). La différence des deux cas $p \equiv 5$ (mod. 8) et $p \equiv 1$ (mod. 8) s'explique par le raisonnement qui suit : Élevons la congruence

$$b \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\Pi\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{p-1}{4}\right)}\right]^2 \quad (\text{mod. } p)$$

à la puissance $\frac{p-1}{4}$; on perdra le signe pour $p \equiv 1$ (mod. 8), parce que l'exposant devient pair. Cependant on entrevoit que la connaissance de la loi de réciprocité pour les huitièmes résidus pourra intervenir maintenant. Élevant la même congruence à la puissance $\frac{p-1}{8}$, on obtiendra pour $p \equiv 9$ (mod. 16) une détermination du signe; au cas de $p \equiv 1$ (mod. 16), ce procédé n'amènera pas encore la décision. Sans donner la déduction complète de la proposition, l'auteur l'exprime sous plusieurs formes dont voici l'une des plus remarquables (p. 29) :

Soit $p$ un nombre premier $8n + 1$. Déterminons U et G par $p = \mathrm{U}^2 + \mathrm{G}^2$, $\mathrm{U} \equiv 1$ (mod. 4), $\mathrm{G} > 0$, de plus A et B par

$$p = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{B}^2, \qquad \mathrm{A} \equiv 1 \ (\text{mod. } 4), \qquad \mathrm{B} > 0.$$

Prenons une solution quelconque de l'équation $\mathrm{T}^2 - 2\mathrm{V}^2 = p$ pour laquelle on a $\mathrm{T} \equiv 1$ (mod. 4), $\mathrm{T} > 0$, $\mathrm{V} > 0$; enfin déter-

minons $\varepsilon = \pm 1$ par la congruence

$$2\mathrm{BGV}\varepsilon \equiv \mathrm{UAT} \pmod{p};$$

alors

$$(-1)^{\frac{1}{8}(\mathrm{H}_p + \mathrm{H}_{2p} + \mathrm{G} + \mathrm{B}^2) + \frac{1}{4}(\mathrm{B} - \mathrm{V})}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}\mathrm{B}}\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}\right)$$

fournira pour $p \equiv 9 \pmod{16}$ le signe cherché, tandis que pour $p \equiv 1 \pmod{16}$ cette expression aura toujours la valeur $+1$.

Signalons encore quelques théorèmes sur les nombres premiers qui sont la somme de deux bicarrés ou dont les doubles le sont, ainsi que d'autres sur les nombres premiers de la forme $8n + 3$ (p. 26, 27).

---

## MÉLANGES.

### EXPOSITION DE LA DÉMONSTRATION, DONNÉE PAR M. WEIERSTRASS, DES THÉORÈMES DE M. LINDEMANN SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE;

Par M. Jules MOLK [1].

**1.** Soient $r$ nombres distincts, réels ou imaginaires,

$$x_1 = y_1 + iz_1, \qquad x_2 = y_2 + iz_2, \qquad \ldots, \qquad x_r = y_r + iz_r,$$

où $y_h$, $z_h$ sont, pour $h = 1, 2, \ldots, r$, des nombres réels qui peuvent être l'un ou l'autre nuls et même tous deux nuls pour l'un des indices $h$.

Nous dirons que les nombres distincts $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont rangés par ordre de grandeur décroissante, et nous écrirons

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_r,$$

lorsque l'on aura pour $h = 1, 2, \ldots, r - 1$, ou bien

$$y_h > y_{h+1},$$

ou bien à la fois

$$y_h = y_{h+1}, \qquad z_h > z_{h+1}.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, 2e série, t. XIV, septembre 1890, p. 186.

2. Envisageons $k$ systèmes, formés chacun par $r$ nombres choisis arbitrairement,

$$\begin{array}{cccc} A'_1, & A'_2, & \ldots, & A'_r, \\ A''_1, & A''_2, & \ldots, & A''_r, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ A_1^{(k)}, & A_2^{(k)}, & \ldots, & A_r^{(k)}; \end{array}$$

nous supposerons seulement que, parmi les nombres de chacun des $k$ systèmes, il y en ait un au moins différent de zéro, et nous désignerons par $A'_{\alpha_1}$ le premier nombre du premier système qui ne soit pas nul; par $A''_{\alpha_2}$ le premier nombre du second système qui ne soit pas nul, et ainsi de suite; enfin par $A_{\alpha_k}^{(k)}$ le premier nombre du dernier système qui ne soit pas nul.

3. A l'aide de chacun de ces $k$ systèmes et du système de nombres *algébriques* distincts $x_1, x_2, \ldots, x_r$ rangés par ordre de grandeur décroissante, formons les expressions

$$P_h = A_1^{(h)} e^{x_1} + A_2^{(h)} e^{x_2} + \ldots + A_r^{(h)} e^{x_r} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k).$$

Nous pouvons mettre leur produit

$$P = P_1 P_2 \ldots P_k$$

sous la forme

$$P = \Sigma A'_{\alpha_1} A''_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_k}^{(k)} e^{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}},$$

où la somme est étendue aux combinaisons que l'on obtient en donnant de toutes les manières possibles aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, les valeurs $1, 2, \ldots, r$.

Convenons bien, pour éviter toute ambiguïté dans ce qui va suivre, de ne pas ajouter ou retrancher $2\pi i$ ou des multiples de $2\pi i$ à l'exposant de $e$, de sorte que, dans chacun des termes de la somme qui représente P, non seulement l'exponentielle

$$e^{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}},$$

mais aussi l'exposant

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$$

de cette exponentielle soit bien déterminé.

Soit $(n+1)$ le nombre des combinaisons précédentes de $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, auxquelles correspondent des nombres *distincts*

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k};$$

nous désignerons ces nombres distincts par $z_0, z_1, \ldots, z_n$; nous poserons, en particulier,

$$z_0 = x_{a_1} + x_{a_2} + \ldots + x_{a_k}.$$

Nous pourrons alors écrire

$$P = C_0 e^{z_0} + C_1 e^{z_1} + \ldots + C_n e^{z_n},$$

en désignant par $C_h$, pour $h = 0, 1, \ldots, n$, la somme

$$\Sigma A'_{\alpha_1} A''_{\alpha_2} \ldots A^{(k)}_{\alpha_k}$$

étendue à toutes les combinaisons des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, r$, pour lesquels le nombre algébrique

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k},$$

est égal à $z_h$.

4. Dans la démonstration qu'il a donnée des deux théorèmes de M. Lindemann sur la fonction exponentielle, M. Weierstrass s'est appuyé sur ce que l'un au moins des nombres $C_0, C_1, \ldots, C_n$, que nous venons de définir, est nécessairement différent de zéro. M. Dedekind a le premier fait remarquer qu'en supposant les nombres algébriques distincts considérés, rangés comme nous l'avons fait par ordre de grandeur décroissante, on voit facilement que le nombre $C_0$ est différent de zéro.

En effet, $C_0$ est égal à la somme

$$\Sigma A'_{\alpha_1} A''_{\alpha_2} \ldots A^{(k)}_{\alpha_k}$$

étendue à tous les systèmes d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, r$ pour lesquels on a

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k} = x_{a_1} + x_{a_2} + \ldots + x_{a_k}.$$

Or il n'y a aucun système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ différent du système $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pour lequel on ait à la fois

$$A'_{\alpha_1} A''_{\alpha_2} \ldots A^{(k)}_{\alpha_k}$$

différent de zéro, et

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k} = x_{a_1} + x_{a_2} + \ldots + x_{a_k};$$

car, si $A'_{\alpha_1}$ est différent de zéro, on a

$$a_1 \leqq \alpha_1;$$

si $A''_{\alpha_2}$ est différent de zéro, on a

$$a_2 \geq \alpha_2,$$

et ainsi de suite; enfin, si $A^{(k)}_{\alpha_k}$ est différent de zéro, on a

$$a_k \geq \alpha_k;$$

donc, si le produit

$$A'_{\alpha_1} A''_{\alpha_2} \ldots A^{(k)}_{\alpha_k}$$

est différent de zéro, ou bien toutes les différences

$$x_{a_1} - x_{\alpha_1}, \quad x_{a_2} - x_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad x_{a_k} - x_{\alpha_k}$$

sont nulles et l'on retombe sur le système $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_k}$ lui-même; ou bien, l'une au moins de ces différences étant positive, toutes les autres sont positives ou nulles, et par suite la somme de ces différences, qui est égale à

$$x_{a_1} + x_{a_2} + \ldots + x_{a_k} - (x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}),$$

est *positive* et *non nulle*.

Donc le nombre $C_0$ est formé par le terme *unique*

$$A'_{a_1} A''_{a_2} \ldots A^{(k)}_{a_k};$$

*il est donc différent de zéro.*

Théorème I de M. Lindemann. — *Si l'on désigne par $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$ les r nombres algébriques distincts, rangés par ordre de grandeur décroissante, que définit l'équation algébrique entière de degré r, à coefficients rationnels, à discriminant non nul,*

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = 0,$$

*et, si $N_1, N_2, \ldots, N_r$ sont r entiers donnés quelconques dont l'un au moins n'est pas nul, la somme*

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \ldots + N_r e^{x_r}$$

*est différente de zéro.*

Permutons de toutes les $k = r!$ manières possibles les nombres algébriques distincts $x_1, x_2, \ldots, x_r$; la somme

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \ldots + N_r e^{x_r}$$

se transformera alors en $k$ sommes que nous pourrons écrire

$$S^{(\nu)} = N_1^{(\nu)} e^{x_1} + N_2^{(\nu)} e^{x_2} + \ldots + N_r^{(\nu)} e^{x_r} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$N_1^{(\nu)}, N_2^{(\nu)}, \ldots, N_r^{(\nu)}$ désignant pour chaque entier $\nu = 1, 2, \ldots, k$ l'une des permutations des entiers $N_1, N_2, \ldots, N_r$.

Envisageons le produit

$$S = S' S'' \ldots S^{(k)},$$

et répétons sur ce produit les mêmes transformations que nous avons effectuées tout à l'heure sur le produit plus général P. Nous pouvons ainsi écrire *successivement*

$$S = \Sigma N'_{\alpha_1} N''_{\alpha_2} \ldots N^{(k)}_{\alpha_k} e^{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}}$$

(où la somme est étendue aux combinaisons que l'on obtient en donnant de toutes les manières possibles aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les valeurs $1, 2, \ldots, r$) et

$$S = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

en désignant par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les $(n+1)$ nombres algébriques *différents*

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}.$$

Dans cette dernière somme, $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont des nombres entiers, et, comme l'un au moins des nombres $N_1^{(\nu)}, N_2^{(\nu)}, \ldots, N_r^{(\nu)}$ de chacun des systèmes qui ici remplacent les systèmes quelconques $A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \ldots, A_r^{(\nu)}$, est différent de zéro, nous savons que l'un au moins des nombres C est différent de zéro.

Pour démontrer le premier théorème de M. Lindemann, nous ferons voir que l'expression S est différente de zéro. A cet effet, désignons par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, z, (r+1)$ indéterminées et envisageons le produit

$$\Pi[z - (\xi_{\alpha_1} + \xi_{\alpha_2} + \ldots + \xi_{\alpha_k})],$$

étendu aux combinaisons que l'on obtient en donnant de toutes les manières possibles aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les valeurs 1, 2, ..., $r$. Ce produit est une fonction entière de $z, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ symétrique en $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$. Si donc nous substituons aux indéter-

minées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ les $r$ nombres algébriques $x_1, x_2, \ldots, x_r$ précédemment définis, le produit en question sera une fonction entière de $z$ à coefficients *rationnels*, et cette fonction de $z$ s'annulera et ne s'annulera que pour l'une des valeurs $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ données à $z$. Il nous suffira donc de la diviser par le plus grand commun diviseur qu'elle a avec sa dérivée et de multiplier, s'il y a lieu, le quotient par un nombre entier, pour obtenir une fonction entière de $z$ à coefficients entiers, de degré $n+1$, à discriminant non nul,

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z + a_{n+1},$$

dont les racines soient $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

A l'aide de cette fonction $f(z)$ et pour un nombre positif $\delta$ donné, que nous nous réservons de choisir plus tard, nous formerons, comme il a été expliqué dans un précédent article [1], les polynômes $g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$. En posant

$$g_\nu(z_0)\,e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)\,e^{z_0} = \varepsilon_{\nu,\lambda}\,\delta \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

chacun des nombres $\varepsilon_{\nu,\lambda}$ sera, d'après le lemme III de M. Hermite, plus petit que 1 en valeur absolue.

Si nous multiplions par $g_\nu(z_0)$ les deux membres de l'équation

$$S = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

nous pouvons donc écrire

$$g_\nu(z_0)\,S = e^{z_0} \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda g_\nu(z_\lambda) + \delta \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\nu,\lambda} C_\lambda$$

ou encore

$$a_0^n g_\nu(z_0)\,e^{-z_0} S = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) + \delta a_0^n e^{-z_0} \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\nu,\lambda} C_\lambda.$$

Dans cette égalité, *le nombre*

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

---

[1] *Bulletin*, numéro de septembre 1890, pages 186 et suivantes.

*est un nombre entier au sens ordinaire du mot.* Pour le faire voir, nous montrerons successivement que ce nombre est un nombre *algébrique entier* et qu'il est un *nombre rationnel*.

C'est un nombre algébrique entier, puisque les nombres

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

sont des nombres algébriques entiers et que les nombres $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont des nombres entiers au sens ordinaire du mot.

C'est aussi un nombre rationnel; car, si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sont $r$ indéterminées, le produit P des $k$ sommes

$$\sum_{\alpha_h=1}^{r} N_{\alpha_h}^{(h)} e^{\xi_{\alpha_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots k),$$

est une fonction symétrique de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$. Mais on peut écrire

$$P = \Sigma N'_{\alpha_1} N''_{\alpha_2} \ldots N_{\alpha_k}^{(k)} e^{\xi_{\alpha_1}+\xi_{\alpha_2}+\ldots+\xi_{\alpha_k}},$$

où la somme est étendue aux combinaisons que l'on obtient en donnant, de toutes les manières possibles, aux $k$ entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les valeurs $1, 2, \ldots, r$. Si l'on développe cette expression en série, l'ensemble des termes de dimension $\mu$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu!} \Sigma N'_{\alpha_1} N''_{\alpha_2} \ldots N_{\alpha_k}^{(k)} (\xi_{\alpha_1} + \xi_{\alpha_2} + \ldots + \xi_{\alpha_k})^\mu,$$

où la somme est étendue aux mêmes combinaisons que tout à l'heure, sera nécessairement une fonction symétrique *entière* de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$. Si donc $g(z)$ est une fonction entière quelconque d'une indéterminée $z$, l'expression

$$\Sigma N'_{\alpha_1} N''_{\alpha_2} \ldots N_{\alpha_k}^{(k)} g(\xi_{\alpha_1} + \xi_{\alpha_2} + \ldots + \xi_{\alpha_k}),$$

où la somme est toujours étendue aux mêmes combinaisons, sera aussi une fonction symétrique entière de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$; par suite, la quantité

$$\Sigma N'_{\alpha_1} N''_{\alpha_2} \ldots N_{\alpha_k}^{(k)} g_\nu(x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}),$$

obtenue en remplaçant dans l'expression précédente les indéterminées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ par les nombres algébriques $x_1, x_2, \ldots, x_r$ et en prenant, pour la fonction entière quelconque $g(z)$, l'une des

$(n+1)$ fonctions $g_0(z)$, $g_1(z)$, ..., $g_n(z)$, sera un nombre rationnel.

En se rappelant la définition des nombres $z_0$, $z_1$, ..., $z_n$ et des entiers $C_0$, $C_1$, ..., $C_a$, on voit donc que le nombre

$$\sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda g_\nu(z_\lambda)$$

est un nombre rationnel. Il en sera donc de même de son multiple entier

$$\sum_{\lambda=0}^{n} a_0^n C_\lambda g_\nu(z_\lambda).$$

Ainsi le nombre $\sum_{\lambda=0}^{n} a_0^n C_\lambda g_\nu(z)$ est un *nombre entier* au sens ordinaire du mot. Ce nombre entier est différent de zéro pour l'un au moins des indices $\nu = 0, 1, \ldots, n$; car, s'il était nul pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$, on aurait $(n+1)$ équations homogènes et linéaires en $C_0$, $C_1$, ..., $C_n$; il faudrait donc, comme l'un au moins des nombres C est différent de zéro, que le déterminant D

$$D = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_0(z_1) & \cdots & g_0(z_n) \\ g_1(z_0) & g_1(z_1) & \cdots & g_1(z_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ g_n(z_0) & g_n(z_1) & \cdots & g_n(z_n) \end{vmatrix},$$

fût nul, ce qui n'est pas, d'après le lemme III déjà cité de M. Hermite.

Dans ce qui précède, le nombre positif $\delta$ est à notre choix. Supposons que nous l'ayons tout d'abord déterminé de manière que chacun des $(n+1)$ nombres positifs

$$\left| a_0^n e^{-z_0} \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda \varepsilon_{\nu,\lambda} \delta \right| \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

soit plus petit que l'unité. En nous reportant à l'équation

$$a_0^n g_\nu(z_0) e^{-z_0} S = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda a_0^n g_\nu(z_\lambda) + \delta a_0^n e^{-z_0} \sum_{\lambda=0}^{n} \varepsilon_{\nu,\lambda} C_\lambda,$$

où $\nu$ désigne l'un des indices 0, 1, ..., $n$, pour lequel le nombre *entier*

$$\sum_{\lambda=0}^{n} a_0^n \, C_\lambda g_\nu(z_\lambda)$$

est différent de zéro (et nous venons de voir qu'il y a au moins *un* tel indice), nous voyons alors que le second membre de l'équation est différent de zéro. Donc S n'est pas nul, ce qu'il fallait démontrer.

Le même théorème a manifestement encore lieu si $N_1, N_2, \ldots, N_r$ désignent des nombres *rationnels* dont l'un au moins ne soit pas nul.

Ce premier théorème de M. Lindemann comprend comme cas particuliers et le théorème de M. Hermite : e *est un nombre transcendant,* et le théorème de M. Lindemann : $\pi$ *est un nombre transcendant.* Il suffit, en effet, de prendre, pour les nombres algébriques distincts $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $r$ nombres entiers distincts quelconques, et d'observer que $r$ est à notre choix, pour avoir démontré à nouveau le théorème de M. Hermite. Et, si l'on prend $r = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$, on retombe sur ce théorème dont on a déduit comme corollaire que $\pi$ est un nombre transcendant : *l'équation* $e^x + 1 = 0$ *n'admet pas de racine algébrique.*

D'autre part, ce premier théorème de M. Lindemann admet luimême la généralisation immédiate suivante :

*Si* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *sont* $r$ *nombres algébriques distincts quelconques, et si* $N_1, N_2, \ldots, N_r$ *sont* $r$ *nombres rationnels quelconques donnés, dont l'un au moins soit différent de zéro, l'équation*

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \ldots + N_r e^{x_r} = 0$$

*est impossible.*

En effet, on peut toujours former une équation algébrique à coefficients entiers et à discriminant différent de zéro, dont $x_1, x_2, \ldots, x_r$ soient $r$ des racines. Si le degré de cette équation est $r$, le théorème est démontré. Si le degré de cette équation est $r + \rho$ où $\rho$ est un entier positif, nous désignerons par $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+\rho}$ ses $\rho$ racines distinctes de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ; nous appliquerons ensuite à cette équation de degré $r + \rho$ le théorème qui vient d'être

démontré : Quels que soient les entiers choisis $N_1, N_2, \ldots, N_{r+\rho}$, l'égalité

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \ldots + N_{r+\rho} e^{x_{r+\rho}} = 0$$

est impossible; elle est donc aussi impossible si nous choisissons $N_{r+1} = N_{r+2} = \ldots = N_{r+\rho} = 0$ et $N_1, N_2, \ldots, N_r$ quelconques, pourvu que l'un d'eux ne soit pas nul. La généralisation annoncée est ainsi démontrée pour des nombres entiers, donc aussi pour des nombres rationnels $N_1, N_2, \ldots, N_r$.

Théorème II de M. Lindemann. — *Si l'on désigne par $x_1$, $x_2, \ldots, x_r$, $r$ nombres algébriques distincts, et par $X_1, X_2, \ldots$, $X_r$, $r$ nombres algébriques quelconques dont l'un au moins n'est pas nul, la somme*

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \ldots + X_r e^{x_r}$$

*est différente de zéro.*

D'après un théorème fondamental de l'Algèbre, on peut toujours déterminer un nombre algébrique $\xi'$, racine d'une équation irréductible déterminée à coefficients entiers, d'un certain degré $k$,

$$\varphi(x) = 0,$$

et tel que chacun des nombres algébriques donnés $X_1, X_2, \ldots$, $X_r$ soit fonction rationnelle entière à coefficients rationnels de $\xi'$. Soient

$$X_1 = \mathfrak{F}_1(\xi'), \qquad X_2 = \mathfrak{F}_2(\xi'), \qquad \ldots, \qquad X_r = \mathfrak{F}_r(\xi')$$

ces fonctions entières de $\xi'$. Désignons par

$$\xi'', \quad \xi''', \quad \ldots, \quad \xi^{(k)}$$

les $(k-1)$ autres racines de l'équation de degré $k$, $\varphi(x) = 0$; formons le produit Q des $k$ sommes

$$\sum_{\alpha_h=1}^{r} \mathfrak{F}_{\alpha_h}(\xi^{(h)})\, e^{x_{\alpha_h}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k),$$

et répétons sur ce produit les mêmes opérations que nous avons faites au début de cet article sur le produit plus général P. Nous

pourrons alors écrire successivement

$$Q = \Sigma \mathfrak{F}_{\alpha_1}(\xi')\,\mathfrak{F}_{\alpha_2}(\xi'')\,\ldots\,\mathfrak{F}_{\alpha_k}(\xi^{(k)})\,e^{x_{\alpha_1}+x_{\alpha_2}+\ldots+x_{\alpha_k}}$$

(où la somme est étendue aux combinaisons que l'on obtient en donnant, de toutes les manières possibles, aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, les valeurs $1, 2, \ldots, r$) et

$$Q = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda e^{z_\lambda},$$

en désignant par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les $(n+1)$ nombres algébriques *différents*

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}.$$

Les quantités $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont ici des fonctions symétriques entières, à coefficients rationnels, des nombres algébriques conjugués $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(k)}$; donc elles peuvent être exprimées par des nombres *rationnels*.

Mais, à cause de l'irréductibilité de l'équation $\varphi(x) = 0$, on ne peut avoir

$$\mathfrak{F}_\mu(\xi^{(h)}) = 0$$

que si l'on a aussi, pour le même indice $\mu$,

$$X_\mu = \mathfrak{F}_\mu(\xi') = 0;$$

en se rappelant que l'un au moins des nombres $X_1, X_2, \ldots, X_r$ n'est pas nul, on voit donc que les $r$ nombres algébriques

$$\mathfrak{F}_1(\xi^{(h)}), \quad \mathfrak{F}_2(\xi^{(h)}), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_r(\xi^{(h)})$$

ne peuvent être tous nuls pour un même indice $h$: l'hypothèse faite pour les $k$ systèmes de nombres A est, par suite, vérifiée dans le cas qui nous occupe; donc *l'un au moins des nombres rationnels* $C_0, C_1, \ldots, C_n$ *est différent de zéro*.

Mais, d'après le corollaire du premier théorème de M. Lindemann, il en résulte que la quantité

$$Q = C_0 e^{z_0} + C_1 e^{z_1} + \ldots + C_n e^{z_n}$$

ne peut être nulle; donc la somme

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \ldots + X_r e^{x_r},$$

qui est un facteur de Q, a une valeur différente de zéro, ce qu'il fallait démontrer.

On peut dire de ce second théorème, énoncé sans démonstration par M. Lindemann, qu'il est le couronnement des recherches entreprises par M. Hermite sur la fonction exponentielle.

Nous allons, pour terminer, déduire de ce théorème général quelques théorèmes particuliers bien curieux.

1° Pour $r = 2$,

$$x_1 = x, \qquad X_1 = -1$$
$$x_2 = 0, \qquad X_2 = X,$$

le théorème général se réduit au suivant :

L'équation $e^x = X$, où $x$ est un nombre algébrique différent de zéro et X un nombre algébrique quelconque, est impossible.

On a donc les deux théorèmes d'Arithmétique *très remarquables* que voici :

*Si l'on donne à la variable $x$ une valeur algébrique quelconque, autre que $x = 0$, la fonction exponentielle de $x$, $e^x$, est un nombre transcendant.*

*Le logarithme népérien d'un nombre algébrique quelconque X, autre que l'unité, est toujours un nombre trnscendant.*

2° Pour $r = 3$

$$X_1 = i, \qquad x_1 = \frac{xi}{2},$$
$$X_2 = -i, \qquad x_2 = -\frac{xi}{2},$$
$$X_3 = X; \qquad x_3 = 0,$$

le théorème général se réduit au suivant :

Lorsque le nombre algébrique $x$ n'est pas nul, il est impossible que l'expression

$$ie^{\frac{xi}{2}} - ie^{-\frac{xi}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}$$

soit égale à un nombre algébrique quelconque X.

Ou encore :

Si X est un nombre algébrique quelconque donné différent de

zéro, l'équation

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

ne peut pas être vérifiée par un nombre algébrique $x$; si donc elle est vérifiée par un nombre $x$, ce nombre est nécessairement transcendant.

Mais, si l'on envisage, sur une circonférence O dont le rayon est pris pour unité de longueur, un arc AB dont la longueur soit mesurée par le nombre $x$, la corde correspondante $\overline{AB}$ est mesurée par le nombre $2 \sin \frac{x}{2}$; donc, d'après le théorème que nous venons d'énoncer, si la corde $\overline{AB}$ a une longueur mesurée par un nombre algébrique, l'arc AB ne peut être mesuré que par un nombre transcendant.

Ainsi, *la rectification, par des constructions géométriques où l'on ne ferait usage que de courbes et de surfaces algébriques, d'un arc* AB *de circonférence dont la corde* $\overline{AB}$ *correspondante a une longueur mesurée par un nombre algébrique quelconque, est impossible.*

De même $\frac{x}{2}$ mesure l'aire du secteur correspondant à l'arc $x$, c'est-à-dire à la corde $X = 2 \sin \frac{x}{2}$. Il est donc également impossible d'effectuer, par des constructions algébriques où l'on ne ferait usage que de courbes et de surfaces algébriques, la quadrature d'un secteur AOB dont la corde correspondante $\overline{AB}$ a une longueur mesurée par un nombre algébrique quelconque.

1re Part -

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J. MASSAU. — MÉMOIRE SUR L'INTÉGRATION GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS. Un volume in-8° de 731 pages, avec atlas in-4° de 24 Planches. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Voici, d'après une Note de l'auteur (publiée avant l'Ouvrage lui-même dans le *Bulletin de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand,* décembre 1877), l'analyse de ce travail considérable :

Les principales méthodes graphiques employées jusqu'à présent sont de deux espèces : les unes sont d'ordre purement géométrique et forment une science connue depuis longtemps sous le nom de *calcul graphique* ou *calcul par le trait :* les autres se déduisent à la fois de la Géométrie et de la Statique et forment une science toute moderne que l'on a appelée *Statique graphique.* Le principal avantage de cette dernière, c'est qu'elle est presque uniquement fondée sur un même tracé, qui est le tracé du polygone funiculaire au moyen du polygone de Varignon. Il arrive ainsi que l'on se familiarise très vite avec les constructions; et non seulement on arrive plus vite au but que par toute autre méthode, mais un simple examen de l'épure permet de saisir immédiatement l'ensemble des opérations et d'en vérifier la complète exactitude. Le calcul graphique ne paraît pas présenter les mêmes avantages; les problèmes les plus importants ne sont résolus que par des méthodes incomplètes ou peu pratiques, qui presque toujours fatiguent plus l'esprit que les calculs qu'elles veulent éviter. La raison en est dans la diversité des opérations, et il semble qu'en choisissant une construction type et en faisant de cette construction un emploi systématique, on arriverait à de nouvelles méthodes aussi avantageuses que celles de la Statique graphique. Le but de l'Ouvrage de M. Massau est d'exposer systématiquement ces méthodes. Il est divisé en six Livres.

Le Livre Ier traite de l'opération type appelée *intégration graphique,* et qui peut s'énoncer comme suit : Étant donnée une courbe $y = fx$, dite *courbe primitive,* construire la courbe $Y = Fx$ (si $F'x = fx$) dite *courbe intégrale.* De même que par

le polygone de Varignon, on obtient les inclinaisons des côtés du polygone funiculaire, de même on peut construire un diagramme donnant les inclinaisons des côtés d'un polygone inscrit ou circonscrit à l'intégrale et déduire de là deux méthodes générales d'intégration graphique qui exigent, la première, la connaissance des ordonnées moyennes, la seconde, la connaissance des abscisses moyennes des arcs de la courbe primitive. Dans la plupart des cas utiles à considérer pour les besoins de la pratique, ces ordonnées et abscisses moyennes se déterminent facilement et l'on obtient une intégration exacte ; dans les autres cas, on opère par assimilation et l'on obtient une intégration approchée. Il est inutile de se préoccuper des constantes d'intégration ; une intégrale quelconque du $n^{\text{ième}}$ ordre étant tracée, elle représente l'intégrale générale, si l'on suppose que les ordonnées de la courbe soient limitées vers les $y$ négatifs par une parabole arbitraire de degré $n$ ; les conditions qui définissent une intégrale particulière permettent de déterminer la courbe de repère relative à cette intégrale.

Le Livre II est consacré à l'étude des applications diverses à l'Algèbre, la Géométrie et la Mécanique. Un grand nombre de courbes peuvent être construites par les procédés d'intégration graphique ; on peut citer les paraboles de divers degrés données par leurs équations ou un nombre suffisant de points et de tangentes, les hyperboles ayant une équation de la forme

$$y = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \ldots + l,$$

les courbes dont l'ordonnée est une fonction rationnelle de l'abscisse et plus généralement toutes les courbes algébriques auxquelles M. Cayley a donné le nom de *courbes unicursales*. Les aires planes et leurs moments de divers ordres peuvent se déterminer au moyen de certaines courbes intégrales dites *courbes des moments ;* ainsi les moments statiques et les moments d'inertie s'obtiennent respectivement par une double et une triple intégration ; l'ordonnée du centre de gravité est l'ordonnée où le moment statique est nul et s'obtient avec la plus grande facilité. Les lieux des efforts tranchants et des moments fléchissants d'une poutre droite sollicitée par des forces normales sont respectivement les intégrales première et seconde de la courbe des charges ; la forme

d'équilibre d'un fil sollicité par les mêmes forces est identique au lieu des moments fléchissants et peut s'obtenir par une double intégration.

Le Livre III contient des tracés qui permettent d'effectuer graphiquement tous les calculs des terrassements nécessaires à l'établissement d'une route.

Le Livre IV comprend le développement des méthodes graphiques relatives à la stabilité des constructions en maçonnerie; on peut sans aucun calcul déterminer les dimensions des murs de réservoir ou de soutènement et résoudre tous les problèmes relatifs à la stabilité des voûtes.

Le Livre V traite du calcul des poutres droites. Les lieux des efforts tranchants et des moments fléchissants sont des intégrales affectées de certaines constantes (réactions d'appui, moments d'encastrement); l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ et la flèche $y$ de la fibre moyenne déformée sont respectivement les intégrales première et seconde du lieu des moments fléchissants; il est ainsi possible de trouver graphiquement tous les éléments d'une poutre droite quels que soient la charge, les conditions d'appui et le nombre de travées.

Le Livre VI est l'exposé d'un procédé d'intégration applicable aux équations différentielles du premier ordre de la forme $f(x, y, y') = 0$. Il repose sur l'étude des courbes $f(x, y, a)$ qui sont les lieux des points où les intégrales en nombre infini de l'équation donnée ont la même inclinaison. On peut par ce procédé étudier la forme des axes hydrauliques des cours d'eau non prismatiques.

Ce qui distingue cet Ouvrage des travaux similaires, c'est que l'auteur se propose plutôt de déterminer les intégrales par des éléments suffisants que de tracer les courbes effectivement. Les intégrations successives des fonctions entières s'effectuent (Livre II) en déterminant une parabole de degré $n$ par un contour polygonal semi-circonscrit. Les côtés extrêmes de ce contour touchent l'arc parabolique; on peut trouver (Livre V) autant de points et de tangentes que l'on veut par une construction simple. Les différences de divers ordres des ordonnées de ces polygones sont proportionnelles aux dérivées en un point de l'arc parabolique; on

peut ainsi exprimer facilement le contact d'ordre quelconque entre deux arcs paraboliques différents.

Une grande partie de l'Ouvrage est fondée sur l'intégration exacte des paraboles. Dans d'autres parties, les fonctions ne pouvant être intégrées, l'auteur emploie l'intégration graphique approchée.

---

J. MASSAU. — Note sur les intégraphes. Paris, Gauthier-Villars et fils (32 pages).

J. MASSAU. — Calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels. Paris, Gauthier-Villars et fils (21 pages).

Complément du Volume de l'auteur sur l'*Intégration graphique :* 1. Intégraphe à plateau. 2. Intégraphes de M. Abdank-Abakanowicz. 3. Intégrateur à sphère. 4-7. Classification rationnelle des intégrateurs : 1° Intégrateurs en coordonnées polaires, 2° en coordonnées rectangulaires, 3° à erreurs compensées. 8. Intégrateurs particuliers; tracé mécanique des intégrales elliptiques. 9. Balance à peser les polynômes.

La seconde brochure contient une nouvelle solution, basée sur l'intégration graphique, de la recherche des cotisations des sociétés de secours mutuels.

---

P. MANSION. — Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal. Gand, Hoste, 1887 (38 pages in-8°).

Cet Opuscule, extrait du *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale* de l'auteur, est divisé en trois Chapitres :

I. Le premier contient un aperçu de l'histoire générale du Calcul infinitésimal sous le titre : *Inventeurs et précurseurs.* Les noms cités sont les suivants : 1. Leibnitz, Newton, Jacques et Jean Bernoulli, Maclaurin, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Clebsch; Hermite, Weierstrass, Kronecker, Sylvester, Cayley, Brioschi. 2. Eudoxe, Euclide, Archimède, Pappus; Neper, Kepler, Cavalieri, Grégoire de S. Vincent, Descartes, Roberval, Pascal, Sluse, Fermat, Wallis, Huygens.

L'idée principale développée dans ce Chapitre est la suivante : Avant Leibnitz et Newton, les grands géomètres savaient résoudre le problème des tangentes et celui des quadratures; Leibnitz et Newton trouvent que le problème des quadratures est identique au problème inverse des tangentes et imaginent un algorithme (admirable chez Leibnitz, peu pratique chez Newton) pour traiter ces trois genres de questions (tangentes, quadratures, problème inverse des tangentes). Le XVIII^e^ siècle développe les découvertes de Leibnitz et de Newton, sans grande rigueur, et surtout dans le domaine des fonctions élémentaires; le XIX^e^ siècle réintroduit dans la Science la rigueur des démonstrations, étudie de nouvelles fonctions, aussi bien quand la variable est réelle que lorsqu'elle est imaginaire.

II. Le second Chapitre contient la traduction annotée du premier article de Leibnitz sur le Calcul différentiel et celle du second lemme du Livre II des *Principia* de Newton. L'auteur montre, dans les notes, que Leibnitz n'a jamais eu, sur les principes du Calcul infinitésimal, les idées absurdes qu'on lui attribue souvent; il avait pleine conscience de l'identité de sa méthode avec celle des anciens; sa définition de la différentielle d'une fonction $y = F(x)$ est, aux termes près, celle de Cauchy, c'est-à-dire que $dy = F'(x)\,\Delta x$, $\Delta x$ étant une grandeur finie arbitraire qui est dessinée sur la figure. Newton est également rigoureux dans l'exposé des idées fondamentales de l'Analyse infinitésimale, mais il voile sa pensée autant qu'il est possible. Incidemment est signalée cette particularité : Newton, le premier probablement, a désigné par une lettre une quantité quelconque affectée du signe *plus* ou du signe *moins*.

III. On a introduit dans la Science, sous le seul nom d'*infiniment petit*, trois espèces d'êtres analytiques que l'auteur appelle *indéfiniment petits* (*évanouissant* de Newton), *infiniment petits nuls* d'Euler (*indivisibles*) et *pseudo-infiniment petits*. Un indéfiniment petit est une quantité qui peut *devenir* et *rester* aussi petite qu'on le veut, tandis qu'une ou plusieurs variables dont elle dépend tendent vers des valeurs inaccessibles; un *infiniment petit nul* est une quantité qui *est* inférieure à toute quantité

donnée, et dont on sait, en outre, dans chaque cas particulier, qu'elle est la limite d'une certaine quantité finie (d'un certain indéfiniment petit); un pseudo-infiniment petit est une conception contradictoire de quelques géomètres : c'est *une soi-disant quantité différente de zéro et cependant inférieure à toute grandeur assignable*. L'auteur essaye de montrer que Kepler, Cavalieri, Wallis emploient, au fond, les infiniment petits nuls, sous une forme vague; Euler en donne systématiquement la théorie; Jean Bernoulli, de l'Hospital, Poisson (et parfois Navier, Cournot, et même Poinsot) paraissent être seuls à croire aux pseudo-infiniment petits; Fermat, Roberval, Pascal, Newton, Leibnitz se servent de la méthode des infiniment petits, en employant souvent un langage abrégé qui a induit en erreur les lecteurs non prévenus sur leurs véritables sentiments; mais Tacquet et Pascal au XVII^e siècle, Maclaurin au XVIII^e, Cauchy au XIX^e, ont indiqué avec précision le sens des propositions où entre ce terme dangereux : *infiniment petit*.

Dans un Appendice, l'auteur, après quelques mots sur Viète et Barrow, fait connaître la part de d'Alembert, Landen, Carnot, Lacroix et Poinsot, dans le procédé d'exposition du Calcul différentiel, généralement admis maintenant.

---

SCHWARZ. — GESAMMELTE MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN. 2 vol. in-8° ; XII-338 p., 4 Pl. ; VIII-370 p. Berlin, Julius Springer, 1890.

M. Schwarz offre au public savant la réunion des Mémoires de Mathématiques qu'il a publiés dans divers Recueils : il serait à souhaiter que cet exemple fût suivi; les journaux mathématiques rendent assurément les plus grands services, tant à ceux qui les lisent qu'à ceux qui y écrivent; mais bien peu de mathématiciens peuvent les avoir tous sous la main, et c'est souvent dans les Recueils les plus divers que se trouvent dispersés les écrits de maîtres que l'on tiendrait le plus à lire et à relire. C'est à ces maîtres qu'on s'est adressé de tous côtés pour avoir des articles qui ne pouvaient manquer d'honorer le journal où ils écriraient : ils ne refusent pas de rendre, à des publications qui sont toutes utiles, un service dont la demande ne laisse pas d'être flatteuse; mais

l'inconvénient de cette dispersion est trop clair, et il faut savoir gré à ceux qui, comme M. Schwarz, prennent la fatigue de réunir leurs œuvres, et viennent ainsi en aide à ceux qui cherchent à s'instruire. Cette reconnaissance ne lui fera pas défaut, et tout le monde souhaitera que les nombreuses années de travail qui lui sont dues encore lui permettent d'ajouter d'autres volumes à ceux qu'il nous offre.

Le premier Volume comprend l'ensemble des recherches de l'auteur sur les surfaces minima : il contient treize Notes ou Mémoires, sur des surfaces particulières, sur la théorie générale des surfaces minima et sur les problèmes du calcul des variations qui s'y rapportent; quelques Notes intéressantes terminent le Volume, qu'enrichissent quatre Planches d'une fort belle exécution.

La variété des sujets traités dans le second Volume montre bien l'étendue d'esprit de M. Schwarz : on y trouvera, à côté de recherches de l'ordre le plus élevé, des études relatives à des sujets d'une nature élémentaire, traités avec une extrême élégance : ainsi ce volume commence par une ingénieuse démonstration du théorème de Pohlke sur la possibilité de projeter, suivant trois directions données dans un plan, les arêtes d'un trièdre trirectangle, la projection se faisant parallèlement à une direction convenable, et finit par une démonstration de la propriété du triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle : on y trouvera un exemple de fonction continue qui n'admet pas de dérivée, les conditions sous lesquelles on peut affirmer que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right]$$

et diverses propositions qui concernent les fondements de l'Analyse. On y trouvera aussi les profondes recherches de l'auteur sur la représentation conforme et le principe de Dirichlet, ainsi que ces Mémoires sur l'équation de Gauss où il donne les cas dans lesquels la série hypergéométrique est une fonction algébrique de $x$, et où il appelle, en passant, l'attention des géomètres sur ces fonctions uniformes qui naissent de la considération du rapport de deux intégrales d'une équation différentielle du second ordre, fonctions dont M. Poincaré devait donner plus tard la théorie complète. J. T.

# MÉLANGES.

## SUR UN OPUSCULE DE DESARGUES;

Par M. Paul TANNERY.

On sait que les exemplaires originaux des divers opuscules de Desargues sont en général introuvables.

En particulier, sa *Perspective* de 1636 n'a été connue de Poudra (¹), l'éditeur des *Œuvres de Desargues*, Paris, 1864 (2 vol. in-8°), que par la réimpression qu'en avait faite Abraham Bosse à la suite d'un de ses Traités (1648).

J'ai rencontré un exemplaire de ce premier opuscule de Desargues, relié à la fin d'un volume de la Bibliothèque nationale, imprimés V. 122 (inventaire V. 1527), in-folio, qui contient en outre la *Géostatique* latine de Jean de Beaugrand, 1636, et une réfutation en latin de cette Géostatique par Guy de la Brosse.

L'opuscule de Desargues est imprimé sur 12 pages in-folio et accompagné d'une planche gravée (la *stampe*) en double au recto

---

(¹) Il dit (vol. I, p. 26) : « Son premier Ouvrage (de Desargues) avait pour titre : *Méthode universelle de mettre en perspective les sujets donnés réellement, ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'Ouvrage, par G. D. L. Paris,* 1636, *avec privilège* (qui était, dit-on, de 1630). Il était imprimé in-folio et probablement en caractères microscopiques; il ne devait être composé que d'une seule feuille, avec une planche de gravure. Cette édition est perdue et l'Ouvrage le serait lui-même, si Bosse, dans sa perspective publiée en 1647 ne l'eût reproduit à la suite de son Ouvrage ».

Le titre donné par Poudra est emprunté au *Thaumaturgus opticus* (Paris, 1646) du P. Niceron, d'où il est passé dans les manuels bibliographiques. On verra que ce titre est complètement défiguré; Bosse, au contraire, dans sa réimpression (p. 321-334 de sa *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective, etc.*, Paris, 1648 et non 1647 comme le dit Poudra) avait conservé la formule exacte. C'est également Bosse (*La pratique du trait à preuves de M. Desargues Lyonnais, etc.*, Paris 1643) qui nous apprend que Desargues avait pour ses écrits un privilège général de février 1630.

Quant aux conjectures de Poudra sur la forme de l'édition de l'opuscule de 1636, elles se fondaient sur l'hypothèse que cette édition devait ressembler à celle du *Brouillon-projet de la coupe des pierres* (1640), le seul opuscule de Desargues dont, avant la découverte que je viens de faire, on connût un exemplaire original (Bibliothèque de l'Institut). On verra que ces conjectures étaient inexactes.

et au verso d'un feuillet qui, collé avec un autre laissé en blanc, devait faire chemise pour le tout.

L'exécution matérielle est très soignée.

La *stampe* porte le titre suivant :

*Exemple de l'une des manières universelles du* S. G. D. L., *touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature qui soit hors du champ de l'ouvrage.*

Ce titre est reproduit en haut de la première page de texte. La dernière page imprimée porte la mention :

*A Paris, en May* 1636. *Avec Privilège. Ces Exemplaires sont ès mains de Monsieur Bidault H* (¹) *du Roy, demeurant au gros Pauillon des Tuylleries, au bout de la grande Galerie du Louure.*

La dernière phrase n'a pas été reproduite par Bosse.

Sur le feuillet blanc accolé à la stampe, se trouve la mention manuscrite suivante :

*Pro viro clarissimo Isaaco Beckmanno* (²), *Dortensis Collegii Rectore.*

Il semble que cette mention, du reste assez difficile à déchiffrer, peut être, jusqu'à nouvel ordre au moins, considérée comme un spécimen de l'écriture de Desargues, qui est absolument inconnue.

L'opuscule (³) intercalé dans le volume de laNationale avant celui de Desargues et où s'est essayé comme mathématicien le célébre médecin du Roi, directeur du Jardin des Plantes, n'offre point par lui-même un grand intérêt; mais la préface n'en est point à dédai-

(¹) *Lisez* Hôte (?).

(²) Isaac Beekman est connu pour ses relations et ses démêlés avec Descartes.

(³) En voici le titre : *Elucidatio paralogismorum quorundam, vel errorum contra leges ratiocinii et demonstrationis quos admisit Dominus de Beaugrand in sua inexplicata demonstratione primæ partis quartæ propositionis sui libri qui inscriptus est Geostatice.*

*Ad ipsummet Dominum de Beaugrand.*

*Auctore Guidone de La Brosse, Equite, Consiliario et Medico ordinario Regis Christianissimi, Hortoque Regio Plantarum medicinalium præfecto.*

*Parisiis, ex typographia Iacobi Dugast, via S. Joannis Bellovacensis, ad*

gner pour l'histoire de Desargues. On y voit que ce dernier avait été particulièrement lié avec Beaugrand, qu'il n'approuva pas la *Géostatique* de ce dernier plus que ne le firent Fermat et Descartes et que, dans une certaine mesure au moins, il encouragea La Brosse à la réfuter. Ce dut être l'origine des démêlés ultérieurs entre Beaugrand et Desargues.

Je crois enfin devoir signaler, dans l'édition de Poudra des Œuvres de Desargues, une omission sans grande importance au point de vue mathématique, mais relativement singulière eu égard au soin avec lequel les écrits du géomètre lyonnais ont été recherchés, sur l'initiative de Michel Chasles.

Dans la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* de Mersenne (Paris, Ballard, 1637), livre sixième (de l'Art de bien chanter), la première proposition (pages 332-342) est constituée par un petit Traité élémentaire de Musique qui est expressément donné comme étant dû à Desargues.

---

*Olivam Roberti Stephani, et in ejus officinâ, viâ Veteris Fibulationis prope Pontem divi Michaëlis.* M.D.C. XXXVIII.

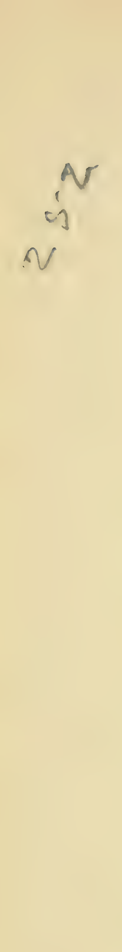
Le ton de la réfutation est passablement violent; on en peut juger par le choix de l'épigraphe :

*Qui omnia se invenisse prædicant nec tamen Demonstrationem afferunt, eos facile res ipsa redarguit : quippe qui profiteantur se ea invenisse, quæ fieri nullo modo possunt.* (*Archimedes in Præfat. in lib. de Spiral.*)

Guy de La Brosse a, au reste, publié sa réfutation de Beaugrand à la fois en latin et en français. Un exemplaire de l'édition française (*Esclaircissement.... au mesme Monsieur de Beaugrand*), daté de 1637, se trouve à la Bibliothèque Nationale, Imprimés, sous la cote $V^{122}$ (Inventaire V, 1538).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XIV.



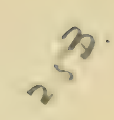


# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

## TOME XIV; 1890. — PREMIÈRE PARTIE.



# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES MATIÈRES.

### COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages

BERTRAND (J.). — Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité. 41-55

BOUSSINESQ. — Leçons synthétiques de Mécanique générale servant d'introduction au cours de Mécanique physique de la Faculté des Sciences de Paris ........ 5-6

BRUNN (H.). — Ueber Ovale und Eiflächen. — Ueber Curven ohne Wendpunkte ........ 95-97

DŒHLER (MAX). — Beitrag zur Potentialtheorie ........ 137-141

FAERBER (CARL). — Herleitung von Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln von Gleichungen (speciell der Allgemeinen viergliedrigen und den Gleichungen vom fünften Grade) aus der Beschaffenheit ihrer Discriminantenmannigfaltigkeit ........ 59-60

FAVARO (ANT.). — Per la edizione nazional delle Opere di Galileo Galilei, sotto gli auspichii di S. M. il Re d'Italia. — Esposizione e disegno. — Indice alphabetico e topografico del commercio epistolare ........ 123-125

FUERLE (HERMANN). — Ueber die eindeutigen Lösungen einer Gruppe von Functionalgleichungen ........ 85-87

GOLDSCHEIDER (FRANZ). — Das Reciprocitätsgesetz der achten Potenzreste ........ 225-228

TEIXEIRA (GOMÈS). — Curso di Analyse infinitesimal ........ 45-58

HAENTZSCHEL (EMIL). — Beitrag zur Theorie der Functionen des Elliptischen und des Kreiscylinders ........ 127-130

LANDSBERG (O.). — Untersuchungen über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit ........ 209-212

LEJEUNE-DIRICHLET'S WERKE (G.). — Herausgegeben aus Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker ........ 121

Pages.
Mansion (P.). — Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal........ 244-246
Massau (J.). — Sur l'intégration graphique et ses applications........ 241-244
— Note sur les intégraphes........................................ 244
— Calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels............ 244
Mathieu (E.). — Théorie de l'élasticité des corps solides............. 161-184
Mueller (Richard). — Ueber die Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist........................................ 58-59
Prytz (H.). — Tables d'antilogarithmes.................................. 87-88
Rouché (E.). — Éléments de Statique graphique.......................... 105-107
Rouse Ball (W.-W.). — A history of the study of Mathematics at Cambridge........................................................ 89-94
Salmon. — Leçons d'Algèbre supérieure.................................. 185
Schwartz. — Gesammelte mathematische Abhandlungen...................... 240-245
Thiele (T.-N.). — Torelœsninger over almindelig Jattagelseslore : Sandsynlighedsregnind og mindste koadraters Methode................... 73-85
Velde (Wilhelm). — Ueber einen Specialfall der Bewegung eines Punktes, welcher von zwei festen Centren angezogen wird...................... 125-126
Villié. — Compositions d'Analyse, de Mécanique et d'Astronomie..... 141-142
Voss (A.). — Zur Erinnerung an Axel Harnack............................ 87
Zaremba. — Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps solide, homogène, indéfini............................................. 121-123

## MÉLANGES.

Borel (Émile). — Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente............................................. 97-102
Brioschi. — Notice sur la vie et les travaux de Georges-Henri Halphen. 62-72
Callandreau (O.). — Calcul des transcendantes de Bessel

$$J_n(a) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

pour les grandes valeurs de $a$, au moyen de séries convergentes..... 110-114
Cellérier (Ch.). — Note sur les principes fondamentaux de l'Analyse.. 142-160
Cesaro. — Sur la multiplication des séries.............................. 114-120
Teixeira (Gomès). — Extrait d'une lettre à M. Hermite.................. 200-208
Hamy (Maurice). — Sur le théorème de la moyenne........................ 103-104
Hermite. — Discours prononcé devant le Président de la République le 5 août, à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne.................. 6-36
Liste chronologique des pièces de la correspondance de Fermat qui seront publiées dans les volumes II et III de ses Œuvres........... 133-134
Molk (Jules). — Exposition de la démonstration donnée par M. Weierstrass dans les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie* (décembre 1885), de ce théorème : $\pi$ est un nombre transcendant............... 186-200
— Exposition de la démonstration, donnée par Weierstrass, des théorèmes de M. Lindemann sur la fonction exponentielle............... 228-240
Picard (Émile). — Sur l'inversion de l'intégrale elliptique et l'irréductibilité de ses périodes......................................... 107-110
— Sur le nombre des intégrales abéliennes de première espèce...... 131-132

Pages.
SAINT-GERMAIN (A. DE). — Généralisation de la règle de convergence de Gauss. .......... 212-215
TANO (F.). — Sur quelques points de la théorie des nombres. .......... 215-218
WILLIOT (V.). — Sur une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange. .......... 218-224
TANNERY (P.). — Sur un opuscule de Desargues. .......... 248-250
WOLF. — Note sur le Traité élémentaire d'Astronomie physique par J.-B. Biot. .......... 36-37

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XIV.

15899 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

*DEUXIÈME SÉRIE.*

**TOME XIV. — ANNÉE 1890.**

(TOME XXIV DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.




PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

# BULLETIN

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES.

## SECONDE PARTIE.

### REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

### ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (¹).

6$^e$ série, tome XI; 1$^{er}$ semestre 1886.

*Du Boys* (*P.*). — Étude sur la marche des bateaux dans les courants rapides. (199-242, 9 fig.).

L'auteur croit pouvoir établir par des observations suffisamment précises l'existence d'une force apparente qui semble solliciter les grands flotteurs dans le sens du courant, et il propose une explication de ces phénomènes.

L'observation des bateaux à vapeur l'a ensuite conduit à donner une valeur de cette force apparente qui semble, pour un bateau donné, proportionnelle à la surface mouillée.

*Préaudeau* (*de*). — Notions sur le phénomène des marées. (262-291).

Compte rendu analytique d'un Ouvrage publié par M. P. Hatt, ingénieur hydrographe, renfermant les leçons faites aux élèves ingénieurs du Dépôt des Cartes et Plans de la Marine sur le phénomène des marées.

Les marées ont été, dans les études théoriques, l'objet de deux hypothèses fondamentales, suivant qu'on a admis avec Newton que les mers se mettaient à chaque instant en équilibre avec les forces qui agissent sur elles, ou avec Laplace que le liquide en mouvement doit, en vertu de la vitesse acquise, dé-

(¹) Voir *Bulletin*, XI, 259; $II_2$, 106; $IV_2$, 211; $VII_2$, 116 et 185; $VIII_2$, 71 et $XI_2$, 17.

passer la position d'équilibre et effectuer des oscillations dont la période est en rapport avec celle des forces perturbatrices de l'équilibre.

Mais les calculs de Laplace, relatifs à un globe entièrement recouvert d'eau, ne mettent pas en évidence le mécanisme du phénomène. On a reconnu l'utilité d'ajouter aux hypothèses de Laplace la restriction de négliger la densité de la masse d'eau en mouvement à la surface du globe par rapport à celle de la Terre elle-même.

Dans ces conditions, les déviations infiniment petites que subit la direction de la verticale sous l'influence de l'attraction des astres, et qui sont les causes premières des marées, dépendront exclusivement des éléments astronomiques et ne varieront pas avec les déformations mêmes qu'elles produisent.

Suivant M. Hatt, le phénomène tient, avant tout, à une modification de la direction de la verticale, et non à un changement toujours inappréciable de l'intensité de la pesanteur.

L'action de la Lune est un douze-millionième de celle de la pesanteur, et l'action du Soleil est moitié moindre; et quand la déclinaison de la Lune est zéro, elle peut dévier la verticale dans la région de l'équateur d'environ une tierce.

*Leygue* (*L.*). — Note sur les viaducs métalliques à grandes portées, suivie d'une application au viaduc de Viaur (Tarn). (304-357; 17 fig., 1 pl., 2 tabl.).

La traversée des vallées profondes à l'aide de viaducs métalliques admet deux solutions types : les arcs et les poutres droites.

Les circonstances locales peuvent imposer la solution en arcs plus ou moins surélevés, mais, au double point de vue de l'économie de la matière et des facilités de montage, les poutres droites sont préférables aux arcs; telle est du moins la thèse à l'appui de laquelle est rédigée cette Note.

Les poutres droites (systèmes Pauli, Linville et leurs dérivés) étant admises en principe, quatre questions se présentent :

Les piles seront-elles en maçonnerie ou en métal?
Quel sera le nombre des travées?
Quel sera le métal du tablier: fer ou acier?
Quel sera le procédé de mise en place?

Toutes ces questions sont traitées et résolues dans ce Mémoire au moyen de développements mathématiques d'une grande utilité pratique pour la science de l'ingénieur.

*Durand-Claye* (*L.*). — Un dernier mot sur la poussée des voûtes. (358).

Rectification de détail à une interprétation de formule de deux articles précédents (IX, 1200, et X, 1006).

*Desdouits.* — Application de la méthode rationnelle aux études dynamométriques. (371-489; 2 pl.).

Les méthodes usuelles pour la mesure des efforts développés dans les appareils

producteurs ou récepteurs du travail mécanique se réduisent à l'emploi de l'indicateur de Watt, du frein de Prony et des appareils à ressort désignés sous le nom de *dynamomètres de traction*.

Le présent Mémoire a pour objet la description et l'emploi des dynamomètres enregistreurs adaptés à l'étude de la résistance des trains.

*Galliot*. — Remarques sur les efforts élastiques et les vibrations qui se produisent dans des corps de mêmes dimensions ou seulement semblables. (490-503).

Addition à un article précédent de M. G. de Perrodil (X, 569-581). Les principes énoncés par cet ingénieur peuvent se tirer très rapidement et se démontrer de la façon la plus générale au moyen des notions fondamentales de la théorie de l'élasticité.

On établit ainsi que, dans deux corps homologues formés de même matière et tous deux en équilibre, les dérivées premières des déplacements de points, et par suite les forces étant entre elles dans le rapport de similitude K, les déplacements eux-mêmes seront entre eux dans un rapport égal au carré de ce rapport de similitude.

*Durand-Claye* (*L.*). — Note sur la marche des bateaux. (530-531).

Confirmation de la théorie exposée par M. du Boys (*voir* plus haut, p. 199-242), et attribuant l'accélération du mouvement des bateaux libres descendant un courant rapide aux actions moléculaires auxquelles est soumis le liquide.

Au siècle dernier, Dubuat avait déjà fait la même observation; mais il attribuait cet excès de vitesse à la force accélératrice produite par la pesanteur, le bateau étant posé sur une surface inclinée.

Le texte de Dubuat (n° 220 des *Principes d'Hydraulique*) se trouve reproduit ici à l'appui de cette explication.

*Hétier*. — Note sur le calcul du profil des murs barrages. (615-636; 8 fig., 1 tabl.).

Complément à un précédent Mémoire (*Annales,* t. IX, p. 795-989; 1885). Ce nouveau travail renferme l'exposé d'une méthode de calcul pour déterminer exactement le profil d'un mur barrage à parement intérieur vertical par la considération des sections obliques à pression maxima.

*Flamant*. — Note sur la Statique graphique de M. Maurice Lévy. (637-644).

Compte rendu bibliographique de la deuxième édition de cet Ouvrage. Les ingénieurs y trouveront non seulement l'exposition des principes de la Statique graphique et de ses procédés généraux, mais encore la solution complète, détaillée et raisonnée de la plupart des problèmes qui se rencontrent le plus souvent dans la pratique. Cet Ouvrage contribuera, dans une large mesure, à faire pénétrer la Statique graphique dans leurs habitudes et à relever les procédés géométriques de l'abandon, que rien ne justifie, où ils sont laissés en France.

*Anonyme.* — Observations sur le Mémoire de M. du Boys. (650-651).

On sait que, dans le Mémoire précité, M. du Boys avait cherché à expliquer pourquoi un bateau descendant au fil de l'eau prend une vitesse plus grande que celle du courant, et pourquoi un bateau à vapeur, dont la machine produit un travail moteur déterminé, prend une vitesse de $5^m$ par seconde en eau tranquille, tandis qu'il prend une vitesse inférieure à $2^m$ quand il remonte un courant d'une vitesse de $3^m$.

Le premier fait a été observé de tout temps. Dupuit en a donné une explication très simple, exposée ici et reproduite d'après ses *Études sur le mouvement des eaux courantes*, p. 234 (*voir* plus haut, p. 530, l'explication presque identique donnée par Dubuat).

Le second fait est, de même, très facile à expliquer.

*Perrodil (de).* — Note sur le tarage d'un nouveau spécimen de la balance de torsion applicable au jaugeage des eaux. (773-779; 1 pl.).

Le nouvel instrument est une modification de l'hydrodynamomètre, décrit dans les *Annales* de 1880 (*Bulletin*, $IV_2$, p. 213). L'auteur propose de l'appeler désormais *gyromètre*, parce qu'il sert à mesurer des forces de gyration ou forces tournantes.

*Tourtay.* — Note sur la stabilité des voûtes en maçonnerie. (857-870; 4 fig.).

Discussion comparative des formules données dans les *Annales* par M. Durand-Claye et par M. Laterrade.

*Leygue (L.).* — Étude sur les piles et pylônes de grande hauteur. (871-943; 15 fig., 9 tabl.).

Lorsqu'il s'agit d'élever une construction à une grande hauteur, soit pour supporter de lourdes charges, comme dans les piles de viaduc, soit pour supporter des charges relativement insignifiantes, comme dans les pylônes, deux systèmes sont en présence : la construction sera-t-elle en maçonnerie, comme au viaduc de Berne ($37^m$), de la Tardes ($60^m$), et comme à la tour de Washington ($169^m$), ou en métal, comme aux viaducs de Fribourg ($43^m$), de la Bouble ($55^m$), d'Attock ($40^m$), de Kinzua ($92^m$) et comme au pylône d'Astaria ($76^m$)?

Nous laissons de côté les grandes piles américaines en bois, telles que celles des viaducs du Haut-Portage ($62^m$), de Marent-Gulch ($70^m$), qui doivent être considérées comme des solutions provisoires.

L'économie et la durée d'exécution résoudraient plutôt la question en faveur du métal; la stabilité et la durée de l'ouvrage la trancheraient au contraire en faveur des maçonneries.

Le but de cette étude est de faire ressortir théoriquement les avantages des deux systèmes, d'indiquer les améliorations dont ils sont susceptibles, et d'essayer de conclure au meilleur choix à faire d'après les données.

*Du Boys* (*P.*). — Note sur la marche des bateaux. (944-947).

L'auteur fait observer qu'il avait bien remarqué les explications données par Dubuat et Dupuit, et que c'est justement parce qu'elles lui ont paru insuffisantes qu'il avait été amené à étudier cette question.

Tome XII; 2e semestre 1886.

*Collignon* (*E.*). — Note sur la détermination graphique des moments fléchissants limites dans les poutres droites continues. (5-39; 15 fig.).

Le problème de l'équilibre intérieur des poutres droites posées sur plusieurs appuis a reçu de nombreuses solutions, les unes analytiques, fondées pour la plupart sur l'emploi du théorème *des trois moments*, les autres géométriques et qui montrent une application intéressante des principes de la Statique graphique. L'objet de la présente Note est de développer une méthode mixte, qui, mettant à profit les résultats fournis par l'analyse, ramène à des constructions géométriques très élémentaires le tracé du contour limite des moments fléchissants, et donne par là les éléments nécessaires à la rédaction du projet de la poutre.

L'auteur est ainsi amené à étudier la solution graphique de certains problèmes relatifs à l'intersection de la parabole des moments par des droites et par une circonférence.

*Pelletreau.* — Note sur les moments fléchissants produits dans une poutre au passage d'un système roulant. (40-77; 1 pl.).

Le problème de la détermination des moments fléchissants dus à une charge roulante est un problème connu, puisque les formules ordinaires permettent toujours de calculer le moment en un point quelconque d'une poutre, quelle que soit la position du système. Mais on est souvent conduit à des calculs assez longs, surtout quand la section de la poutre n'est pas constante; car, alors, il ne suffit pas de connaître le plus grand de tous les moments fléchissants développés dans la poutre. Il faut avoir le moment fléchissant maximum en chaque point de la poutre. L'objet de ce Mémoire est de résoudre la question suivante :

Étant donnée une épure préparée à l'avance, qui se compose d'une parabole une fois calculée et d'un certain nombre de points placés sur l'axe des $x$, déterminer le moment fléchissant maximum produit par une charge roulante, en un point quelconque de la poutre, et cela quelle que soit l'ouverture de la travée.

Le problème ne se présente pas tout à fait de la même manière selon que la poutre considérée est longitudinale ou transversale. Il est, en outre, très différent selon que la poutre est posée ou encastrée; l'auteur n'a examiné dans ce Mémoire que le cas d'une poutre longitudinale posée sur deux appuis. Les autres cas seront traités ensuite.

*Préaudeau* (*de*). — Étude graphique sur la résistance des poutres droites soumises à des charges discontinues mobiles. (78-86).

M. Bresse a publié dans les *Annales* de 1877 (*Bulletin,* $II_1$, 110) une Note sur la détermination graphique des moments fléchissants dans une poutre droite posée sur deux appuis de niveau et soumise à des charges mobiles discontinues.

Une Note de M. Le Chatelier sur le même sujet, restreint aux poutrelles des ponts métalliques, a paru dans les *Annales* de 1884 (*Bulletin,* $XI_2$, 28).

Enfin, cette question a été reprise par M. Collignon dans les *Annales* de 1885 (*Bulletin,* $XI_2$, p. 32).

Les propriétés des polygones des moments fléchissants ont été ainsi complètement établies, et il n'y aurait rien à ajouter à ces publications, si cette théorie ne paraissait pouvoir être simplifiée dans les applications pratiques par quelques remarques sur l'emploi des polygones funiculaires dirigé dans le sens indiqué par M. Bresse.

Cette Notice a donc pour objet la construction d'un polygone limite de la courbe enveloppe des moments fléchissants.

*Barbet* (*A.*). — Étude sur les ponts de grandes ouvertures. (97-120; 3 pl.).

L'auteur se propose dans cette Note de montrer que l'emploi de l'acier permettra d'aborder économiquement pour les ponts les grandes ouvertures.

Le fer a été remplacé par l'acier doux dans la construction des rails, des chaudières, des coques de bateaux, des affûts de canons, il n'est plus guère employé que pour les ponts. Les pays producteurs d'acier comme l'Angleterre et les États-Unis construisent aujourd'hui leurs grands ponts en acier : le pont en construction sur le Forth, dont le poids doit dépasser 42 millions de kilogrammes, en est le plus grand exemple.

De même que, d'après les idées du général Poncelet, on a admis que le fer, possédant une limite d'élasticité de $12^{kg}$ par millimètre carré, ne doit point travailler à plus de $6^{kg}$, ainsi l'on a conseillé de ne point dépasser $12^{kg}$ pour le travail de l'acier, dont la limite d'élasticité atteint $24^{kg}$. Dans la pratique, on se tient généralement au-dessous de la limite dont nous venons de parler; comme exemples, on peut citer les ponts en acier de Niagara, Bismark, Plattsmuth, construits en Amérique, pour lesquels le travail adopté pour le métal a été de $10^{kg},8$. Cette limite a été élevée à $11^{kg},8$ au pont sur le Forth.

*Martin* (*J.*). — Note sur la réduction du rayon des courbes et des alignements droits intermédiaires en pays accidenté. (141-178; 3 fig., 1 pl., 5 tabl.).

*Maurice Lévy.* — Mémoire sur le calcul des ponts suspendus rigides. (179-247; 7 fig.).

Ce travail intéressera les ingénieurs, au moment où l'État et les départements vont être chargés de pourvoir à l'entretien de près de cinq cents ponts suspendus, exploités jusqu'ici par voie de concession.

*Séjourné.* — Construction des ponts du Castelet, de Lavaur et Antoinette. (409-549; 13 fig., 9 pl., 22 tabl.).

Important Mémoire descriptif complété par un exposé méthodique de la recherche d'une formule simple de la pression normale maxima par unité sur la douelle d'un cintre pendant la construction.

C'est là une des premières tentatives de détermination des dimensions à adopter pour les cintres, dans la construction desquels on procède habituellement d'instinct ou d'imitation.

*Lévy* (*M.*). — Rapport sur les expériences de M. Marcel Deprez relatives au transport de la force entre Creil et Paris. (597-646; 8 fig.).

Ce Rapport est identique, sauf l'addition de quelques nouvelles pièces annexes, à celui qui a été présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences dans la séance du 2 août 1886.

*Bérard*. — Note sur la marche des flotteurs dans les courants. (830-835, 1 fig.).

A la suite d'une étude sur la marche des bateaux dans les courants rapides (*Annales*, t. XI, p. 199), dans laquelle M. du Boys a montré que les grands flotteurs marchent plus vite que le courant qui les porte et a tenté d'expliquer ce fait par l'action des forces moléculaires du liquide en mouvement, deux Notes ont paru successivement dans les *Annales*, pour mettre en relief l'explication jusqu'ici admise, et pour ainsi dire classique, du phénomène observé.

La première (*Annales*, t. XI, p. 530) s'appuie sur l'autorité de Dubuat.

La seconde (*Annales*, t. XI, p. 650) s'en réfère à celle de Dupuit.

L'explication des deux auteurs est la même quant au fond; mais, si l'on observe que la composante de la pesanteur suivant la pente a déjà exercé toute son action pour entraîner le flotteur avec la même vitesse que l'eau où il est plongé, il n'est pas permis d'isoler une partie quelconque du système en mouvement pour lui appliquer une force qui a déjà agi.

Bien que ce raisonnement parût fort concluant à l'auteur de cette nouvelle Note, celui-ci a tenu à le confirmer par une expérience directe.

*Eiffel* (*G.*). — Note sur les piles et pylônes de grande hauteur. (836-845; 3 fig.).

Critique des idées exposées à ce sujet dans le Mémoire de M. Leygue (*Annales*, t. XI, p. 871). L'auteur signale aussi des anomalies dans les résultats numériques relatifs aux piles en maçonnerie et il répond à différentes objections présentées par M. Leygue à un système de pylônes sans étrésillons qu'il avait proposé.

Tome XIII; 1er semestre 1887.

*Collignon* (*E.*). — Méthode graphique de quadrature. (9-30; 16 fig.).

Le problème de la quadrature des courbes planes est un de ceux qui se rencontrent le plus fréquemment dans les applications des Mathématiques. De

nombreuses méthodes servent à le résoudre, les unes analytiques, les autres géométriques, d'autres enfin exigeant l'emploi de certains appareils spéciaux, tels que la roulette de Dupuit, les planimètres et les autres intégrateurs.

La nouvelle méthode graphique proposée consiste essentiellement à ramener les quadratures à la recherche des centres de gravité de certains systèmes. A un point de vue tout à fait général, l'aire $\int_a^b y\,dx$ représente la somme des moments, par rapport à l'axe des abscisses, d'éléments horizontaux $dx$, éloignés à la distance $y$ de cet axe, et l'ordonnée $y_1$ du centre de gravité de ces éléments horizontaux est la seconde dimension du rectangle de base $(b - a)$, qui équivaut à l'aire de la courbe.

L'auteur développe sa méthode en l'appliquant à un trapèze rectangle, à deux rectangles contigus, à plusieurs trapèzes rectangles contigus, puis, par l'intervention d'aires nulles, il arrive à ajouter deux rectangles non contigus, aboutissant au même axe rectiligne. Le segment de cet axe intercepté forme le trait d'union entre les deux surfaces à ajouter et représente l'aire nulle considérée.

Une aire polygonale fermée s'évaluera en la rapportant à sa plus grande diagonale.

La méthode s'applique aisément à la quadrature des profils en travers; elle se prête aussi fort bien à l'emploi de la règle de Thomas Simpson pour la quadrature des courbes.

Comme vérification, l'auteur a pris la cycloïde engendrée par une circonférence de 28$^{mm}$ de diamètre. La base ayant été divisée en seize parties égales, la détermination graphique de l'ordonnée finale a conduit à une longueur de 21$^{mm}$, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$ du diamètre du cercle générateur. La base étant $2\pi R$ et la hauteur $\frac{3}{2}R$, on retrouve le résultat connu : $3\pi R^2$.

Il est intéressant de signaler, à propos de ce travail, la monographie de M. P. Mansion *Sur l'évaluation approchée des aires planes* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. V, 1881. *Bulletin*, $VI_2$, p. 193 et $IX_2$, p. 212). Elle renferme une étude très complète de ce genre de recherches.

## *Gerstner* (*Franz von*). — Théorie des vagues, suivie d'un essai sur la théorie des profils des digues. (31-86; 1 pl.).

Traduction de la *Theorie der Wellen*, publiée à Prague et insérée en 1804 au tome I$^{er}$ des *Mémoires de l'Académie royale de Bohême*. Le traducteur, M. de Saint-Venant, ajoute que ce Mémoire est resté ignoré en France jusqu'en 1869, époque où M. Bertin l'a cité dans une *Étude sur la houle et le roulis*. M. Bertin s'en est depuis procuré une copie qu'il a communiquée en 1871 à M. de Saint-Venant.

Si cet écrit de Gerstner eût été connu de Poisson, de Cauchy, de Fourier, ils l'auraient cité et pris en sérieuse considération dans leurs grands travaux de 1816 à 1818 sur les ondes. S'il était venu, dit également le traducteur, à la connaissance du colonel Emy et de l'ingénieur Virla, leur discussion sur ce sujet (*Annales* de 1835 et de 1837) n'aurait certainement pas été engagée.

Dans ce Mémoire, Gerstner fait usage, pour la première fois, de l'ingénieuse considération des surfaces de niveau dans l'état de mouvement des liquides, c'est-à-dire des surfaces d'égale pression déterminées en combinant, avec la

pesanteur des particules, leur inertie, dont il n'y a le plus souvent à faire entrer dans le calcul que la composante centrifuge, ou normale aux surfaces où elles glissent; ce qui se rattache à une méthode ancienne aujourd'hui trop oubliée, propre à simplifier les solutions, et qui, par exemple dans la question présente, permet de se passer des équations différentielles générales de l'Hydrodynamique en réduisant à peu près ce qui s'y rattache à des questions d'Hydrostatique.

L'écrit sur les profils des digues, occupant les §§ 38 à 85 de son Mémoire, et donné par lui comme une conséquence et une application de la théorie des vagues, a été aussi traduit; mais le traducteur n'en a donné qu'une analyse qui suffira, suppose-t-il, pour faire comprendre la pensée de l'auteur et pour permettre de l'appliquer au besoin.

M. de Saint-Venant annonçait encore un autre travail où le problème de la forme et de la propagation de la houle se trouve résolu analytiquement et d'une manière plus générale. Il y montrait que les formules relatives à une profondeur finie des eaux, dues à M. Boussinesq, se réduisent à celles de Gerstner et d'auteurs plus récents, quand la profondeur de la masse fluide agitée est supposée infinie, et que, lorsque cette profondeur totale de la masse d'eau est supposée au contraire très petite, elles se réduisent à la formule simple et connue de la propagation d'une onde solitaire, due à Lagrange, et confirmée par les expériences de M. Scott Russel comme par celles de M. Bazin. Malheureusement, le travail dont il est ici question n'a pas été retrouvé.

Avant Gerstner et ainsi qu'il le rapporte, le problème avait été entrepris par divers géomètres. Newton a essayé le premier de donner une théorie des vagues (*Principes*, prop. 45 et 46); il comparait les mouvements de leurs parties aux oscillations de l'eau dans des tuyaux recourbés. Lagrange remarque (*Mémoires de Berlin*, 1786, et *Mécanique analytique*, 1798) que cette comparaison offre plusieurs difficultés, qui tiennent à ce que Newton a étudié seulement le mouvement vertical, à l'exclusion du mouvement horizontal. Il avoue du reste ne pouvoir pas encore donner une théorie exacte des vagues ou des ondes liquides, et il cherche à y arriver par la voie de l'approximation pour des hauteurs d'ondes extrêmement petites.

Laplace (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1776) établit sa théorie en supposant qu'un corps cylindrique horizontal, de longueur indéfinie, enfoncé dans l'eau et au repos, en ait été subitement retiré, ce qui détermine successivement une formation de vagues.

Le désaccord de ces résultats entre eux et avec l'expérience montre la difficulté de l'étude entreprise.

Nous ne suivrons pas ici des développements qui nous feraient dépasser les limites habituelles d'un résumé; nous croyons cependant devoir appeler l'attention du lecteur sur quelques remarques.

La persistance du mouvement par vagues ne pourrait avoir lieu que dans une eau profonde et infinie. Dans des eaux d'une profondeur très petite, il ne peut y avoir de vagues élevées.

Tout mouvement irrégulier communiqué à l'eau se transforme finalement en un mouvement par vagues, naturel à tout fluide.

Les fluides visqueux ne sont pas plus capables, au même degré, de se mouvoir par vagues que les fluides jouissant de plus de fluidité. Cela peut expliquer l'expérience de Franklin et d'autres physiciens qui ont reconnu que les vagues sont diminuées et apaisées lorsqu'on verse de l'huile sur leur surface [voir l'*Essai*

*sur les moyens de diminuer les dangers de la mer au moyen d'une effusion d'huile,* par M. de Lelyveld, Amsterdam, 1776; *Das Oil, etc. L'huile comme moyen d'apaiser les vagues*, par M. J.-F. Otto (2e Volume des *Éphémérides géographiques*)].

## *Leygue* (*L.*). — Notice sur les grands murs de soutènement de la ligne de Mazamet à Bédarieux. (98-114; 2 pl.).

L'auteur fait remarquer les conditions économiques de la construction de ces murs et les avantages qu'a procurés l'adoption des profils en surplomb avec contreforts et remplissages intérieurs, décrits dans un autre Mémoire (*Annales,* t. X, p. 788).

## *Saint-Venant* (*B. de*). — Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes. (148-228).

L'auteur s'est proposé de donner d'une manière simple, et toutefois assez développée, l'établissement rapide des équations du mouvement permanent ou non permanent graduellement varié des eaux courantes, suivant des principes nouveaux, basés sur l'observation des faits, et qui se trouvent présentés surtout dans un Mémoire récemment approuvé par l'Académie.

Ceci était écrit en 1872. Il s'agit de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes,* de M. Boussinesq.

La première tentative dans cette voie paraît due à Navier en 1822, mais il en reconnut lui-même l'insuffisance. En 1823, Belanger entreprenait des recherches plus fructueuses, qui le conduisirent, en 1828, à la mise en équation du mouvement permanent. En 1836, Vauthier lui apporta une modification, et la même année, Coriolis la rendit plus rigoureuse en lui appliquant le théorème des forces vives. Cette méthode, bientôt adoptée par Navier, par Poncelet, et par Belanger lui-même, est encore suivie dans la plupart des cours.

Cependant, une discussion plus approfondie de cette équation fait voir la nécessité d'y renoncer et de donner la préférence à la méthode de M. Boussinesq. Ce géomètre emploie, au lieu des forces vives, les quantités de mouvement, ou, ce qui revient au même, il pose les équations d'équilibre dynamique d'un élément fluide dans la direction de deux ou trois coordonnées, à la manière d'Euler et comme avait fait Belanger primitivement ou en 1828, mais sans y faire les omissions signalées, et en mettant avec Cauchy, dans les premiers membres, au lieu des dérivées $\frac{dp}{dx}$, ... d'une même pression $p$, que d'Alembert et Euler regardent comme normale aux faces où elle s'exerce, les dérivées, par rapport à chacune des coordonnées rectangles, des composantes, tant normales que tangentielles des pressions, généralement obliques, ces composantes étant prises dans la direction d'une des coordonnées pour chaque équation.

## *Thurninger.* — Note sur le jaugeage des bateaux et des navires. (229-265; 2 fig., 1 pl., 3 tabl.).

La jauge d'un appareil de transport par eau s'évalue d'après des principes différents, suivant qu'il s'agit d'un bateau d'intérieur ou d'un navire de mer.

Dans le premier cas, cette quantité est exprimée en poids, et la jauge repré-

sente, en tonnes de mille kilogrammes, le poids maximum de chargement du bateau. Dans le second, elle est exprimée en volume, et la jauge représente le volume maximum de chargement, c'est-à-dire le volume de l'espace intérieur du navire, disponible pour la cargaison; l'unité employée est alors une mesure spéciale de capacité, le tonneau de jauge, qui vaut $2^{mc},83$ ou 100 pieds cubes anglais.

Dans les deux cas, cependant, le résultat de l'opération du jaugeage porte le même nom *tonnage* du bateau ou du navire, et il s'exprime en unités désignées aussi par le même mot *tonneau*, bien qu'elles ne soient nullement de même espèce.

Il serait désirable que cette expression de tonneau ne fût plus usitée pour représenter $1000^{kg}$; car elle fait double emploi avec celle de tonne qui est bien nettement définie, tandis qu'elle, au contraire, l'est assez vaguement, puisque le tonneau signifie, tantôt un poids de $1000^{kg}$, tantôt un volume de $2^{mc},83$, tantôt même, sous la dénomination de *tonneau d'affrètement* ou de *tonneau de mer*, soit un volume de $1^{mc},44$ (anciens 42 pieds cubes de l'ordonnance de 1681 rendue sous Colbert), soit un poids variable avec la nature du fret.

La discussion des deux méthodes de jaugeage conduit à l'emploi des méthodes de quadrature par les trapèzes et par la formule de Simpson.

Le décret du 24 mai 1873 a rendu obligatoire en France l'adoption de la méthode anglaise due à l'amiral Moorsom, et l'emploi du tonneau de $2^{mc},83$. Il fixe en même temps les règles à suivre pour les navires vides, pour les navires chargés, et les déductions pour les navires à vapeur.

*Laterrade.* — Notice sur le nivellement de pente par les tangentes. (339-371; 4 fig.).

L'auteur estime que, grâce à la division suivant les tangentes substituée à la division en grades ou degrés, on arrive à un instrument simple et peu coûteux, permettant à la fois de faire un nivellement de pente et de mesurer la distance plus simplement et plus exactement que par les procédés usités jusqu'ici.

*Considère.* — Note sur les efforts anormaux dans les poutres métalliques. (372-398; 12 fig.).

Exemples de déformatlons présentées par les treillis dissymétriques, et moyens proposés pour leur consolidation.

*Siegler.* — Expériences nouvelles sur la poussée du sable. (488-505; 11 fig.).

L'auteur en a déduit que la poussée d'un massif de sable sur un mur de soutènement à paroi intérieure verticale n'est pas perpendiculaire à ce parement, comme a cherché à le prouver M. Gobin (*Annales*, VI, p. 98).

*Clavenad.* — Mémoire sur la stabilité, les mouvements, la rupture des massifs en général, cohérents ou sans cohésion. (593-683; 64 fig.).

Considérations sur la poussée des terres, avec application à l'étude spéciale des murs de soutènement et des barrages.

Rappel des travaux de Rankine et de MM. Boussinesq, de Saint Guilhem, Flamant, Lafont, Delocre, Bresse.

*Durand-Claye* (*L.*). — Note sur les opérations au niveau de pente. (684-686, 2 fig.).

L'auteur étudie l'influence du défaut de verticalité de la mire sur la précision des opérations de nivellement par la méthode proposée par M. Laterrade (p. 339).

*Crépin* (*A.*). — Étude sur la résistance des voûtes en maçonnerie. (689-839, 4 pl.).

Détermination graphique de la courbe des pressions et du travail des matériaux sous l'action des charges permanentes et des charges roulantes.

L'auteur signale une omission qui rend toutes les théories incomplètes; elles ne tiennent aucun compte des charges roulantes. La méthode qu'il propose de leur appliquer montre que, dans les voûtes, l'action des charges roulantes est de beaucoup la plus importante et qu'elle soumet les matériaux à des efforts notablement plus considérables que ceux qui résultent des charges symétriques.

Tome XIV; 2e semestre 1887.

*Ricour.* — Notice sur la répartition du trafic des chemins de fer français. (143-194, 2 pl.).

Étude graphique ayant pour objet d'établir la possibilité d'abaisser dans une proportion notable le prix de revient des transports.

*Bazin* (*H.*). — Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur. (195-229, 19 tabl.).

Étude des résultats de 105 expériences exécutées sur toute l'étendue de la section transversale d'un courant.

La discussion de toutes ces données est assez délicate : l'auteur commence par les expériences à quatre lectures; il passe ensuite aux expériences à trois lectures, dont les résultats ne présentent pas autant de netteté. Quant aux canaux demi-circulaires et aux tuyaux rectangulaires, ils nécessitent une discussion spéciale.

*D'Ocagne* (*M.*). — Note au sujet du Mémoire de M. Clavenad (*Annales*, t. XIII, p. 597). (281-382).

Remarquant l'identité des résultats fournis par la formule de M. Bous-

2nd Part.



sinesq

$$K = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left[\varphi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]},$$

et par la sienne

$$K = \frac{\cos\varphi}{(1 + \sin\varphi)(1 + 2\sin\varphi)},$$

M. Clavenad a établi l'équivalence de ces deux formules au moyen d'une construction géométrique fort ingénieuse; mais cette identification peut s'effectuer directement par les propriétés des fonctions trigonométriques.

La formule de M. Boussinesq présente toutefois l'avantage d'être calculable par logarithmes.

## *Alby.* — Note sur des expériences de congélation des terrains. (338-388, 8 fig., 1 pl., 8 tabl.).

Description, en tous détails, des expériences exécutées dans les ateliers de MM. Rouart frères, dont il n'a été publié qu'un résumé dans les *Annales des Mines,* t. XI, 1er semestre 1887, 56-86.

## *Bosramier* (*S.*). — Note sur le tracé des paraboles des moments fléchissants. (401-404, 3 fig.).

Le polygone curviligne enveloppe des moments fléchissants d'une poutre droite à plusieurs travées solidaires s'obtient généralement de deux manières différentes :

1° En cherchant les équations des paraboles correspondantes à chaque hypothèse de la surchage et traçant complètement ces courbes dans chaque travée;

2° En divisant chaque travée en tronçons particuliers et déterminant pour chacun d'eux la parabole enveloppe des moments.

Le tracé par points de toutes ces paraboles est une opération simple, mais d'une longueur fastidieuse; l'auteur expose un procédé qui l'abrège singulièrement.

Ces paraboles ont, en effet, leurs axes parallèles à la direction verticale; on en connaît toujours trois points, qui sont, dans la première méthode, les points d'intersection avec l'horizontale et avec les verticales des appuis; pour la deuxième, les deux sommets consécutifs du polygone curviligne enveloppe des moments et le point où la verticale d'un des appuis est coupée par la parabole.

La propriété utilisée dans le tracé est la suivante : Soient $a$, $b$, $c$ trois points d'une parabole, OX le diamètre conjugué des cordes parallèles a $cb$. Les côtés $ac$ et $ab$ déterminent sur OX un segment $mn$ dont le milieu O est un point de la parabole.

## *Widmer* (*E.*) et *Desprez* (*H.*). — Mémoire sur les nouvelles portes en tôle, de l'écluse des Transatlantiques, au port du Havre. (411-463, 12 fig., 5 pl.).

Description et calculs justificatifs de l'installation des portes en tôle, en remplacement de portes en bois qui étaient arrivées au terme de leur durée.

*Lallemand* (*C.*). — Note sur la théorie du nivellement. (491-521, 11 fig.).

D'après la théorie actuelle du nivellement géométrique, le relief du sol, rapporté à la surface de niveau zéro, se trouverait déterminé par ses intersections avec une série de surfaces auxiliaires, parallèles et de niveau, ayant chacune pour caractéristique d'être affectées d'une cote unique dans toute leur étendue. Mais, comme il est établi que le parallélisme et la conservation du niveau sont deux choses incompatibles, il faut opter pour l'une ou pour l'autre.

La théorie orthométrique (désignée ainsi par M. le colonel Goulier), sacrifiant la considération du niveau, conserve le parallélisme des surfaces.

La théorie dynamique (appelée ainsi par M. Cheysson) conserve les surfaces de niveau, en se résignant à perdre le bénéfice de l'équidistance géométrique.

Les deux systèmes ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients.

La théorie orthométrique doit abandonner le nom de *nivellement* pour l'échanger contre la dénomination mieux appropriée d'*altimétrie,* les courbes de même cote dans ce système étant appelées des *équialtes,* comme l'a proposé M. le colonel Goulier. Toutefois, en résumé, l'objet principalement géodésique des altitudes orthométriques reste encore un but problématique.

Avec la méthode dynamique, au contraire, où chaque surface de niveau est affectée d'une cote unique, le passage d'un niveau à un autre se fait sans difficulté par l'addition d'une constante.

Les objections que l'on pourrait lui faire, à cause des variations de la pesanteur, n'ont pas d'importance, parce que la formule de Clairaut-Bouguer, qui donne l'expression de $g$ en fonction de l'altitude, peut passer pour suffisamment exacte, en attendant le jour peu éloigné, sans doute, où l'on pourra soumettre cette valeur de $g$ à une mesure directe.

En réalité, les variations relatives de $g$ ne dépassant pas 2 à 3 pour 1000, de part et d'autre de la valeur moyenne qui répond à la latitude de 45°, les différences entre les cotes exprimées suivant les deux méthodes sont sans importance pratique, du moins pour la France. On peut donc, comme a décidé de le faire le Comité du Nivellement général de la France, publier côte à côte les résultats des deux méthodes, qui ont chacune leur intérêt et leur objet spécial.

Ce travail est suivi d'un Index bibliographique mentionnant 22 Ouvrages et Mémoires relatifs au nivellement de précision.

*Gros.* — Note sur les câbles transporteurs aériens, système Gourjon. (604-635, 1 pl., 4 tabl.).

Description et conditions de fonctionnement de câbles transporteurs, tant du système Gourjon que d'autres systèmes s'en rapprochant.

*Murgue* (*D.*). — Compte rendu d'expériences sur la résistance à l'incurvation des câbles métalliques. (636-647, 4 fig., 1 pl.).

La résistance des cordes en chanvre à l'incurvation a été l'objet, au siècle dernier, de travaux importants, devenus classiques, d'Amontons et de Coulomb.

Ces savants ont été conduits, pour cette grandeur, à l'expression générale

$$y = \frac{1}{D}(a + bx),$$

$x$ étant la tension ou la charge,
D le diamètre de l'incurvation,
$a$ et $b$ deux constantes particulières à chaque corde.

Il y a tout lieu de penser que la proportionnalité en raison inverse du diamètre se maintient pour les câbles métalliques; l'assimilation, à cet égard, a paru légitime à l'auteur et l'a déterminé à limiter ses expériences à un diamètre unique d'incurvation qu'il a choisi égal à un mètre.

Les expériences, reproduites avec le dispositif classique, perfectionné toutefois en quelques détails, ont confirmé avec une grande netteté, la loi linéaire précitée.

*Noblemaire.* — Le prix de revient sur les chemins de fer et la répartition du trafic. (682-697).

Réponse et objections à un récent travail de M. Ricour (*Annales*, t. XIV, p. 143) et à un autre Mémoire du même ingénieur, paru en 1885 au tome X, mais dont nous n'avions pas cru devoir signaler, à ce moment, les conclusions, parce qu'elles se rapportaient, comme celles du Mémoire actuel, plutôt à la statistique générale qu'à d'autres applications des Sciences mathématiques.

L'auteur du nouvel article établit la nécessité de faire intervenir l'influence des déclivités dans la comparaison des groupes d'un réseau.

*Galliot.* — Étude sur les portes d'écluses en tôle. (704-756, 1 pl.).

Exposé de quelques résultats d'études expérimentales et reproduction de quelques-uns des calculs auxquels on est conduit dans la recherche des conditions de résistance des diverses pièces de portes d'écluses en tôle.

Ce travail est divisé en quatre Chapitres relatifs : l'un au bordage des portes, l'autre à la carcasse ou ossature de la porte, formée des entretoises et des montants; les deux autres contiennent : l'un, une application des calculs et l'autre, un résumé général.

Chacun des deux premiers Chapitres est lui-même subdivisé en trois Parties : les essais expérimentaux, les tentatives de calculs et la comparaison entre les résultats trouvés par chacun de ces deux moyens.

*Clavenad.* — Le plan de rupture et la poussée dans les massifs cohérents et sans cohésion. (757-764, 5 fig.).

Rectification de détail et addition à un paragraphe du Mémoire de l'auteur publié au tome XIII, page 596.

*D'Ocagne* (*M.*). — Note sur le tracé des paraboles des moments fléchissants. (765-767, 2 fig.).

L'auteur fait connaître qu'il a énoncé dans le numéro de juin 1887 du *Journal*

*de Mathématiques spéciales* le théorème appliqué dans un précédent article de M. Bosramier (*Annales*, t. XIV, p. 401).

Il préconise également, pour la résolution rapide du second problème, l'emploi d'un gabarit trapézoïdal qui permet d'obtenir, en aussi grand nombre qu'on veut, des tangentes à une parabole déterminée par deux points et les tangentes en ces deux points.

Il a exposé ce procédé expéditif dans le *Génie civil*, 1886, et il l'a complété par la construction du foyer, précédemment indiquée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1884.

## Tome XV; 1er semestre 1888.

*Préaudeau (de)*. — Note sur la stabilité des écluses de grande ouverture. (434-457, 10 fig., 1 pl.).

Application des courbes de pression. Indication des conditions dans lesquelles on peut faire l'emploi des méthodes graphiques.

*Flamant*. — Note complémentaire sur la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy. (458-463).

Suite du compte rendu bibliographique publié au tome XI, p. 637. Analyse du deuxième Volume intitulé : *Flexion plane, ligne d'influence, poutres droites;* du troisième intitulé : *Arcs, ponts suspendus, corps de révolution* et du quatrième intitulé : *Ouvrages en maçonnerie, systèmes réticulaires à lignes surabondantes.*

*Ricour*. — Les prix de revient sur les chemins de fer. (534-564, 2 pl.).

Suite de la discussion engagée et réponse aux conclusions développées (*Annales*, t. XIV, p. 682) par M. Noblemaire.

*Tourtay*. — Détermination des pressions réelles dans les voûtes surbaissées en forme de chaînette. (565-636, 14 fig., 1 pl.).

Il y a intérêt, pour les grandes arches surbaissées en maçonnerie, à adopter pour l'intrados et l'extrados la forme en arc de chaînette.

La courbe moyenne de la voûte constitue une courbe de pression qui, si elle était réalisée, donnerait en tous les points de cette voûte une pression à très peu près uniforme.

*Tavernier (R.)*. — Note sur l'exploitation locale des grandes Compagnies. (637-683, 3 pl.).

Nouveaux développements donnés aux idées exposées déjà sur des questions analogues dans différents articles des *Annales*.

L'auteur insiste sur la nécessité de réformes décentralisatrices, et il appuie ses propositions de résultats statistiques dont la discussion, pour être concluante, paraît devoir être guidée par des procédés mathématiques.

*Bosramier* (S.). — Note sur le tracé des paraboles des moments fléchissants. (699-704, 4 fig.).

L'auteur fait connaître que la méthode graphique et la propriété de la parabole exposées dans un précédent article (*Annales*, t. XIV, p. 401) avaient été rencontrées par lui indépendamment de M. d'Ocagne. Il les a utilisées depuis 1880 à la recherche des moments fléchissants.

Il croit devoir y revenir pour signaler un nouveau procédé graphique plus simple encore, plus rapide et présentant l'avantage de s'appliquer aussi bien aux tracés sur le terrain et sur le chantier que sur la feuille de dessin.

*Saint-Venant* (*de*) et *Flamant*. — De la houle et du clapotis. (705-809, 1 pl.).

Ce savant travail est divisé en deux Parties. La première, due à M. de Saint-Venant, renferme l'historique succinct des recherches sur les ondes. L'auteur y établit la part qui revient à chacun des géomètres, physiciens et ingénieurs que ce sujet d'études à intéressés.

Dès le XVe siècle, Léonard de Vinci avait reconnu que la vitesse de propagation des ondes marines excédait toujours considérablement celle que possède leur eau, car leur eau, le plus souvent, ne change pas de lieu, et il comparait ce mouvement aux ondulations des céréales sous l'impulsion du vent. Il avait distingué aussi les vagues d'une deuxième espèce, qui oscillent sur place sans se propager.

Deux siècles après, Newton faisait une tentative pour soumettre ces mouvements au calcul. Il les assimilait à ceux de l'eau dans un tube recourbé.

Daniel Bernoulli, dans un Mémoire de 1757, s'est aussi occupé de la figure ondoyante de la mer, mais accessoirement et dans le but d'apprécier plus ou moins l'influence de ces mouvements sur le roulis des navires.

Laplace, en 1777, a donné le premier une solution du problème des ondes liquides, basée sur des considérations analytiques rigoureuses.

En 1781, Lagrange a résolu pour la première fois un problème d'ondes se propageant. Il est vrai que ces ondes ne sont pas celles de la houle, mais les ondes qui se propagent isolément dans un canal. C'est dans ce célèbre Mémoire que Lagrange donne pour la première fois l'idée de prendre, pour les composantes $u$, $v$, $w$ des vitesses qu'il considère, les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ d'une même fonction $\varphi$ des coordonnées $x$, $y$, $z$ et du temps, et qu'on appelle aujourd'hui le *potentiel de ces vitesses*.

Les résultats obtenus par Lagrange ont été vérifiés par des expériences dues à MM. Scott Russel (1834), Bazin (1863) et de Caligny (1844 à 1869).

Il est vrai que ce n'est qu'exceptionnellement, dans le grand phénomène du raz de marée, que la mer offre les ondes considérées dans l'étude de Lagrange. De nouveaux progrès restaient à réaliser.

Nous ne trouvons, en France, de publications sur les vagues, faites depuis le siècle dernier jusqu'en 1816, que la *Théorie des vents et des ondes* (1802) par MM. de la Coudraye, et le *Mémoire sur le mouvement des ondes* (1809) du célèbre ingénieur du boisement des dunes de la Gascogne, Brémontier.

L'Institut ayant mis au concours le problème des ondes liquides, le prix fut

remporté par Cauchy, dont le Mémoire, déposé le 30 septembre 1815, fut imprimé seulement en 1827.

Le 2 octobre 1815, Poisson présentait aussi, sous le titre de *Mémoire sur la théorie des ondes*, un travail remarquable, dans lequel il perfectionna et étendit le problème de Laplace, grâce à l'emploi de la formule récemment découverte par Fourier.

Ostrogradski présenta à Paris, le 6 novembre 1826, un *Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique*, mais il n'a pas donné à son analyse tout le développement dont elle était susceptible.

Parmi les travaux divers sur ce sujet, nous signalerons notamment le Mémoire de Corancez *Sur le mouvement d'oscillation de l'eau dans un vase*, présenté le 23 juin 1818, et dans lequel on trouve une élégante application de la formule de Fourier; puis la *Science des ondes*, par les frères Weber, de Halle (1821); cet Ouvrage est le premier où il soit fait mention de la théorie de Gerstner, dont on y trouve une appréciation détaillée; puis une étude du colonel Emy (1831), intitulée : *Du mouvement des ondes*.

Aux mêmes époques, d'importants travaux étaient publiés en Angleterre. Dès 1834, M. J. Scott Russel a fait, sur les ondes, des expériences très remarquables dont les résultats sont résumés au tome XIV (1836) des *Transactions d'Édimbourg*. Il a distingué nettement, des ondes oscillatoires ou périodiques comme celles de la mer, l'onde première, la grande onde de translation, ou ce qu'il appelle l'*onde solitaire*, pour laquelle il retrouva la célérité de propagation obtenue déjà par Lagrange. Aussi M. Russel fut-il désigné pour être rapporteur de la Commission des ondes, sujet dont s'occupait avec zèle l'Association britannique pour l'avancement des Sciences dans ses réunions tenues à Bristol, en 1836, à Liverpool, en 1837, et à York, en 1844.

On trouve, dans le Rapport de ce dernier meeting, les résultats détaillés d'expériences nouvelles faites en 1842 et 1843, ainsi que des recherches théoriques dont M. Russel attribue la priorité à M. Kelland et la continuation à M. Airy, enfin une épure complète des mouvements de la houle, conforme à celle de Gerstner, dont la théorie des vagues, rapportée par les frères Weber, est, de la part de M. Russel, l'objet de grands éloges.

M. Kelland n'a pas eu connaissance du Mémoire de Gerstner, et l'on peut lui attribuer la priorité quant à la détermination analytique des mouvements dans la houle pour une profondeur quelconque (1839 et 1841).

Les articles de M. Airy, sur les *Marées et vagues*, édités en 1842 et d'autres parus en 1845, renferment des résultats nouveaux sur les marées fluviales, dont plusieurs ont été confirmés par l'observation. Il a emprunté à Gerstner une de ses figures, sans pourtant le citer. Par contre, la connaissance ou l'étude du Mémoire de Gerstner eût épargné aux physiciens et éminents analystes anglais des tâtonnements inutiles et des assertions peu justifiées qui ont continué, même après que M. S. Russel, en 1844, l'a eu mentionné (d'après les frères Weber) avec les plus grands éloges et une approbation complète. En effet, M. Earnshaw a fait, en 1845, sur ce même sujet une tentative dont il se déclare tout le premier peu satisfait. Après avoir vainement abordé ce problème en 1858 et en 1861, ce n'est qu'en 1863 que Rankine a lu un Mémoire où, sans citer Gerstner, il arrive exactement aux mêmes lois des vagues que lui, en se servant presque de la même méthode géométrique.

Le Mémoire de M. Stokes *On theory of oscillatory waves*, lu le 1er mars 1847, a mérité une attention spéciale, car plusieurs personnes ont opposé ses résultats

à ceux de Gerstner; mais, en réalité, ces résultats ne se contredisent nullement d'après ce qu'ont montré Rankine à la fin de son Mémoire de 1863 et tout récemment M. Boussinesq, qui ont rendu raison de leur opposition purement apparente due à une circonstance délicate et singulière que ce dernier a surtout signalée et éclaircie.

Vu la connexion entre le mouvement non permanent des eaux, tel que celui qui a lieu dans les rivières en temps de crue et la propagation des ondes longues et continues sur leur surface, il est juste de citer ici, au nombre des auteurs dont les travaux ont pu servir à avancer la théorie des ondes, MM. les ingénieurs Dupuit (1863), Partiot (1858, 1861, 1871), et en particulier, MM. Kleitz (1858) et Graeff (1870 à 1873) dont les travaux ont donné l'idée à M. Boussinesq d'ajouter, à son *Essai sur les eaux courantes*, un Chapitre où il traite du régime appelé par lui *quasi-permanent*, dont la considération suffit le plus souvent pour les calculs relatifs aux crues et décrues des rivières.

Parmi les écrits publiés en France depuis 1868, il convient de citer les remarquables travaux de MM. Reech, Bertin, de Bénazé, auxquels il faut joindre aussi M. B. de Saint-Venant, mais ces quatre auteurs avaient été précédés par M. Boussinesq, car son grand Mémoire sur les *Ondes liquides périodiques* avait été présenté à l'Académie le 19 avril 1869. Il s'était occupé de ce sujet, à l'occasion de la théorie nouvelle qu'il a donnée des ondes lumineuses propagées dans les corps pondérables et des phénomènes de diffraction dont il démontre que des ondes liquides sont susceptibles aussi. En y joignant un second Mémoire du 13 novembre 1871 sur les ondes isolées et non périodiques se propageant dans un canal, on a un ensemble à peu près complet de ce que la Science peut présenter, dans son état actuel, sur la théorie des ondes quelconques propagées dans un liquide pesant.

Après cette revue succincte des recherches théoriques sur les ondes liquides diverses, il y a intérêt à signaler les recherches expérimentales et observations dont elles ont été l'objet. On en trouvera un long Catalogue, commencé à partir de l'antiquité, dans le *Sul moto ondoso del mare*, Ouvrage considérable, où elles sont toutes analysées et discutées succinctement et par ordre, publié à Rome, en 1866, par le commandant Cialdi. L'auteur en a conclu, comme aussi de ses observations personnelles, l'existence d'un courant ou transport superficiel ($0^m,20$ ou $0^m,30$ par seconde) produit par l'action du vent, surtout dans les parties peu profondes où il peut s'étendre jusqu'au fond, et le besoin d'une amélioration de l'estime de la marche à suivre pour le navire. Ces deux constatations avaient été du reste signalées par d'autres observateurs (Aimé, 1840 et 1845; Keller, 1858, et Dupouy, 1847).

D'autres expériences et observations sur l'onde solitaire ont été faites par le général Morin (1838) et par M. de Caligny; enfin, nous devons citer, en Amérique, M. Dyar (1843); à Alger, M. Aimé (1845); puis, de 1867 à 1870, M. Pâris; vers 1874, M. Bertin; et, relativement au clapotis, les observations des frères Weber, à Halle, et de MM. Boussinesq et Terquem, à Lille.

A la suite de l'historique des travaux anciens sur la question des ondes liquides, M. de Saint-Venant voulait placer un exposé de la théorie qui pouvait être aujourd'hui donnée de la houle et du clapotis. Il a à peine ébauché cette dernière partie de son œuvre, dans laquelle il avait l'intention de faire, des travaux de M. Boussinesq, une analyse détaillée, en y ajoutant les résultats de ses propres recherches. M. Flamant a entrepris de présenter les principes de cette théorie, et il a heureusement comblé une lacune qui subsistait dans la

traduction, publiée un an auparavant, de la *Theorie der Wellen* de Gerstner.

Nous ne ferons ici que mentionner les principales subdivisions de ce travail : 1. Conditions générales. 2. Houle simple. Profondeur indéfinie. 3. Houle simple. Cas d'une profondeur finie. 4. Comparaison du niveau d'équilibre et du niveau moyen. 5. Superposition de deux houles de même sens. 6. Superposition de deux houles égales et de sens contraires. Clapotis. 7. Lois du clapotis à une seconde approximation. 8. Superposition de deux clapotis égaux.

*Laroche.* — Méthode élémentaire pour calculer la résistance des portes d'écluse. (1018-1028, 4 fig.).

Cette méthode est fondée sur deux lemmes préliminaires, dont l'un est déjà connu, et dont l'autre, qui paraît assez simple, fait l'objet de cette Note.

*Laterrade* et *Durand-Claye* (*L.*). — Note sur les opérations au niveau-tangentes. (1032-1034).

Remarques additionnelles et rectificatives aux articles du tome XIII sur ce sujet (339 et 684).

Tome XVI; 2e semestre 1888.

*D'Ocagne* (*M.*). — Note sur le tracé de l'axe longitudinal des voûtes. (76-86, 4 fig.).

Si l'on appelle *section isogonale* le segment rectiligne coupant les profils d'intrados et d'extrados sous des angles égaux et de sens contraires, l'axe longitudinal (d'après la terminologie de M. J. Resal) sera le lieu des milieux des sections isogonales.

Pour le construire, l'auteur indique un procédé graphique très simple, qui donne une exactitude très satisfaisante.

*Thiéry* (*E.*). — Note sur les barrages curvilignes. (87-98, 6 fig.).

La théorie exposée dans un précédent travail de M. Pelletreau (1879, t. IX, p. 198) a fait entrevoir à l'auteur la possibilité de réduire, dans de très notables proportions, l'épaisseur des barrages curvilignes. C'est pourquoi il s'est appliqué à chercher de nouveaux arguments pour démontrer que, dans une section horizontale quelconque, la pression qui s'exerce dans chaque joint est appliquée, sinon au milieu, du moins en un point très voisin de ce milieu.

*Pesso* (*L.*) et *Perilli* (*M.*). — Sur l'équerre cyclographe. (106-109, 3 fig.).

Description et emploi d'une modification de l'équerre d'arpenteur, imaginée par les ingénieurs italiens L. Pesso et M. Perilli, et qui donne le moyen de tracer des arcs de cercle sur le terrain.

*Collignon* (*E.*). — Note sur le calcul des ponts métalliques. (137-172, 1 fig., 2 pl.).

L'auteur a publié, en 1864, dans les *Annales*, une formule qui fait connaître le poids propre d'une poutre droite de hauteur uniforme, soumise à une surcharge donnée, également répartie.

Depuis cette époque, les idées sur la résistance des matériaux se sont modifiées, et l'on admet généralement aujourd'hui que les résistances-limites, au lieu de rester fixes comme on les supposait autrefois, doivent varier suivant les efforts auxquels le métal est appelé à résister. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces variations, et pour cela il paraît avantageux d'adopter la formule proposée par M. Séjourné pour représenter les lois que Wöhler a reconnues dans cette nouvelle théorie.

*Durand-Claye* (*L.*). — Mémoire sur les procédés d'essai de la résistance des pierres, ciments et autres matériaux de construction. (173-211, 20 fig., 1 pl.).

Trois procédés sont en usage pour réaliser ces essais : 1° la compression, ou l'écrasement; 2° la traction, ou l'arrachement; 3° la flexion.

Ces trois modes d'essai fournissent des coefficients de résistance qui ne sont pas du tout les mêmes et, pour le même mode d'essai, les résultats varient suivant la forme des éprouvettes.

La présente Note a pour objet d'indiquer la manière dont les forces agissent dans chaque cas, et les conclusions que l'on doit tirer des nombres constatés dans les expériences.

Vicat a publié sur la même question, dans les *Annales* de 1833, un remarquable travail, qui peut encore être consulté avec fruit. Les progrès de la théorie sur la résistance des matériaux et les perfectionnements apportés aux appareils d'essai ont permis à l'auteur d'aborder ce même sujet, en y jetant peut-être quelque jour nouveau.

*D'Ocagne* (*M.*). — Sur le tracé de l'intrados des voûtes elliptiques. (262-263, 1 fig.).

Construction pratique, par des lignes droites seulement, des divers points d'une ellipse inscrite dans un rectangle donné.

*Bonhomme* (*P.*). — Étude sur les câbles porteurs aériens employés aux usages agricoles. (364-387, 4 fig., 1 pl.).

L'auteur a entrepris, pour les câbles qui fonctionnent sur plusieurs points de l'arrondissement de Barcelonnette, une description analogue à celle que M. Gros a fait paraître dans le même Recueil (2e semestre 1887) pour les câbles transporteurs employés aux usages industriels.

*Collignon* (*E.*). — Note sur la détermination d'une parabole qui englobe un certain nombre de points donnés. (388-392, 3 fig.).

Ce problème se présente lorsqu'on évalue la charge continue équivalente, au point de vue des plus grands moments fléchissants réalisés dans une poutre droite, à un ou plusieurs systèmes de forces discontinues données. Il consiste à faire passer par les points A et B, appuis de la poutre, la parabole de moindre montée qui laisse au-dessous d'elle des points donnés $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$, tous situés au-dessus de la droite AB, et entre les perpendiculaires indéfinies A$a$, B$b$, élevées à ses extrémités ; ces points forment les sommets d'un polygone convexe A$m_1 \ldots m_n$B. L'axe de la parabole est d'ailleurs vertical.

## *Bazin* (*H.*). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. (393-448, 3 pl., 27 tabl.).

La théorie des déversoirs est certainement la partie la moins avancée de toute l'Hydraulique ; les coefficients dont on fait usage dans la pratique varient entre des limites très étendues, sans qu'on puisse le plus souvent faire un choix raisonné entre les nombreuses valeurs numériques qui leur ont été assignées.

Les expériences que l'on possède ont presque toujours été exécutées sur une très petite échelle et dans des conditions peu comparables. Les influences perturbatrices s'y trouvent mélangées et combinées de telle sorte que la discussion de ces éléments disparates est extrêmement difficile.

L'auteur a entrepris, en 1886, avec l'appui du Ministère des Travaux publics, un travail de coordination de nouvelles expériences faites avec plusieurs déversoirs successifs, établis sur un même canal de largeur constante.

Ce premier Mémoire résume seulement l'étude du déversoir type sans contraction latérale, auquel seront rapportés tous les autres.

## *Heude* (*H.*). — Note sur le tracé des joints dans les voûtes elliptiques. (498-500, 2 fig.).

Comme suite à des Notes publiées par M. d'Ocagne (*Annales*, 2e 1886 et 2e 1888). Le procédé en question repose sur cette propriété géométrique : L'abscisse du pied N de la normale MN en un point M est une fraction constante de l'abscisse du point M de l'ellipse : ce rapport est $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

## *D'Ocagne* (*M.*). — Remarque au sujet de la Note de M. Heude sur le tracé des joints dans les voûtes elliptiques. (782-783).

L'auteur fait observer que son procédé est une transformation de celui de M. Heude, et qu'il paraît assez difficile de décider d'une façon générale que l'une des manières de procéder est plus simple que l'autre. Toutes dérivent de propriétés tout à fait classiques de l'ellipse.

H. B.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome XCVIII; 1885 (¹).

*Killing* (*W.*). — La Mécanique dans les formes non euclidiennes de l'espace. (1-48).

On sait que les équations du mouvement qui ont lieu dans l'espace euclidien à trois dimensions permettent d'être étendues à un nombre quelconque de dimensions. Cela étant, l'auteur se propose de déduire des principes de Mécanique celles d'entre les équations du mouvement qui résultent quand on fait abstraction aussi bien du nombre trois des dimensions que de l'axiome des parallèles. Le résultat qu'on obtient admet d'être mis sous cette forme : Déterminons, dans une forme euclidienne de l'espace à $n+1$ dimensions, les équations du mouvement pour des points qui appartiennent, dès le commencement du mouvement, à une figure sphérique de $n$ dimensions et qui sont astreints à y rester pendant le mouvement : les équations ainsi obtenues auront lieu pour une forme non euclidienne de l'espace à $n$ dimensions. Pour un espace fini, le rayon et toutes les coordonnées doivent être réels; pour la forme de l'espace, selon Lobatschewsky, le rayon et l'une des coordonnées doivent être imaginaires, les autres coordonnées réelles.

Le Mémoire comprend sept paragraphes. Le premier sert à discuter le mouvement d'un point libre dans un espace non euclidien à trois dimensions. Les notions de masse, densité, vitesse et force ne dépendent pas de la longueur infinie d'une droite ni, pour des droites infinies, de l'axiome des parallèles; elles ne subissent donc aucune modification dans les formes non euclidiennes de l'espace. Tout de même, celle d'inertie reste inaltérée et l'unité de force peut se réduire, d'après les méthodes connues, aux unités de temps et de masse; aussi la mesure de la force ne présente-t-elle pas de difficultés. Enfin, le principe du parallélogramme des mouvements et des forces subsiste pour un domaine indéfiniment petit.

Après avoir développé, pour les coordonnées de M. Weierstrass, les équations différentielles du mouvement d'un point libre, l'auteur les applique au mouvement planétaire appartenant à la loi newtonienne dûment modifiée pour cet espace. La loi de Kepler sur la forme de l'orbite n'a pas besoin d'être modifiée; la deuxième subsiste sous cette forme : Prolongeons le rayon vecteur au delà de la planète jusqu'au double de sa longueur; ce rayon double décrira des aires égales dans des intervalles de temps égaux. La troisième loi concernant la durée de révolution subit une légère modification.

Dans le deuxième paragraphe, l'auteur étudie le mouvement d'un point assujetti à rester sur une surface, et l'exemple du pendule montre que l'isochronisme des petites oscillations existe aussi dans les formes non euclidiennes de l'espace.

---

(¹) Voir *Bulletin*, XII, p. 117.

§ 3. Pour un nombre quelconque de points dans l'espace non euclidien, les équations différentielles du mouvement s'obtiennent aussi bien dans la première forme de Lagrange que dans celle qui constitue le principe de d'Alembert, et enfin l'on en tire le principe de Hamilton. On conclut de là que le principe des forces vives subsiste sans aucune modification, mais que le principe du mouvement du centre de gravité n'a plus de sens. En dernier lieu, il y a six propositions des aires. Les conditions de l'équilibre découlent immédiatement des équations qu'on vient d'établir.

§ 4. Les notions qu'on a mises en usage dans les trois premiers paragraphes étant indépendantes du nombre des dimensions, leurs résultats peuvent être étendus à un nombre quelconque de dimensions. Les méthodes de Hamilton et de Jacobi se prêtent en outre sans difficulté à être appliquées aux formes non euclidiennes de l'espace; ce qu'il faut étudier, c'est la relation qu'elles ont avec les coordonnées de M. Weierstrass. Pour faire voir la souplesse de ces méthodes, l'auteur entre dans le détail de la solution de plusieurs problèmes : 1° Trouver la ligne géodésique sur une figure à un nombre quelconque de dimensions; 2° Mouvement d'un point libre attiré par un point fixe selon une fonction arbitraire de la distance; 3° Dans une forme de l'espace à $n$ dimensions un point mobile est sollicité par deux forces dirigées vers deux centres fixes et inversement proportionnelles au carré du sinus de la distance divisée par $k$.

§ 5. Extension de la loi newtonienne. La recherche du potentiel dans les espaces à $n$ dimensions, devancée par un Mémoire de M. Schering (*Bulletin*, t. XI, p. 273) de 1873, montre que les propriétés du potentiel subsistent, elles aussi, et diffèrent très peu de celles de l'espace euclidien à trois dimensions.

§ 6. *Mouvement infiniment petit d'un corps solide.* — L'étude de ce mouvement repose sur les propriétés d'un déterminant $\Delta$ et conduit à plusieurs théorèmes dont quelques-uns ont été déjà énoncés par d'autres géomètres, notamment par MM. Jordan et Beltrami.

Les considérations sur le mouvement fini d'un corps solide (§ 8) sont précédées de la théorie des moments d'inertie (§ 7). Les équations de ce mouvement se trouvent déjà dans le Mémoire de Clifford : « On the free motion under no forces of a rigid system in an $n$-fold homaloid » [*Bulletin,* (2), $I_2$, p. 201], mais son observation sur la possibilité de les intégrer en toute généralité n'est pas juste, parce qu'elle suppose des conditions initiales toutes particulières.

*Hazzidakis* (*J.-N.*). — Génération de surfaces par des lignes de courbure. (49-67).

Voici la question proposée par l'auteur : Quelles sont les conditions pour qu'une courbe de forme invariable engendre, en se mouvant, une surface dont elle soit, en toute position, une ligne de courbure?

I. La courbe est gauche, mais non sphérique. Alors la surface engendrée est l'hélicoïde

$$x = u\cos v,\qquad y = u\sin v,\qquad z = kv + f(u).$$

Réciproquement, toute ligne de courbure de l'hélicoïde remplit cette condition. (Toute courbe sphérique est ligne de courbure de la sphère à laquelle elle

appartient, et se maintient comme telle pendant un mouvement quelconque sur la sphère.)

II. La courbe est plane. Il y a plusieurs solutions :

1° La courbe plane

$$x = b\frac{\cos^2\varphi}{1 - \mathrm{B}\cos\varphi} + b\sin\varphi\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1 - \mathrm{B}\cos\varphi)^2},$$

$$y = b\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \mathrm{B}\cos\varphi} + b(\mathrm{B} - \cos\varphi)\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1 - \mathrm{B}\cos\varphi)^2}$$

est une ligne de courbure de la surface engendrée par elle, lorsque son plan se meut de telle sorte que l'axe des $x$ soit normale principale, l'axe des $y$ tangente d'une courbe directrice à première courbure constante (mais à torsion quelconque). La surface en question a pour équations

$$\mathrm{X} = b\int\frac{\alpha}{\rho}\,ds + \rho\alpha' x + \alpha y,$$

$$\mathrm{Y} = b\int\frac{\beta}{\rho}\,ds + \rho\beta' x + \beta y,$$

$$\mathrm{Z} = b\int\frac{\gamma}{\rho}\,ds + \rho\gamma' x + \gamma y,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dénotent les cosinus de direction de la tangente de la courbe directrice, $ds$ l'élément de son arc; les accents signifient les dérivées prises par rapport à $s$.

2° La courbe

$$x = \frac{1}{\mathrm{B}}(a\sin\varphi - b\cos\varphi), \qquad y = -\frac{1}{\mathrm{B}}\left(a\cos\varphi + b\sin\varphi - b\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

engendre une surface sur laquelle elle reste toujours ligne de courbure, quand elle se meut de telle sorte que le plan passant par l'axe des $y$ et perpendiculaire au plan de la courbe touche sans cesse une surface cylindrique arbitraire, la ligne de contact et l'axe des $y$ étant parallèles. La vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ relative à la ligne de contact et la vitesse de glissement $\frac{d\varphi}{dt}$ ont le rapport $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{b}{a}\mathrm{R}$, où R désigne la distance de la ligne de contact à l'axe des $y$.

3° Toute courbe plane est ligne de courbure de la surface canal engendrée par elle lorsque son plan roule sur une surface quelconque développable.

4° La circonférence jouit encore de la propriété en question quand un plan passant par l'un de ses diamètres, et perpendiculaire au plan du cercle, roule sur une surface quelconque développable.

## *Boltzmann* (*Ludwig*). — Sur les propriétés des systèmes monocycliques et d'autres systèmes analogues. (68-94).

La deuxième loi de la théorie mécanique de la chaleur puiserait sans doute la démonstration la plus complète dans la Mécanique analytique si l'on par-

venait à prouver qu'il existe, pour un procédé quelconque de Mécanique, des équations qui sont analogues à celles de la Thermodynamique. Or, il semble que la proposition, prise dans cette généralité, ne soit pas juste, et d'ailleurs nous ignorons la nature de ce que nous appelons *atomes*, à tel point que nous ne sommes pas à même d'indiquer les conditions exactes qui président au mouvement de la chaleur; donc nous voilà vis-à-vis de la question : dans quel cas et dans quelle étendue les équations de la Mécanique sont-elles l'analogue de celles de la théorie mécanique de la chaleur? C'est M. H. von Helmholtz qui a posé le premier la question sous cette forme (voir *Bulletin* $XII_2$, p. 121), et, en considérant quelques systèmes intimement liés aux systèmes monocycliques, M. Boltzmann tâche de pousser plus loin l'analogie que son illustre prédécesseur a découverte entre les systèmes monocycliques et les lois de la théorie mécanique de la chaleur. Ayant discuté plusieurs exemples où la force vive se transforme en travail, comme dans la Thermodynamique, l'auteur parvient à un point où il n'est plus d'accord avec M. von Helmholtz. Il trouve qu'il existe des systèmes isokinétiques (expression introduite par M. von Helmholtz) où la force vive n'est plus dénominateur intégrant, et il soupçonne que, dans l'équation de ce géomètre

$$dQ = 2\,L\,d\log(Lt),$$

la quantité $Lt$ ne dépend pas seulement de l'état actuel, mais encore de la voie par laquelle le système a dû passer pour entrer dans cet état; il croit donc qu'on n'est pas en droit de conclure de cette équation que L soit toujours dénominateur intégrant de $dQ$.

*Cayley* (*A.*). — Note en connexion avec les intégrales hyperelliptiques de première espèce. (95-96, anglais).

Démonstration d'une équation de M. Weierstrass contenue dans un Mémoire de 1854 et identique à une formule de M. Hermite dans une Note de 1855.

*Königsberger* (*L.*). — Sur les intégrales de fonctions transcendantes. (97-125).

On sait qu'Abel a établi le théorème fondamental : « Si l'intégrale $\int y\,dx$, où $y$ désigne une fonction algébrique de $x$, est, elle aussi, une fonction algébrique, cette dernière fonction permet d'être mise sous la forme de fonction rationnelle de $x$ et $y$. » Dans le Mémoire original d'Abel, ce théorème est suivi d'autres propositions analogues et relatives aux intégrales de fonctions algébriques lorsqu'il est possible de les réduire à des logarithmes et intégrales elliptiques. M. Königsberger s'attache d'abord à démontrer plusieurs généralisations de ces théorèmes pour une intégrale d'une équation différentielle linéaire ou non linéaire d'ordre quelconque. Puis, pour montrer l'utilité des propositions qui découlent de son analyse, il aborde la question principale, qui est d'étudier la nature de toutes les transcendantes dont l'intégrale permet d'être représentée en fonction algébrique de la variable indépendante et de cette transcendante. Il trouve tout de suite qu'il faut qu'une telle transcendante soit l'intégrale d'une équation différentielle algébrique de premier ordre, et qu'elle ne peut donc appartenir à une équation différentielle irréductible d'ordre supérieur. Si la transcendante satisfait en même temps à une équation différen-

tielle d'ordre $m$, il faut que l'intégrale générale de la première équation soit une fonction homogène et linéaire de $m+1$ intégrales particulières de l'autre dont les coefficients sont fonctions d'une même constante arbitraire. D'après une investigation antérieure de l'auteur, cette propriété n'appartient qu'à l'équation différentielle linéaire de premier ordre ou aux équations différentielles qui en dérivent par une substitution algébrique. Les coefficients de la substitution doivent encore remplir quelques conditions que l'auteur étudie de plus près.

*Grube* (*F.*). — Détermination du potentiel d'un ellipsoïde homogène. (126-130).

La solution repose sur la décomposition de l'ellipsoïde en couches homothétiques infiniment minces, concentriques à la surface limite, et procède par la voie de l'intégration directe.

*Lilienthal* (*R. von*). — Propriétés générales de surfaces dont les coordonnées permettent d'être représentées par les parties réelles de trois fonctions analytiques d'une variable complexe. (131-147).

Les recherches se composent de trois Parties.

La première s'occupe des surfaces caractérisées au titre. L'auteur prend pour point de départ l'observation suivante : Les expressions de Gauss A, B, C, D, D', D'', E, F, G ne gardent leurs significations que quand elles sont formées de variables réelles. Donc, dès que l'on emploie les variables complexes $u = p + qi$, $v = p - qi$ pour étudier les surfaces, il faut développer les relations qui lient les quantités A, ..., G, formées en $p$ et $q$, aux quantités corrélatives en $u$ et $v$.

Désignons par le nom de *fonctions génératrices* les fonctions analytiques dont les parties réelles représentent les coordonnées des surfaces en question. Trois fonctions génératrices donneront lieu à deux surfaces : les parties réelles de ces fonctions fournissent les coordonnées de l'une, les coordonnées de l'autre dérivent de leurs parties imaginaires divisées par $i$. Cette seconde surface s'appelle la *parente* de la première. Après cela, une surface possédera une seule parente ou en aura plusieurs, à mesure qu'elle peut descendre d'un seul système de trois fonctions génératrices ou de plusieurs.

La deuxième Partie développe les relations qui existent entre les surfaces en question et leurs parentes.

Dans la troisième Section, l'auteur examine les conditions auxquelles une surface doit satisfaire pour appartenir à celles considérées dans le Mémoire, c'est-à-dire pour posséder une fonction génératrice.

*Krause* (*Martin*). — Contribution à la théorie des fonctions hyperelliptiques de premier ordre. (148-174).

En partant des théorèmes d'addition pour les fonctions thêta, l'auteur indique une méthode qui enseigne à établir les équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques et les fonctions thêta à plusieurs variables pour les valeurs nulles des variables. Tandis que les autres travaux qui traitent le même sujet ont eu recours à considérer

la nature des intégrales, le point de départ choisi par M. Krause ne semble pas être dépourvu d'intérêt. Car ni le principe ni la marche du raisonnement ne s'écartent du caractère vraiment élémentaire; encore est-ce ainsi que ces équations différentielles se rangent sous un même point de vue comme anneaux d'une chaîne indéfiniment longue d'équations dont chacune jouit d'une certaine importance dans la théorie des transcendantes hyperelliptiques. Quoique restreinte, dans le Mémoire de M. Krause, aux fonctions hyperelliptiques de premier ordre, cette méthode n'y est point bornée. Du reste, la tentative de prendre la théorie des fonctions thêta pour fondement des transcendantes hyperelliptiques n'est pas d'origine récente; signalons seulement les Leçons de Jacobi sur les fonctions elliptiques, publiées pages 497-538 du tome I de ses *Œuvres*, et les réflexions faites sur ce procédé par M. Weierstrass dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie de Berlin*. En terminant son travail, M. Krause cite ce passage remarquable de Jacobi (*Œuvres*, t. II, p. 173) : « Considérons la série $y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$, dont la loi de formation est extrêmement simple. Malgré cette simplicité, il n'y a pourtant pas de moyen pour reconnaître, par la nature même de cette série, si elle peut être définie par une équation finie aux différentielles, c'est-à-dire par une équation algébrique entre elle, la variable indépendante et ses coefficients différentiels. Et qu'il soit possible de trouver une telle équation à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques : combien les considérations requises sont-elles compliquées et indirectes! » On comprend la satisfaction de l'auteur, qui ajoute ces paroles : « Tout au contraire, la méthode développée sur la base du théorème d'addition paraît aussi simple que succincte. »

## *Anglin* (*A.-H.*). — Contribution à la théorie des fonctions symétriques. (175-176).

Soit $f(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m$. On se propose de représenter le reste de la division $x^{m+n} : f(x)$ par certaines fonctions symétriques des racines de l'équation $f(x) = 0$. Le résultat se trouve aussi dans la dissertation inaugurale de Jacobi publiée sous une forme amplifiée dans les *Œuvres de Jacobi* (t. II, n° 23).

## *Meyer* (*A.*). — Sur le nombre de classes des formes ternaires quadratiques qui admettent une représentation rationnelle du zéro. (177-230).

La théorie des formes ternaires quadratiques a été fondée par Gauss et par Eisenstein. M. Meyer soumet celles de ces formes qui se prêtent à représenter la valeur nulle au moyen de valeurs entières des variables à une analyse détaillée et qui conduit à diviser ces *formes nulles* en genres et classes, et à déduire le nombre de classes appartenant à chaque genre.

Dans la première Partie du Mémoire on trouve, pour une forme nulle, la démonstration des critères de Smith, critères que le géomètre anglais avait publiés sans en indiquer la preuve. Les caractères quadratiques (selon Gauss) de la forme et de son adjointe fournissent le principe de la division des formes en genres. La représentabilité du zéro, par une forme ternaire quadratique indéfinie, se trouve être indépendante seulement de ces caractères quadratiques. Par conséquent, ou toutes les formes d'un genre permettent de représenter

2nd Part



zéro, ou aucune ne l'admet. Enfin, l'équivalence de deux formes ternaires réduites se reconnaît à l'aide d'une ample discussion des six équations de trans formation. Le critère simple et complet qu'on gagne ainsi sert à ranger en classes les formes réduites du genre nul.

Dans la deuxième Partie, l'auteur résout la question, déjà abordée par Gauss, de représenter une forme ternaire nulle aux invariants $\Omega$, $\Delta$ par une forme binaire au déterminant $\Omega M$, $M$ étant un nombre entier quelconque. Ce cas comprend, comme cas spécial, la représentation d'un nombre par la forme ternaire. Trois certaines congruences, qui doivent être remplies en même temps, font voir que les genres des deux formes se déterminent complètement l'un l'autre.

Dans la troisième Partie, on étudie le nombre de classes pour un genre ternaire nul aux invariants impairs positifs $\Omega$, $\Delta$. Une investigation savante mène enfin au théorème principal : « Dans tout genre de formes ternaires quadratiques nulles à déterminant impair, le nombre de classes est une puissance (*assignable*) de 2 .» L'auteur finit par mettre ce nombre sous diverses formes élégantes.

*Heymann* (*W.*). — Sur les intégrales supplémentaires. (231-240).

On peut effectuer quelquefois l'intégration d'équations différentielles linéaires non réduites

$$p_n y^{(n)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = q$$

sans appliquer la méthode de la variation des constantes. Soit Y l'intégrale complète de l'équation réduite, on aura pour l'intégrale complète de l'équation non réduite : $y = Y + \zeta$, où $\zeta$ dénote une solution particulière, libre de constantes arbitraires, de l'équation à second membre. Cette fonction $\zeta$ est ce que l'auteur appelle l'*intégrale supplémentaire*, appartenant à $q$, de l'équation proposée. Sans aucune connaissance préalable des solutions particulières de l'équation réduite, on ne saurait en général donner de préceptes pour la déduction de l'intégrale supplémentaire. Cependant une première hypothèse sur la forme de l'intégrale conduit souvent au but, ou l'on réussit aussi parfois à modifier la méthode qui est à appliquer à l'intégration de l'équation réduite, de telle sorte qu'on gagne immédiatement une intégrale particulière de l'équation non réduite. Quelques exemples servent à montrer l'efficacité de ces observations.

*Heymann* (*W.*). — Sur une transformation dans la théorie des équations différentielles linéaires simultanées. (241-243).

*Frobenius* (*G.*). — Sur les facteurs constants des séries thêta. (244-263).

Suivant M. Weierstrass, on peut démontrer la relation de Jacobi :

$$\vartheta'_1 = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3,$$

en s'aidant de l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau} = 0.$$

C'est ce que fait l'auteur dans le premier paragraphe de son Mémoire, en recourant tout à la fois au développement en séries de quelques formules connues. Après cela, il emploie la même méthode pour démontrer les formules analogues des fonctions thêta à deux et trois variables, enfin, plus généralement, des fonctions thêta hyperelliptiques. Sans entrer dans le détail des notations et du calcul, contentons-nous de mentionner que M. Frobenius donne la formule définitive sous cette forme :

$$|D_\beta \mathfrak{S}[A_\alpha]| = \pm \pi^\rho \prod_\gamma \mathfrak{S}[B] \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, \rho \\ \gamma = 1, \ldots, \rho + 2 \end{pmatrix}.$$

Cette relation a lieu pour une valeur quelconque de $\rho$, pourvu que le système fondamental soit déterminé et que les paramètres $\tau_{\alpha\beta}$ satisfassent aux conditions propres aux fonctions hyperelliptiques. Pour $\rho = 2$, la relation a été communiquée sans démonstration dans les *Mémoires des Savants étrangers*, t. XI, par Rosenhain qui semble l'avoir prouvée par une généralisation de la méthode de Jacobi. L'existence d'une équation semblable pour $\rho = 3$ se fit deviner à l'aspect de la formule donnée par M. Weber pour le rapport de deux déterminants qui ont la même forme (*Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht*, 3, p. 42). Pour les fonctions hyperelliptiques, M. J. Thomæ a déduit la relation en question de la théorie des intégrales hyperelliptiques.

*Hofmann* (*Fritz*). — Réduction à la forme $\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0$ de l'équation du tétraédroïde. (264).

*Schœnflies* (*Arthur*). — Contribution à la théorie du mouvement des systèmes solides de l'espace. (265-280).

Considération de trois ou de plus de trois positions successives du solide.

Citons quelques-uns des exemples : Tous les points du système solide pour lesquels trois positions successives appartiennent à une même droite forment en général une courbe cubique gauche $i^3$ qui passe par les points à l'infini des deux droites du système, axes des deux mouvements hélicoïdaux que subit le système. Dans un système solide $\Sigma$ il y a un nombre infini de points P tels que les quatre positions successives P, $P_1$, $P_2$, $P_3$ appartiennent à un seul plan. L'ensemble de ces points forme en général une surface cubique $F^3$, lieu de la courbe $i^3$ que nous venons de mentionner. Il y a un nombre infini de points du système solide tels que les cinq positions P, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ appartiennent à un même plan. Ils forment en général une courbe gauche $c^6$ de sixième ordre. Il existe en général neuf points du système solide pour lesquels six positions successives appartiennent à un même plan. Dans le système solide, il y a un nombre infini de points tels que quatre positions successives appartiennent à une même circonférence; ils forment une courbe $c^6$ de sixième ordre, située sur la surface $F^3$. Dans le système solide, il y a un nombre infini de points tels que cinq positions successives restent sur une même surface sphérique; ils forment une surface $F^4$ de quatrième ordre, etc.

*Weingarten* (*J.*). — Note sur les lignes focales d'un faisceau de rayons infiniment mince. (281-283).

Pour obvier à quelques objections qu'on a cru récemment devoir faire contre les théories des systèmes de rayons de Hamilton, de Ch. Sturm et de Kummer, M. Weingarten signale une ambiguïté inhérente à la définition des lignes focales. Si l'on ne trouve pas, dans les théories devenues classiques des géomètres illustres, la preuve de l'existence de lignes focales qui ne rencontrent pas sous un angle droit l'axe du faisceau infiniment mince (par exemple, de normales d'une surface), cette circonstance se trouve assez éclaircie quand on observe que le but de ces recherches demandait justement de faire un choix convenable de certaines lignes focales privilégiées par leur position.

*Reye (Th.)*. — Sur les espèces principales des complexes généraux quadratiques de rayons et sur les tissus de ces complexes. (284-300).

La division en genres des complexes quadratiques de rayons, prévue et ébauchée par M. F. Klein dans sa dissertation inaugurale (1868), a été achevée par M. Weiler (1874) qui s'inspirait de la théorie des diviseurs élémentaires de M. Weierstrass, et tout récemment (1884), M. C. Segre l'a reprise sur une base géométrique plus amplifiée. L'un et l'autre sont d'accord en trouvant quarante-neuf genres de complexes quadratiques irréductibles. Le premier de ces genres comprend les complexes généraux de second degré qui dépendent de dix-neuf constantes; les autres quarante-huit genres contiennent les complexes particuliers doués de rayons doubles. Une division ultérieure des genres en espèces, par rapport au nombre des diviseurs élémentaires, n'a été abordée nulle part jusqu'à présent. Cependant, au point de vue géométrique, les espèces diverses de complexes quadratiques pourraient jouir d'un plus grand intérêt que leurs genres divers. Car ces derniers, on peut les obtenir par spécialisation en partant des complexes généraux, de même qu'on descend de la surface générale du second degré à la surface du cône et de là au couple de plans. Tout au contraire, il est beaucoup plus difficile de créer une image intuitive de la métamorphose d'un complexe quadratique en un autre d'espèce différente.

M. Reye enseigne à distinguer les complexes hyperboliques, paraboliques, elliptiques et imaginaires, mais parmi les espèces paraboliques et elliptiques, encore plusieurs espèces principales. Tandis que les complexes paraboliques ont un nombre infini de rayons communs avec tout complexe linéaire, et les hyperboliques même avec toute congruence linéaire, les complexes elliptiques ne sont pas coupés par tout complexe linéaire en rayons réels, et les imaginaires jamais. Des faisceaux réels de rayons de premier ordre ne peuvent donc se présenter que dans des complexes hyperboliques et paraboliques. Quelques espèces de complexes quadratiques ont des cônes réels de complexe pour tous les points de l'espace, quelques-uns les ont en partie réels, en partie imaginaires. Aussi les formes des surfaces aux singularités de certaines espèces sont-elles essentiellement différentes; toutefois, il y a d'autre part aussi des complexes d'espèces différentes qui ont une même surface aux singularités. La recherche se restreint à diviser en espèces principales les complexes généraux de second degré, ce qui permet d'étendre leurs propriétés aux espèces analogues de complexes particuliers.

I. Les espèces principales des tissus quadratiques de complexes. II. Les espèces principales des complexes généraux de rayons du second degré.

*Segre (Corrado)*. — Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer. (301-303, française).

Extrait d'une Lettre à M. Th. Reye sur une démonstration simple et synthétique du théorème de ce géomètre : « Un plan singulier d'un complexe quadratique quelconque $\Gamma_0$, dont la droite singulière correspondante soit tangente principale de la surface singulière $\Phi_0^4$ de ce complexe, est aussi singulier pour le complexe quadratique infiniment voisin appartenant au faisceau des complexes quadratiques $\Gamma_\nu$ qui passent par la congruence des droites singulières de $\Gamma_0$, et réciproquement. »

*Hauck (Guido)*. — Théorie de la correspondance trilinéaire de systèmes plans. Article III. La correspondance tridesmico-uniforme entre trois systèmes plans ponctuels et les relations qu'elle a à la correspondance quadratique et à la projectivo-trilinéaire. (304-332).

Suite des deux Mémoires dont nous avons rendu compte dans ce *Bulletin*, $XI_2$, p. 58 et $XII_2$, p. 125. L'auteur part de la définition la plus générale de la correspondance tridesmico-uniforme et en développe les propriétés fondamentales; en spécialisant son étude, il parvient à un cas particulier qui est lié à la correspondance projectivo-trilinéaire, et ainsi il passe à la correspondance trilinéaire. § 1. Exposition. § 2. La correspondance générale tridesmico-uniforme. § 3. Les sections coniques principales. § 4. Constructions opérées sur les sections coniques principales. § 5. Cas particulier de la correspondance quadratique. § 6. Transition à la correspondance trilinéaire. § 7. La correspondance parabolique tridesmico-uniforme. § 8. La correspondance tridesmico-trilinéaire. § 9. Relations avec le théorème de Mac-Laurin ou de Braikenridge.

*Grünfeld (E.)*. — Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires. (333-338).

L'auteur n'a pas pris le soin de parcourir les travaux de ses prédécesseurs; un nombre des résultats du Mémoire ont été anticipés par les recherches de M. L.-W. Thomé. *Voir* la Note de ce géomètre dans le t. IC, p. 88 du même Recueil.

E. Lampe.

## REVUE D'ARTILLERIE (1).

Tome XXVIII; avril-septembre 1886.

*Laurent* (*P.*). — De la déformation de l'âme des canons dans le voisinage de l'obturateur, et du déculassement. (31-47, 1 fig.).

Troisième et dernière Partie du Mémoire commencé au tome XXVII.

Elle est consacrée à l'étude de la résistance au déculassement et traite de l'équilibre élastique de la partie du canon contenant le logement de la culasse, et de l'effort maximum exercé sur la paroi inférieure de l'écrou.

*Moch* (*G.*). — Des canons à fils d'acier. (48-76, 147-161, 256-276, 369-388, 553-579, 8 fig., 3 pl.).

Comme il est arrivé, dit l'auteur du Mémoire, pour beaucoup de découvertes importantes, plusieurs inventeurs ont eu, tout à fait indépendamment les uns des autres, l'idée de fretter les canons au moyen de fils métalliques. C'est ainsi que MM. Woodbridge, Longridge et Schultz ont des titres égaux à revendiquer la paternité de cette invention.

Les premiers travaux de M. Woodbridge datent de juillet 1850. Peu après, M. Longridge, aidé dans ses calculs par M. Ch. Brooks, publia une tentative encore incomplète en 1855, mais remplacée dès 1856 par la solution définitive du problème. M. Longridge a fait successivement trois importantes Communications sur ce sujet à la Société des ingénieurs de Londres, en 1860, 1879 et 1884. Enfin, en 1884, il a publié un traité de l'application du fil d'acier à la construction des bouches à feu, œuvre volumineuse qui débute par la théorie mathématique de la tension des fils.

En 1871, le capitaine Schultz fut amené par l'étude du frettage des bouches à feu à la même idée que M. Longridge. Il n'avait d'ailleurs aucune connaissance des travaux de cet ingénieur qui ne lui furent révélés que par la brochure parue en 1879; à cette époque, plusieurs canons Schultz étaient en expérience depuis trois ans déjà, et d'autres en construction.

Bien qu'il n'ait rien publié sur cette question, le capitaine Schultz a posé, sur la construction des canons à fils, d'importants principes que l'auteur du Mémoire a recueillis et a trouvés dans ses Notes.

M. Longridge est resté longtemps seul à s'occuper du frettage et à en publier une théorie. Les constructeurs anglais paraissaient pourtant se défier des résultats ainsi obtenus, et il faut avouer que les règles empiriques ont prévalu dans les essais entrepris à Elswick chez Sir Armstrong et à l'arsenal de Woolwich, jusqu'à ce que l'on apprît que cette construction était susceptible d'être utilement guidée par la théorie. C'est ainsi, par exemple, qu'on a démontré

(1) Voir *Bulletin*, $I_2$, 74; $II_2$, 127; $IV_2$, 266; $V_2$, 231; $VII_2$, 86; $VIII_2$, 79; $XI_2$, 51.

l'avantage d'un enroulement dans lequel la tension des fils doit être variable pour obtenir une répartition rationnelle des efforts pendant le tir.

Le Mémoire actuellement publié est divisé en quatre Parties. Nous ne pouvons en donner ici que le sujet des divers paragraphes.

I. *Théorie des fils*. — 1. Raison d'être de l'emploi des fils. 2. Avantages accessoires de l'emploi des fils. 3. Loi des tensions proposée par le major Clavarino. Compression que l'on peut imposer à un tube. 4. Sur l'application aux fils des formules du général Virgile, et sur la méthode à suivre dans les calculs. 5. Formules de la résistance des tubes homogènes. 6. Notations employées dans la suite des calculs. 7. Calcul des tensions dans un tube théorique. 8. Calcul des tensions dans un canon à frettage théorique, dont le tube et les fils ont même module d'élasticité. 9. Calcul des tensions dans un canon à frettage théorique, dont le tube et les fils ont des modules d'élasticité différents. 10. Calcul de l'état des canons frettés pendant la période de repos. 11. Formules relatives aux frettages à tension initiale uniforme. 12. Des frettages dans lesquels l'allongement des fils pendant le tir est uniforme. 13. Hypothèse de la rupture d'un fil. Variations à donner à la tension, au courant de la pose d'un même fil. 14. Détermination par le calcul des épaisseurs du tube et du frettage. 15. Discussion des formules qui précèdent.

La fin de la première Partie est publiée dans le Volume suivant.

## Tome XXIX; octobre 1886-mars 1887.

### *Vallier* (*E.*). — Essai sur les principes de la balistique extérieure. (5-25, 1 fig.).

Ce travail termine et résume une série de recherches entreprises depuis quelques années sur la résistance que l'air oppose au mouvement des projectiles animés de vitesses variant entre les limites de 150$^{m}$ à 600$^{m}$, et sur les règles qui s'en déduisent pour les diverses applications balistiques.

L'auteur a utilisé, dans un grand nombre de vérifications numériques, les résultats obtenus par Bashforth, par Krupp et par la Commission de Gavre, et c'est à la suite de nombreuses tentatives qu'il a été amené à écarter diverses méthodes et à proposer les formules suivantes :

Pour la pression antérieure

$$p' = p_0 e^{b'v^2} S,$$

pour la pression arrière

$$p'' = p_0 e^{a - b''v^2},$$

S désignant la section droite,
$p_0$ la pression atmosphérique,
$v$ la vitesse,
$b'$, $b''$ une fonction tirée de la formule de Navier.

Enfin, il a substitué à la méthode de Didion, pour toutes les vitesses et pour les angles de projection, une nouvelle méthode d'intégration indépendante de la forme analytique de la fonction de résistance.

### *Moch* (*G.*). — Des canons à fils d'acier. (26-47, 197-221, 332-350, 459-481, 539-559, 10 fig., 3 pl.).

Continuation du Mémoire publié dans le précédent Volume.

*Théorie des fils* (suite). — 16. Influence de l'échauffement du canon. 17. De la section et de la nature des fils.

II. *De la séparation des résistances à l'éclatement et au déculassement.* — 1. La question de la résistance longitudinale. 2. Frettes agrafées et frettage biconique. 3. Interposition de fils longitudinaux dans la masse du frettage. 4. Séparation complète des deux résistances. 5. Du chambrage. 6. De la fermeture de culasse.

III. *Description des divers canons à fils existants.* — 1. Canons Woodbridge. 2. Canons Hotchkiss. 3. Canons Longridge. 4. Canons Armstrong et de Woolwich. 5. Canons Schultz.

IV. *Exemple d'application de la théorie.* — Résumé et conclusions.

*Laurent* (*P.*). — Du déculassement des bouches à feu fermées par une vis à segments. (152-168, 222-243, 6 fig.).

Les articles précédents de l'auteur sur le même sujet ont supposé que la vis de culasse n'était pas segmentée; dans ceux qui sont abordés ici, on suppose la vis formée de trois segments pleins.

Ce travail se divise en deux Parties.

I. *De la vis à trois segments.* — 1. Préliminaires. 2. Composantes des forces élastiques. Intégrales des équations de Lamé. 3. Équilibre élastique de l'écrou de culasse. 4. Détermination des constantes. 5. Valeurs des composantes des forces élastiques. 6. Discussion de la valeur des composantes des forces élastiques et du déplacement U (suivant le rayon). 7. Comparaison des composantes des forces élastiques dans la vis pleine et dans la vis segmentée. 8. Effort maximum exercé sur la paroi intérieure de l'écrou. 9. Comparaison entre la somme des composantes des forces élastiques par tiers de circonférence d'écrou dans la vis pleine et dans la vis segmentée. 10. Équation donnant les axes de l'ellipsoïde d'élasticité à l'origine des segments pleins. 11. Équation de la surface déformée du logement de la vis.

II. *De la vis à un nombre quelconque de segments.* — 12. Valeurs des déplacements et des composantes des forces élastiques dans le cas d'une vis à $s$ segments. 13. Détermination des constantes. 14. Valeurs des composantes des forces élastiques.

Tome XXX; avril-septembre 1887.

*Vallier* (*E.*). — Tir contre les ballons. (106-110).

Aux nombreuses causes d'incertitude du tir contre un ballon vient s'ajouter le défaut de précision dans l'évaluation de la distance du but. Il est donc utile de pouvoir présenter une méthode de tir applicable aux canons de campagne, pour lesquels on ne dispose que de charges déterminées, et aux canons de siège ou de place, pour lesquels on peut généralement faire varier en même temps l'angle de tir et la vitesse initiale.

Pour les canons de campagne, le problème est limité; on ne peut employer que les Tables de tir, mais elles donneront des résultats un peu faibles.

Pour les canons de siège, la méthode consiste à profiter des avantages que

procurera l'emploi d'une trajectoire ayant son sommet à peu près à hauteur du ballon et un peu en deçà.

La discussion des formules usuelles de balistique employées dans un précédent article (octobre 1886) conduit l'auteur à la règle suivante, d'une application presque instantanée :

A. Viser le ballon avec la hausse zéro et en déduire l'angle de site $\varepsilon$ à l'aide du niveau de pointage.

B. Multiplier la tangente de l'angle trouvé par 1,9, c'est-à-dire la doubler et en retrancher le dixième (ou utiliser pour cet objet la graduation de la hausse), ce qui donne tang $\varphi$, $\varphi$ désignant l'angle de tir.

C. Faire la même opération sur la distance évaluée horizontalement, ce qui donne X.

D. Ayant ainsi déterminé l'angle de projection et la portée, en déduire la vitesse initiale à l'aide des Tables.

*Moch* (*G.*). — Canons à fils d'acier, système Véry. (265-268, 1 pl.).

Description d'un canon inventé par M. E.-W. Véry, ancien lieutenant de vaisseau de la marine américaine, et construit en 1882.

Tome XXXI; octobre 1887-mars 1888.

*Monteux* (*B.*). — Calcul des éléments d'un frein hydraulique à résistance constante et à orifices variables. (193-210, 3 fig.).

Quand on veut construire un frein, on se donne, dans la plupart des cas, la longueur du recul, et l'on cherche la grandeur de la résistance, dont le travail sur le parcours donné doit absorber la force vive du recul. Cette résistance, une fois déterminée, sert de base au calcul des différents éléments du frein.

On se trouve donc en présence des deux problèmes suivants :

1° Trouver la résistance à donner au frein.

2° Trouver la loi de la variation des orifices, loi qui permet d'obtenir la constance de l'effort.

Dans un article publié par la *Revue* [1], M. Canet a présenté un travail étendu sur les freins à résistance constante et les freins à résistance variable, et où les deux problèmes énoncés sont traités d'une façon complète, mais simplement approchée. Une solution identique de cette question a été donnée dans les Cours de l'École d'application de l'Artillerie et du Génie. Quoique la méthode en question puisse être considérée comme ayant reçu une consécration presque officielle, l'auteur a pensé qu'il y aurait moyen de serrer de plus près la réalité, soit dans l'estimation de la résistance, soit dans la loi qui lie la variation des orifices au chemin parcouru.

*Kalakoutski* (*N.-V.*). — Étude des tensions intérieures dans la

---

[1] *Bulletin*, $IV_2$, 208.

fonte et l'acier. (289-324, 389-414, 485-497, 8 fig., 2 pl., 20 Tabl.).

Traduction d'un Ouvrage paru récemment en langue russe, à Saint-Pétersbourg, et dû au général Kalakoutski.

Voici les principales subdivisions de cette étude :

1. De l'influence des tensions intérieures dans les métaux sur leur résistance. 2. Méthode suivie dans l'étude des tensions intérieures et exposé général de la marche des opérations. 3. Détermination de la limite de résistance des cylindres au moyen des données expérimentales. 4. Étude des tensions intérieures de disques découpés dans les canons, des tubes intérieurs et des cylindres forgés. 5. Expériences relatives à l'étude des tensions intérieures dans des frettes, des canons frettés, des tubes intérieurs et des lingots d'acier comprimés à l'état liquide. 6. Expériences exécutées pour déterminer la relation entre les tensions intérieures et les conditions de fabrication.

Tome XXXII; avril-septembre 1888.

*Kalakoutski* (*N.-V.*). — Étude des tensions intérieures dans la fonte et l'acier. (5-23, 10 Tabl.).

Suite et fin du Mémoire commencé dans le Volume précédent.

7. Étude des tensions intérieures dans les projectiles en acier.

Le tome XXXII renferme, du même auteur, une Note complémentaire relative à des expériences sur ces tensions.

*Putz* (*H.*). — Théorie mécanique du frein Lemoine. (113-142, 5 fig.).

Le frein Lemoine, appliqué à des affûts de campagne, ayant été expérimenté avec succès en 1885 pendant les écoles à feu et les grandes manœuvres, il était intéressant et utile d'en établir la théorie mécanique.

Le présent travail contient une description sommaire de l'appareil et l'étude de son fonctionnement dans les deux circonstances où il est utilisé, c'est-à-dire quand il est employé pour enrayer pendant les marches, ou quand il agit automatiquement pendant le tir pour limiter le recul de la bouche à feu.

*Putz* (*H.*). — Mémoire sur les principes fondamentaux de l'application du Calcul des probabilités aux questions d'Artillerie. (213-240, 313-343, 5 fig., 3 Tabl.).

L'auteur a repris, pour le compléter d'après les Notes très intéressantes et très instructives publiées récemment par M. J. Bertrand dans les *Comptes rendus*, le sujet qu'il avait déjà traité en 1884 dans la présente *Revue*.

Ce Mémoire est subdivisé en six Chapitres : I, II, III. Formules relatives à la probabilité des écarts dans la recherche d'un point : 1° sur une ligne; 2° dans un plan; 3° dans l'espace. IV. Influence du nombre des observations

sur le degré de confiance qu'on est en droit d'accorder aux résultats qui s'en déduisent. V. Résumé et conclusions. Tables des fonctions $\Theta(t)$, $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ pour l'application des formules dans les trois cas qui peuvent se présenter dans la pratique (c'est-à-dire les trois cas précédemment spécifiés). VI. Conséquences pratiques. Amélioration qu'il conviendrait d'apporter aux Tables de tir. Observation critique sur la méthode suivie dans le réglage du tir.

Les fonctions précitées ont respectivement pour expressions

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \qquad \Phi(t) = 1 - e^{-t^2}, \qquad \Psi(t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} t^2 dt.$$

*Lardillon*. — Transformation des Tables balistiques de Grävenitz. (437-459).

Le tome XXVI (1885) a reproduit les Tables publiées par M. Siacci et déduites de celles d'Otto, et destinées au calcul des éléments du tir sous des angles variant de 5° en 5°, depuis 30° jusqu'à 75°.

Les Tables données actuellement peuvent être considérées comme faisant suite aux précédentes; elles concernent uniquement le tir sous des angles inférieurs à 30°.

Ces nouvelles Tables ont été déduites, par des transformations, en partie graphiques, des dix-huit trajectoires types calculées au siècle dernier par de Grävenitz, conformément aux indications d'Euler, pour le cas où la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

Les Tables correspondent aux angles de 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 8°, 10°, 15°, 20°, 25° et 30°.

*Moch* (*G.*). — Expériences américaines sur le frettage des bouches à feu. (544-571, 3 fig., 11 Tabl.).

Première Partie. Essai de frettes en acier. Essai comparatif de deux frettes laminées, l'une trempée, l'autre non trempée.

Essais à la traction, Essai d'élasticité. Essai de résistance.

Ces expériences ont été faites par le capitaine R. Birnie, en vue de vérifier les théories du général Virgile et du colonel Clavarino.

*Voir* à ce sujet les précédents travaux de l'auteur sur le frettage des canons à fils d'acier.

*Croizé* (*A.*). — Note relative à la régularité des tirs d'expériences. (572-582).

Indication des règles à suivre pour déterminer le régime d'un tir avec une probabilité suffisante.

H. B.

OVERSIGT OVER DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER (¹).

Année 1884.

*Petersen* (*Jules*). — Rapport sur un Mémoire, envoyé en réponse à une question mise au concours, sur la multitude des nombres premiers au-dessous d'une limite donnée. (14-22).

Le Mémoire couronné de M. Gram (²) a été inséré aux *Mémoires de l'Académie*, 6ᵉ série, t. II.

*Heiberg* (*J.-L.*). — Un faux sur Archimède. (25-30).

Tartaglia prétend avoir traduit du grec les deux livres d'Archimède sur l'hydrostatique. M. Heiberg démontre qu'à son époque n'existait plus aucun manuscrit en grec de ces livres, et que Tartaglia n'a fait que transcrire une traduction qui a été faite dans le moyen âge.

*Thiele* (*T.-N.*). — Calcul des orbites des planètes, au moyen d'une modification des lois de Kepler. (31-38).

*Christiansen* (*C.*). — Recherches sur les propriétés optiques des corps blancs. (115-142).

Année 1885.

*Thiele* (*T.-N.*). — Rapport sur trois Mémoires, envoyés en réponse à une question mise au concours, sur les orbites des petites planètes considérées comme partie d'un anneau autour du Soleil. (15-23). Et en français. (I-X).

Le Mémoire de M. Svedstruje fut couronné.

*Christiansen* (*C.*). — Remarques sur le degré de chaleur des planètes.

Année 1886.

*Heiberg* (*J.-L.*). — Effets de la mécanique grecque dans la Renaissance. (1-14).

*Thomsen* (*J.*). — Sur la constitution de la molécule du benzole. (179-186).

---

(¹) *Bulletin de l'Académie royale danoise des Sciences et des Lettres.* Voir *Bulletin*, $VIII_2$, p. 171.

(²) Voir *Bulletin*, 2ᵉ série, t. IX, 1ʳᵉ partie, p. 155.

Année 1887.

*Heiberg* (*J.-L.*). — Contributions à l'histoire des Mathématiques des Byzantins. (88-96).

Année 1888.

*Petersen* (*Jules*). — Rapport sur un Mémoire, envoyé en réponse à une question mise au concours, sur les groupes de transformations homogènes et linéaires, à deux ou trois variables. (38-41).

*Heiberg* (*J.-L.*). — Sur un endroit mathématique d'Aristote. (1-6).

L'endroit en question est le Chap. 24 des *Analytica priora*, I.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument. (127-144, en français).

L'auteur montre les rapports intimes qui ont lieu entre les applications des coordonnées que nous devons immédiatement à Fermat et à Descartes et celles dont on savait faire usage dans l'antiquité.

L'usage des coordonnées dans l'antiquité s'est attaché à la représentation géométrique des quantités dont on se servait alors.

H. Z.

---

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK (5e série). Udgivet af J.-P. Gram et H.-G. Zeuthen (¹).

Tome II : 1884.

*Cavallin* (*C.-B.-S.*). — Sur un théorème de M. Crofton. (1-8).

Le théorème dont M. Cavallin donne une nouvelle démonstration et une extension à l'espace a égard à la valeur moyenne de l'angle sous lequel on voit le contour intérieur d'un anneau plan, limité par deux contours arbitraires, d'un point quelconque de l'anneau.

*Thiele* (*T.-N.*). — Représentation géométrique de la solution de l'équation cubique. (11-13).

---

(¹) Voir *Bulletin*, VIII₂, p. 174.

Correspondance des plans représentant les valeurs réelles et imaginaires de $x$ et de $y = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$.

*Crone* (*C.*). — Une construction appartenant à la Géométrie descriptive. (13-19).

En se bornant aux cas dont on s'occupe dans l'instruction élémentaire, l'auteur réduit la détermination des points doubles apparents de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre à des constructions assez simples.

*Buchwaldt* (*F.*). — Sur le développement le plus exact en série finie suivant les puissances de la variable indépendante à exposants entiers et positifs. (33-52).

Le problème résolu par l'auteur est le suivant : $F(u)$ étant une fonction donnée de $u$, déterminer les $n$ constants $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ en sorte que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} |Fu - C_0 - C_1 u - C_2 u^2 - \ldots - C_{n-1} u^{n-1}|^2 du$$

devienne minima.

*Bang* (*A.-S.*). — Relations entre les côtés d'un triangle dont les angles A, B, C satisfont à l'équation linéaire

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = n \text{ angles droits.}$$

(53-59).

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Une autre construction des points doubles apparents de la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre. (60-63).

*Voir* l'article précédent de M. Crone.

*Jensen* (*J.-L.-W.-V.*). — Sur la convergence des séries. (63-72).

« Les termes $a_n$ et $u_n$ de deux séries étant positifs, si la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est divergente, et si, depuis une valeur de $n$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \begin{cases} \geq \mu > 0, \\ \leq 0, \end{cases}$$

la série $\Sigma u_n$ sera $\begin{cases} \text{convergente} \\ \text{divergente.} \end{cases}$ »

Pour $a_n = 1$ on aura le critère de *Cauchy*, pour $a_n = n$ celui de *Raabe-Duhamel*.

L'auteur montre encore comment on déduit celui de *Bertrand* du théorème énoncé. Il s'occupe encore de critères d'une convergence qui cessera d'avoir lieu si l'on remplace les termes par leurs modules.

*Jensen* (*J.-L.-W.-V.*). — Sur un théorème de Cauchy. (81-84).

Si $\lim \varphi_n$ a une valeur déterminée et positive, cette valeur sera égale à $\lim \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n}{n}$. L'auteur généralise ce théorème de Cauchy, en substituant des valeurs quelconques à la valeur 1 des coefficients de la somme.

*Guldberg* (*A.-S.*). — Le calcul aux quotients et aux produits. (84-96 et 161-170).

Le calcul proposé est analogue au calcul différentiel et intégral, les différences étant remplacées par des quotients, etc.

*Gram* (*J.-P.*). — Sur la compensation des observations de la mortalité, et sur la formule d'Oppermann. (113-139).

Le mathématicien défunt, *L. Oppermann*, avait composé une formule exprimant, d'une manière très conforme aux observations statistiques, la mortalité $\mu_x = -\frac{d \log l_x}{dx}$ ($l_x$ étant le nombre des vivants ayant $x$ ans) en fonction continue de $x$. Elle a servi de base aux Tables fondamentales de l'institution danoise pour les assurances de vie de 1871 et de celles d'autres Compagnies d'assurances; mais son auteur ne l'avait jamais publiée. M. Gram donne dans son article sur la formule, sur la détermination de ses constantes et sur son usage les renseignements dont il était déjà en possession ou qu'il pouvait puiser dans les papiers de l'auteur. Il l'illustre encore par des explications et par des applications dues en partie à une collaboration avec M. Oppermann. La formule valable depuis l'âge d'environ 15 ans a la forme

$$\mu_x = (\alpha + \beta x) e^{-kx} + \gamma e^{+\lambda x}.$$

*Steen* (*A.*). — Les problèmes de Maximus Planudes. (139-147).

*Cavallin* (*C.-B.-S.*). — Une généralisation de l'expression de Legendre de la longueur d'un contour fermé. (147-149).

*Lindhagen* (*A.*). — Sur le problème balistique. (149-151).

*Thiele* (*T.-N.*). — Archimède et $\sqrt{3}$. (151-154).

*Schmidt* (*E.*). — Sur la réduction de $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ à une somme de deux racines carrées. (154-156).

*Gram* (*J.-P.*). — Une fonction numérique. (170-181).

La fonction étudiée ici est déterminée par l'équation fondamentale

$$f(x) + f\left(\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \mathrm{E}(x),$$

le symbole $\mathrm{E}(x)$ désignant le plus grand nombre entier contenu à $x$.

*Thue* (*A.*). — Une généralisation du théorème de Brianchon. (181-183).

*Petersen* (*Jules*). — Une transformation dans la mécanique. (183-186).

L'équilibre d'un fil flexible et le mouvement d'une particule s'expriment par les mêmes équations. Cette circonstance conduit à une transformation au moyen de laquelle l'auteur déduit le principe de la moindre action et le principe de Hamilton du principe des vitesses virtuelles.

Tome III; 1885.

*Petersen* (*Jules*). — Sur les notions fondamentales de l'Algèbre. (1-22).

L'Algèbre est la théorie du calcul symbolique, et ses vérités sont indépendantes des applications qu'on en peut faire aux quantités, aux opérations, etc. Après avoir défini dans ce sens les principes de l'Algèbre, l'auteur s'occupe successivement de l'algèbre binaire des nombres complexes représentés par les points d'un plan, de l'algèbre des ternions représentés par les points de l'espace et des quaternions de Hamilton.

*Haare* (*K.*). — Démonstrations élémentaires des théorèmes de Brianchon et de Pascal ([1]). (23-39).

*Steen* (*A.*). — Démonstration des théorèmes de Newton sur les fonctions symétriques des racines d'une équation. (30-31).

*Jensen* (*J.-L.-W.-V.*). — Sur les valeurs limites et sur les nombres irrationnels. (33-39).

Définitions exactes des notions indiquées.

*Guldberg* (*A.-S.*). — Sur les équations dont les racines peuvent être exprimées par une formule analogue à celle de Cardan. (39-44).

*Crone* (*C.*). — Le théorème d'Euler sur les polyèdres. (44-47).

L'auteur démontre l'extension de ce théorème aux polyèdres d'une connexion arbitraire.

---

([1]) Cet article est en allemand.

*Christensen* (*S.-A.*). — Une démonstration d'Archimède. (47-50).

*Buchwaldt* (*F.*). — Sur les puissances de séries infinies et finies et sur les séries représentant des fonctions inverses. (65-101).

Ce Mémoire contient, non seulement des méthodes, mais aussi une suite de formules et de Tables servant à effectuer la détermination des séries cherchées.

*Thue* (*A.*). — Un théorème sur des figures qui ont la forme d'un réseau. (102-105).

Le théorème appartient à l'*analysis situs*.

*Thue* (*A.*). — Sur une dualité dans la Géométrie absolue. (129-146).

Dans la Géométrie absolue, on peut souvent obtenir de nouveaux théorèmes, en substituant, dans les énoncés de théorèmes connus, les paroles « normales d'une droite » aux paroles « points d'une droite », ou réciproquement.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Une déduction du critère de convergence de Duhamel. (147-149).

*Christensen* (*S.-A.*). — L'introduction du calcul aux fractions décimales en Danemark. (149-152).

Le premier livre en danois qui contienne les règles de ce calcul est de 1602.

*Olsson* (*O.*). — Communications de la réunion mathématique et physique d'Upsal. (161-168).

Cette Communication contient des théorèmes de MM. Olsson, Pettersson et Meyer, appartenant à la théorie des intégrales définies, à la Géométrie et à la convergence des séries.

*Arneberg* (*A.*). — Intégration d'une équation différentielle. (168-175).

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Déterminations du volume de la pyramide. (175-179).

L'auteur résume les différents procédés élémentaires dont on s'est servi pour évaluer des quantités dépendant de $\int x^2\,dx$, en les appliquant tous, pour plus de conformité, au volume de la pyramide.

*Valentiner* (*E.-C.*). — Une remarque sur le nombre des points de rebroussements d'une courbe de l'ordre $n$ et du genre $p$. (179-180).

Tome IV; 1886.

*Gram* (*J.-P.*). — Sur les logarithmes et les antilogarithmes. (1-15).

Remarques pédagogiques.

*Jensen* (*J.-L.-W.-V.*). — Sur le critère de convergence de Raabe et Duhamel. (15-16).

*Juel* (*C.*). — Sur les cordes d'une conique qu'on voit sous un angle droit d'un point donné. (33-43).

L'étude est faite par des procédés de la Géométrie élémentaire.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Nécrologie d'Adolphe Steen. (65-70).

*Bang* (*A.-S.*). — Recherches dans la théorie des nombres. (70-80 et 130-137).

L'auteur s'occupe en particulier des propriétés des nombres de la forme $\frac{a^t - 1}{M}$, où M désigne le plus petit multiple commun à $a^{\frac{t}{\mu_1}} - 1$, $a^{\frac{t}{\mu_2}} - 1$, ... et $a^{\frac{t}{\mu_n}} - 1$, $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_n$ étant les facteurs premiers de $t$.

*Foldberg* (*P.*). — Un théorème sur l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre. (81-82).

*Guldberg* (*A.-S.*). — Sur les racines doubles. (97-120).

L'auteur appelle la racine de l'équation $\frac{x^n}{1+x} = c$ la racine double de $c$.

*Olsson* (*O.*). — Quelques théorèmes géométriques. (120-130).

Les théorèmes ont égard aux longueurs de certaines enveloppes et trajectoires.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Une déduction de la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation d'une surface développable du second ordre. (128-130).

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Le théorème sur les moments statiques. (145-155).

L'auteur prend ce théorème pour base de l'étude géométrique d'un système de forces en équilibre. (Extrait de leçons.)

*Hertzsprung* (*S.*). — Remarques sur une classe de problèmes de combinaisons. (154-163).

Les problèmes en question ont égard aux nombres de manières dont on peut ordonner un nombre d'individus appartenant à certaines catégories, et aux fréquences relatives d'arrangements satisfaisant à des conditions données.

*Fleischer* (*J.-S.*). — Détermination d'une surface réfléchissant les rayons qui sortent d'un point donné, de sorte qu'ils deviennent parallèles à un plan donné et qu'ils aillent rencontrer une droite donnée. (164-168).

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Sur l'étude mathématique de la friction. (168-174).

*Birkeland* (*K.*). — Sur le nombre de mouvements libres d'un système articulé. (174-176).

Tome V; 1887.

*Meyer* (*A.*). — La formation des images par les miroirs et les lentilles sphériques. (1-8).

*Schmidt* (*E.*). — Sur les points à l'infini d'un plan. (9-13).

*Hertzsprung* (*S.*). — Un problème de combinaisons. (13-17).

*Birkeland* (*K.*). — Une généralisation du pantographe oblique de Sylvester. (17-18).

*Olsson* (*O.*). — Déduction du théorème d'addition pour quelques intégrales elliptiques. (33-44).

*Gram* (*J.-P.*). — Transformations de l'équation binôme. (44-50).

Cette recherche conduit à des critères de la réductibilité d'équations à la forme binôme.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Sur la détermination de courbes algébriques par des points donnés. (65-79).

Le tome XXXI des *Mathematische Annalen* contient une traduction en français, augmentée par l'auteur, de cet article.

*Buchwaldt* (*E.*). — Interpolation et intégration par des séries. (79-90 et 97-121).

L'auteur applique beaucoup de soin à former les séries qui donnent la meilleure approximation.

*Jensen* (*J.-L.-W.-V.*). — Une équation fonctionnelle. (90-93).

Détermination des fonctions uniformes et analytiques qui satisfont à l'équation

$$f(x+y) = a\,f(x)\,f(y) + b\,f(x+\omega)\,f(y+\omega).$$

*Christensen* (*S.-A.*). — La première détermination de la longueur d'une courbe. (121-125).

*Madsen* (*V.*). — Sur le développement des racines d'une équation algébrique en séries. (129-136).

*Bang* (*A.-S.*). — Quelques problèmes de maximum dans la géométrie non euclidienne. (136-141).

Les aires des cercles et des figures inscrits gardent leur propriété de maxima dans la géométrie non euclidienne.

*Juel* (*C.*). — Sur la collection des cordes d'une sphère qu'on voit sous un angle donné d'un point donné. (141-148).

*Hjort* (*V.*). — Nécrologie de H.-C.-F.-C. Schjellerup. (148-153).

*Juel* (*C.*). — Sur la démonstration d'Argand du théorème fondamental de l'Algèbre. (161-169).

L'auteur suit essentiellement M. Lipschitz quant aux suppléments nécessaires à cette démonstration.

*Hansen* (*H.-J.*). — La solution des équations numériques d'après Gräffe. (169-187).

Tome VI; 1888.

*Petersen* (*Jules*). — Une transformation quadratique. (1-6).

La transformation dont s'occupe ici M. Petersen doit correspondre des cercles aux droites d'un plan et des couples de cercles à certaines coniques du plan donné.

*Brodén* (*T.*). — Notes sur les éléments doubles de droites ou faisceaux projectifs. (6-13).

*Vedel* (*P.*). — Le principe de la moindre résistance. (13-22).

En prenant pour point de départ une hypothèse fort plausible, l'auteur déduit le principe de la loi de contrainte de Gauss.

*Madsen* (*N.*). — Développement des racines de l'équation

$$x^n + ax + b = 0$$

en séries. (33-39).

*Petrini* (*H.*). — Sur une intégrale de Crofton. (39-48).

*Valentiner* (*E.-C.*). — Démonstration que la courbe hessienne n'a en général aucun point double. (48-49).

*Valentiner* (*E.-C.*). — Sur les conditions de l'existence d'une équation identique entre trois formes ternaires du même degré. (49-52).

*Crone* (*C.*). — Un intégrateur anglais. (65-72).

*Buchwaldt* (*F.*). — Sur la représentation conforme des surfaces de révolution dans le plan. (73-96).

*Gram* (*J.-P.*). — Sur les erreurs moyennes des valeurs des assurances de vie. (97-120).

Il s'agit du calcul de la réserve extraordinaire dont les institutions d'assurances ont besoin pour résister aux pertes provenant d'écarts momentanés de la mortalité et du taux d'intérêts de leurs valeurs moyennes.

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Leçons d'Hydrostatique. (129-152).

*Petersen* (*Jules*). — Sur les covariants des formes binaires. (152-156).

Détermination du système complet des covariants d'une forme d'un ordre $n < 5$.

Le *Tidsskrift* contient encore des questions à résoudre, des solutions, des questions d'examen, des analyses de nouveaux livres, etc.

## ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférences de l'École (¹).

Troisième série, t. IV, 1887.

*Guichard.* — Généralisation de la série de Taylor. (61-64).

Soient $f(z)$ une fonction holomorphe; $f_n(z)$ sa dérivée d'ordre $n$; $f_{-n}(z)$ celle de ses intégrales d'ordre $n$ qui s'annule $n$ fois pour $z=0$; soit R une autre fonction holomorphe. La série

$$\Pi(z, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z)\, R_{-n}(x)$$

représente une fonction holomorphe des variables $z$ et $x$. La série $\Pi$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$\Pi$ est donc une fonction de $x+z$. En supposant $R(x)=1$, on retrouve la série de Taylor.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} f &= A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots, \\ R &= B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots, \\ \Pi &= C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots, \end{aligned}$$

on voit facilement que la série $\Pi$ est le produit des deux séries $f$ et R, ce qui donne pour le calcul des coefficients de $\Pi$ la formule

$$C_p = A_0 B_p + A_1 B_{p-1} + \ldots + A_p B_0.$$

Si la série R n'a pas de zéros, elle est de la forme $e^{\varphi(t)}$. Posons

$$R' = e^{-\varphi(t)} = B'_0 + B'_1 t + B'_2 \frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$R'(x) = \sum_0^{\infty} \frac{B'_p}{p!} x^p.$$

La série $f$ sera le produit des séries $\Pi$ et R'. On en conclut

$$f(x) = \sum_0^{\infty} C_n R'_{-n}(x),$$

(¹) Voir *Bulletin*, $\text{XII}_2$, p. 18

c'est-à-dire qu'une fonction entière est développable en série contenant les intégrales de la fonction $R'(x)$.

*Gomes Teixeira.* — Deuxième Note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle. (107-110).

*Floquet.* — Sur une classe d'équations différentielles linéaires non homogènes. (111-128).

Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = \varpi_0(x) + x\varpi_1(x) + \ldots + x^n \varpi_n(x)$$

ou, pour abréger,

$$P(y) = \varpi(x),$$

dans laquelle les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont supposés uniformes, périodiques de période $\omega$, avec l'infini pour seul point essentiel; $\varpi_0, \varpi_1, \ldots, \varpi_n$ sont aussi des fonctions uniformes de $x$, sans autre singularité essentielle que l'infini, mais périodiques de seconde espèce, de même période $\omega$ et de même multiplicateur $\varepsilon$.

Cette équation, comme le montre M. Floquet, admet toujours une solution de la forme

$$\mathfrak{L}(x) = \chi_0(x) + x\chi_1(x) + x^2\chi_2(x) + \ldots + x^s\chi_s(x),$$

où les coefficients $\chi(x)$ sont uniformes, périodiques de seconde espèce, de période $\omega$ et de multiplicateur $\varepsilon$. Si l'équation privée de second membre n'a aucune solution de multiplicateur $\varepsilon$, ce *polynôme* $\mathfrak{L}(x)$ est unique et son degré $s$ est égal à $n$.

Mais, si $P(y) = 0$ admet $\mu$ solutions fondamentales appartenant au multiplicateur $\varepsilon$, les coefficients du *polynôme* renferment linéairement $\mu$ constantes arbitraires. Il y a donc une infinité de polynômes $\mathfrak{L}(x)$ qui répondent à la question; mais leurs degrés sont tous compris entre $n$ et $n+\mu$, ou égaux à l'un de ces deux nombres.

Voici d'ailleurs une proposition qui donne souvent des indications sur la nature des coefficients d'une solution $\mathfrak{L}(x)$ et qui fournit pour le degré $\nu$ de cette solution une limite supérieure généralement plus petite que $n+\mu$.

$\mathfrak{L}(x)$ étant une intégrale de l'équation $P(y) = \varpi(x)$, les $\nu$ dérivées successives de $\mathfrak{L}(x)$, prises en considérant les coefficients $\chi$ comme des constantes, satisfont respectivement aux $\nu$ équations que l'on déduit successivement de la proposée en différentiant de la même manière son second membre $\Pi(x)$.

M. Floquet fait l'application de cette théorie à une loi particulière de force centrale $\frac{f(\theta)}{r^2}$, signalée par Jacobi et étudiée par M. Darboux (*Cours de Mécanique* de Despeyrous, Note XI). On sait que la trajectoire s'obtient par l'intégration de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = f(\theta).$$

Si, pour un état initial déterminé, la trajectoire $z = \varphi(\theta)$ est telle que $\varphi(\theta)$

soit périodique de période $2\pi$ et uniforme avec le seul point singulier $x = \infty$, il en sera de même de $f(\theta)$ et de l'intégrale générale. Alors la loi considérée ne conduit pas toujours à une valeur périodique de $r$. Elle peut donner naissance à deux catégories de trajectoires; mais, quel que soit l'état initial, dans l'une il n'existe sur chaque rayon vecteur qu'un seul point de la courbe, dans l'autre un nombre infini de points. M. Floquet précise les conditions auxquelles doit satisfaire $f(\theta)$ pour que la trajectoire appartienne à l'une ou l'autre de ces catégories dans le cas où $f(\theta)$ est une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$.

## *Collet.* — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. (129-144).

L'auteur, partant d'une idée de Cauchy, se propose d'exprimer par une quadrature l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients constants.

Soit d'abord l'équation homogène

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi(z) = z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m$$

et si l'on désigne par $\Pi(z)$ un polynôme quelconque, l'intégrale

$$y = \int_S \frac{e^{xz}\,\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque, sera une intégrale de l'équation proposée. En supposant que $\Pi(z)$ soit d'ordre $n-1$ et que la courbe S entoure tous les points racines de $\varphi(z)$, on aura l'intégrale générale.

Si maintenant on passe à l'équation complète

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_m y = f(x),$$

l'expression

$$y = \int_S \frac{e^{xz}\,\Pi(z)}{\varphi(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x} f(u)\,du \int_S \frac{e^{(x-u)z}}{\varphi(z)}\,dz$$

sera une intégrale, et ce sera l'intégrale générale si le polynôme $\Pi(z)$ est d'ordre $m-1$ et si la courbe S s'étend à l'infini.

On peut donner à $y$ une autre forme en développant $\varphi(z)$ de la manière suivante

$$\varphi(z) = Q_\alpha e^{xz_1} + Q_\beta e^{xz_2} + \ldots,$$

$z_1$, $z_2$ ... étant les zéros de $\varphi(z)$, $\alpha$, $\beta$, ... leurs ordres de multiplicité, $Q_\alpha$, $Q_\beta$, ... des polynômes de degrés $\alpha - 1$, $\beta - 1$, .... On trouve alors

$$y = \sum \left\{ Q_\alpha e^{xz_1} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-u)z_1} \left[ a_1 + \frac{a_2(x-u)}{1!} + \ldots + \frac{a_\alpha (x-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] f(u)\,du \right\},$$

les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ étant, dans la décomposition de $\frac{1}{\varphi(z)}$ en fractions simples, les numérateurs des fractions répondant à la racine $z_1$ de $\varphi(z)$.

Lorsque $\varphi(z)$ n'a que des zéros simples, cette dernière formule coïncide avec celle qu'on obtient par les méthodes classiques de Lagrange et de Cauchy.

L'auteur signale des équations différentielles à coefficients variables, réductibles par changement de variable à des équations à coefficients constants, et dont l'intégrale générale peut, en conséquence, être obtenue par une intégration effectuée le long d'une courbe fermée.

Dans deux Notes qui font suite à son Mémoire, M. Collet se propose de résoudre certains systèmes remarquables de $n$ équations du premier degré à $n$ inconnues. Le premier est le suivant

$$\varphi(a) = b_0, \quad \frac{d\,\varphi(a)}{da} = b_1, \quad \frac{d^2\,\varphi(a)}{da^2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}\,\varphi(a)}{da^{n-1}} = b_{n-1},$$

où

$$\varphi(z) = x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \ldots + a^{n-1} x_n.$$

En deuxième lieu, en supposant que l'équation

$$\varphi(x) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

admette la racine $z_1$ avec l'ordre de multiplicité $\alpha$, toutes les autres $z_{\alpha+1}, \ldots, z_m$ étant simples, on compose, à l'aide de ces racines, le système suivant :

$$z_1^{\alpha-1} x_1 + \binom{\alpha-1}{1} z_1^{\alpha-2} x_2 + \ldots + \binom{\alpha-1}{\alpha-1} x_\alpha + z_{\alpha+1}^{\alpha-1} x_{\alpha+1} + \ldots + z_m^{\alpha-1} x_m = b_{\alpha-1}$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Si l'on désigne par $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{m-1}(z)$ les coefficients des puissances successives de $\zeta$ dans le quotient de $\varphi(\zeta)$ par $\zeta - z$ et que l'on pose

$$F(z) = b_{m-1}\,\varphi_0(z) + b_{m-2}\,\varphi_1(z) + \ldots + b_0\,\varphi_{m-1}(z),$$

les valeurs des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont les numérateurs des fractions simples résultant de la décomposition de $\dfrac{F(z)}{\varphi(z)}$.

## *Demartres.* — Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales. (145-158).

M. Demartres expose la solution générale du problème suivant, qu'il avait déjà résolu dans deux cas particuliers assez étendus :

« Trouver toutes les surfaces réelles isocycliques, c'est-à-dire qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales. »

Après avoir rappelé quelques-uns des résultats obtenus dans son précédent Mémoire (*Annales de l'École Normale,* 1885, p. 173) et montré comment le problème se ramène à l'intégration de cinq équations différentielles du premier ordre, l'auteur commence cette intégration en établissant que les surfaces isocycliques sont des anallagmatiques à déférente réglée; il la complète en montrant que la focale, intersection de la directrice et de la déférente, doit être une asymptotique de cette dernière; il obtient en même temps, pour chaque surface isocyclique, un facteur rendant intégrable l'équation des lignes de longueur nulle, ce qui permet, comme on sait, d'obtenir tous les réseaux isométriques.

2<sup></sup>



*Goursat.* — Étude sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. (159-200, 241-312, 317-340).

Ce Mémoire, dit l'auteur, est consacré à l'étude générale des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un des polyèdres réguliers, et plus particulièrement à l'étude de celles de ces surfaces qui sont en même temps des surfaces *minima*. Il est divisé en trois Parties. Dans la première Partie, je recherche d'abord les équations propres à représenter en coordonnées cartésiennes toutes les surfaces ayant la symétrie demandée : ces équations sont obtenues par l'application d'un procédé uniforme qui n'exige que des calculs tout à fait élémentaires. Vient ensuite une étude sommaire des surfaces du troisième ordre admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier, et des surfaces du quatrième ordre admettant les plans de symétrie du tétraèdre et de l'octaèdre. Cette étude est faite surtout au point de vue du nombre des points singuliers. Ce nombre, qui est nul pour la surface générale du quatrième ordre, peut atteindre sa valeur maximum 16 pour certaines de ces surfaces et peut prendre, sauf deux exceptions, toutes les valeurs inférieures. On rencontre, en particulier, un faisceau remarquable de surfaces de Kummer, déjà obtenu par M. Kummer lui-même en 1866. Ces surfaces jouissent d'une propriété curieuse qui les distingue nettement de la surface générale à 16 points singuliers. Je signale aussi quelques surfaces remarquables du sixième ordre admettant tous les plans de symétrie de l'icosaèdre.

La deuxième Partie est consacrée à une recherche toute différente. Je me suis proposé de trouver des formules générales représentant toutes les surfaces minima qui ont les symétries d'un polyèdre régulier. Les équations générales de M. Weierstrass et de M. Sophus Lie, qui donnent toutes les surfaces minima, rapprochées des belles recherches de M. Klein sur les formes binaires, qui se reproduisent par des substitutions linéaires, permettent de résoudre ce problème. Dans les applications, il y a lieu d'employer de préférence les formules de M. Sophus Lie ou celles de M. Weierstrass, suivant qu'il s'agit de surfaces algébriques ou transcendantes. Le développement de ces recherches conduit à distinguer deux espèces de symétrie; avec les méthodes de M. Lie, cette distinction est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante qui en montre la nécessité. Parmi les surfaces obtenues, je signalerai en particulier une surface double de treizième classe admettant tous les plans de symétrie du tétraèdre.

La troisième Partie contient plusieurs recherches distinctes. Revenant à la théorie générale, je donne d'abord les équations générales des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier dans le système de représentation sphérique de Gauss. C'est surtout afin de mettre en évidence les différentes espèces de symétrie que j'ai repris la question à ce point de vue général. Je m'occupe ensuite d'une extension de ces recherches à l'espace à $n$ dimensions et des applications que l'on peut en faire à l'espace à trois dimensions.

*D'Ocagne.* — Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques. (313-316).

Soient C et C′ deux courbes polaires réciproques par rapport à une conique à centre O; soient ω et ω′ les angles de deux rayons vecteurs correspondants

OM et OM′ avec l'axe focal de la conique; θ et θ′ les angles des tangentes à C et C′ en M et M′ avec le même axe; R et R′ les rayons de courbure en M et en M′; N et N′ les normales en M et M′ limitées aux perpendiculaires élevées en O sur OM et OM′. On a la relation

$$RR' = \frac{\sin 2\omega \sin 2\omega'}{\sin 2\theta \sin 2\theta'} NN',$$

qui, dans le cas où la conique directrice est un cercle, se réduit à

$$RR' = NN'.$$

Dans le cas de la transformation parabolique, la relation devient

$$RR' = \frac{p^2}{\sin^3\theta \sin^3\theta'},$$

$p$ étant le paramètre de la parabole directrice.

*Méray.* — Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression *nombre incommensurable* et sur le criterium d'une limite pour une quantité variable de nature donnée. (341-360).

*Guichard.* — Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$. (377-380).

M. Guichard résout cette question au moyen d'une intégrale définie contenant un paramètre variable

$$\Pi(x) = \int_B^A \frac{H(z)\, e^{2i\pi z}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}\, dz,$$

$H(z)$ étant uniforme entre les deux droites $y = A$ et $y = B$. La fonction $\Pi$ admet pour coupures dans le plan des $z$ une infinité de droites parallèles à l'axe des $y$ et passant par les points dont l'abscisse est $n$. La différence des valeurs de $\Pi$ sur le bord gauche et sur le bord droit de la coupure est égale à $H(z)$.

Cela posé, on forme une fonction qui, aux points

$$\ldots,\quad x-1,\quad x,\quad x+1,\quad x+2,\quad \ldots,$$

prenne les valeurs

$$\ldots,\ \Pi(x) - H(x-1),\ \Pi(x),\ \Pi(x) + H(x+1),\ \Pi(x) + H(x+1) + H(x+2),\ \ldots.$$

Cette fonction $G(x)$ n'a plus de lignes de discontinuité et vérifie l'équation

$$G(x+1) - G(x) = H(x).$$

On obtient toutes les autres solutions en ajoutant à G une fonction uniforme ayant pour période 1.

L'intégrale $\Pi$ cesse d'avoir un sens lorsque les droites $y = A$ et $y = B$ s'éloignent à l'infini. On peut, dans le cas où H est holomorphe, remédier à cet inconvénient en remplaçant $\Pi$ par des intégrales analogues.

Les autres questions que l'auteur aborde ensuite ne sont que des applications de celle-là. Tout d'abord vient la résolution de l'équation

$$a_0 G(x+n) + a_1 G(x+n-1) + \ldots + a_n G(x) = H(x),$$

où les $a$ sont des constantes. Cette équation a été déjà résolue, dans le cas où le second membre est nul, par M. Picard et par M. Floquet.

M. Guichard considère ensuite le groupe d'équations

$$a_0 G(x+n\omega) + a_1 G[x+(n-1)\omega] + \ldots + a_n G(x) = H(x),$$
$$b_0 G(x+m\omega') + b_1 G[x+(m-1)\omega'] + \ldots + b_m G(x) = H_1(x).$$

On trouve immédiatement la relation qui doit exister entre les deux fonctions entières H et $H_1$.

Cette relation étant vérifiée, les équations précédentes n'admettent en général qu'une solution entière. Il y a en outre des solutions méromorphes qu'on obtient en ajoutant à la fonction entière les solutions des équations privées de second membre.

L'auteur termine par la résolution de l'équation

$$\frac{G(x+1)}{G(x)} = H(x),$$

et du groupe d'équations

$$\frac{G(x+u)}{G(x)} = H(x), \qquad \frac{G(x+u')}{G(x)} = H_1(x).$$

## ACTA MATHEMATICA.

Tome VII; 1885-1886 (¹).

### *Poincaré* (*H.*). — Sur un théorème de M. Fuchs. (1-32).

Dans un Mémoire intitulé : *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* et inséré aux *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin (séance du 26 juin 1884), M. Fuchs a donné les conditions pour que toutes les intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre $F(z, y, y') = 0$ (où $z$ est la variable indépendante, $y'$ la dérivée $\frac{dy}{dz}$ et dont le premier membre est un polynôme entier en $y$ et en $y'$, ayant pour coefficients des fonctions *quelconques* de $z$) aient les mêmes points singuliers. On conçoit l'intérêt qui s'attache à cette question ; si l'on suppose, en effet, que F soit un polynôme entier, non seulement par rapport à $y$ et à $y'$, mais par rapport à $z$, et que les conditions énoncées par M. Fuchs soient remplies, la méthode d'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsiennes est applicable et l'on pourrait ainsi concevoir l'espoir de découvrir une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables par ces transcendantes.

(¹) Voir *Bulletin*, $XIII_2$, p. 184.

Soit $p$ le genre de la relation algébrique établie entre $y$ et $y'$ par l'équation $F(z, y, y') = 0$, où l'on considère $z$ comme une constante. M. Poincaré, après avoir tiré des conclusions définitives de l'étude faite par M. Fuchs des cas où $p = 0$ et $p = 1$, montre comment on peut parvenir directement aux mêmes résultats et poursuivre la discussion pour le cas de $p > 1$. A cet effet, on considère l'équation différentielle comme représentant une surface de Riemann S, variable avec $z$. Les modules de cette surface S sont constants et indépendants de $z$. Soient $S_0$, $S_1$ les surfaces de Riemann qui correspondent aux valeurs $z_0$, $z_1$ de $z$. Des propositions relatives aux transformations birationnelles des surfaces de Riemann en elles-mêmes, résultent les conclusions suivantes : si $p = 0$, on peut passer de $S_0$ à $S_1$ par une triple infinité de transformations birationnelles; si $p = 1$, on peut passer de $S_0$ à $S_1$ par une simple infinité de transformations birationnelles; si $p > 1$, il n'y a, en général, qu'une seule transformation birationnelle qui permette de passer de $S_0$ à $S_1$, et il n'y en a jamais qu'un nombre fini. Ces propositions conduisent aisément à la conclusion du Mémoire de M. Poincaré, qui est la suivante :

« Les équations du premier ordre qui satisfont aux conditions de M. Fuchs ne constituent pas des classes réellement nouvelles d'équations différentielles. Dans le cas de $p = 0$, elles se ramènent aux équations linéaires. Dans le cas de $p = 1$, elles s'intègrent par une simple quadrature. Enfin, dans le cas de $p > 1$, elles s'intègrent par des procédés purement algébriques. »

M. Poincaré [1] a ultérieurement montré que, dans le cas des équations d'ordre supérieur, on arrive à des théorèmes analogues.

## *Phragmén* (*E.*). — Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques. (33-42).

Il s'agit du théorème suivant :

« Toute fonction analytique $\varphi(u)$ possédant un théorème d'addition ou, en d'autres termes, telle qu'il existe une relation algébrique entre les valeurs de la fonction correspondant aux valeurs de l'argument $u$, $v$, $u + v$, est :

» 1° Ou une fonction algébrique de $u$; ou bien,

» 2° Si $\omega$ désigne une constante convenablement choisie, une fonction algébrique de la fonction $e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$; ou enfin,

» 3° Si $\omega$, $\omega'$ sont deux constantes convenablement choisies, une fonction algébrique de la fonction

$$p(u \mid \omega, \omega') = \frac{1}{u^2} + \sum \left[ \frac{1}{(u - 2\mu\omega - 2\mu'\omega')^2} - \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^2} \right],$$

$(\mu, \mu' = 0, 1, 2, \ldots,$ sauf la combinaison $\mu = \mu' = 0)$. »

M. Weierstrass a donné, de ce théorème, une démonstration qui peut être généralisée de manière à embrasser le cas des fonctions abéliennes. M. Phrag-

---

[1] POINCARÉ, *Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes*. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIII, p. 732.)

mén, renonçant à cette généralisation, donne une démonstration plus simple que celle de M. Weierstrass.

## *Phragmén* (*E.*). — Sur les limitations de *continua*.

L'auteur établit la proposition suivante :

« Si l'ensemble de points P constitue la limitation d'un *continuum* (au sens de M. Weierstrass) A et s'il existe dans le plan des points en dehors de A, une partie quelconque de P doit être parfaitement enchaînée. »

Le procédé de démonstration conduit immédiatement à l'extension à l'espace à $n$ dimensions du théorème précédent.

## *Krey* (*H.*). — Sur les systèmes de courbes planes. (49-94).

Le *Bulletin* a publié (1re série, t. VII, p. 97) un compte rendu par l'auteur du Mémoire de M. Zeuthen relatif aux systèmes de courbes planes. M. Krey, prenant pour point de départ les formules de M. Zeuthen applicables aux systèmes où il n'existe pas de courbes à *branches multiples,* montre dans la première Partie de son Mémoire que l'on peut déterminer tous les nombres à considérer. La seconde Partie contient l'extension des résultats obtenus aux systèmes de courbes planes dans l'espace, en ayant égard aux formules données par M. Schubert (*Math. Annalen,* t. XIII, p. 445).

## *Lipschitz* (*R.*). — Déduction arithmétique d'une relation due à Jacobi. (95-100).

Démonstration arithmétique de la relation de Jacobi

$$\mathfrak{S}_0(0,q)\,\mathfrak{S}_2(0,q)\,\mathfrak{S}_3(0,q) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{d\,\mathfrak{S}_1(w,q)}{dw}\right]_{(w=0)}.$$

## *Netto* (*E.*). — Sur la théorie de l'élimination. (101-104).

Démonstration du théorème suivant :

« Si une courbe algébrique $F(x,y)=0$ passe par tous les points de rencontre de deux autres courbes algébriques $f(x,y)=0$, $f_1(x,y)=0$, il existe une puissance de la fonction $F(x,y)$ qui est représentable par une fonction linéaire homogène de $f(x,y)$ et $f_1(x,y)$, c'est-à-dire qu'on a

$$F(x,y)^{\lambda} = f(x,y)\,g(x,y) + f_1(x,y)\,g_1(x,y),$$

où $g$, $g_1$ sont, ainsi que $f$, $f_1$ et F, des fonctions entières de $x$, $y$. »

## *Cantor* (*G.*). — Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à $n$ dimensions. Seconde Communication. (105-124).

Ce travail fait suite aux Mémoires publiés par l'auteur au tome II des *Acta.* On trouve d'abord (§ 1), sous forme résumée, les résultats obtenus par M. Cantor (*Mathematische Annalen,* t. XXIII, p. 453) et par MM. Bendixson

et Phragmén (*Acta Mathematica,* t. II, p. 415, et t. V, p. 47). Les propositions rappelées se rapportent principalement aux ensembles *fermés*, c'est-à-dire aux ensembles P, tels que

$$D(P, P^{(1)}) = P^{(1)}.$$

Elles sont ensuite étendues (§ 2) à des ensembles non fermés et l'on est ainsi conduit (§ 3) à des désignations particulières pour de nouveaux éléments qui s'introduisent. Après être revenu sur le cas particulier des ensembles fermés, M. Cantor indique des applications que l'on peut faire de la théorie des systèmes de points à la Physique mathématique.

## *Gyldén* (*H.*). — L'orbite intermédiaire de la Lune. (125-172).

La théorie des orbites intermédiaires consiste, comme on sait, à substituer à l'ellipse de Képler, comme première approximation, une autre courbe qui reçoit le nom d'*orbite intermédiaire* et dont le choix peut varier d'un cas particulier à l'autre.

Le Mémoire de M. Gyldén, relatif à l'orbite intermédiaire de la Lune, constitue une application de la solution, que l'on doit à M. Hermite, de l'équation de Lamé.

Soient

$r$ et $v$ le rayon vecteur de la Lune et la longitude dans l'orbite;
$r_0$ et $v_0$ leurs valeurs intermédiaires;
$n$ le moyen mouvement;
$\Lambda$ la longitude moyenne de l'époque.

Les mêmes lettres accentuées désignent les quantités analogues pour le Soleil. M. Gyldén introduit, au lieu de $r_0$, $r'_0$, deux autres variables $\rho_0$, $\rho'_0$ définies par les équations

$$r_0 = \frac{ap}{1+\rho_0}, \qquad r'_0 = \frac{a'p'}{1+\rho'_0},$$

$a$, $a'$, $p$, $p'$ étant des constantes.

En posant

$$v - v_0 = \chi, \qquad \mu = \frac{n'}{n}, \qquad \beta_1 = \frac{3}{2}\mu^2, \qquad \lambda = 2(1-\mu), \qquad A = 2(\Lambda' - \mu\Lambda),$$

on est conduit aux équations différentielles du second ordre suivantes, d'où l'on tirera les expressions de $\chi$ et de $\rho_0$, la valeur de $\rho'_0$ étant supposée connue,

$$\frac{d^2\chi}{dv_0^2} = -\beta_1(1 - 4\rho_0 + 3\rho'_0)\sin(\lambda v_0 + 2\chi - A),$$

$$\frac{d^2\rho_0}{dv_0^2} + \left[1 - \beta_1 - 3\beta_1\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) + 2\frac{d\chi}{dv_0} + \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2\right]\rho_0$$

$$= -\frac{1}{3}\beta_1 - \beta_1\rho'_0 - \beta_1\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A)$$

$$- 3\beta_1\rho'_0\cos(\lambda v_0 + 2\chi - A) - 2\frac{d\chi}{dv_0} - \left(\frac{d\chi}{dv_0}\right)^2.$$

On a négligé, dans ces équations, les termes dépendant de $\mu^3$ et des ordres

supérieurs; on a supposé que l'inclinaison des deux orbites est nulle et l'on n'a conservé que les termes du premier ordre par rapport à $\rho_0$ et $\rho'_0$.

La méthode que M. Gyldén expose pour l'intégration des équations précédentes s'applique d'ailleurs aux équations plus complètes.

La seconde équation donne

$$\frac{d\chi}{dv_0} = \frac{\beta_1}{\lambda}\cos(\lambda v_0 - \Lambda) + 4\beta_1 \int \rho_0 \sin(\lambda v_0 - \Lambda)\, dv_0 + \text{petits termes.}$$

M. Gyldén établit qu'on peut, au moins d'une manière approchée, éliminer du résultat de la substitution dans la première équation différentielle le terme contenant le signe $\int$. L'équation différentielle du second ordre obtenue est ensuite ramenée à une forme canonique en introduisant, au lieu de $\rho_0$, la fonction E définie par la formule

$$\rho_0 = \mathrm{E}\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - \Lambda)},$$

en posant

$$\lambda^2 + \beta_1 - 1 = \eta_0, \qquad \frac{8\beta_1}{\lambda \eta_0} = \eta_1.$$

On parvient finalement à l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dv_0^2} + [1 - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}\cos(\lambda v_0 - \Lambda)]\mathrm{E} = \mathrm{W},$$

où $\bar{\beta}_0$, $\bar{\beta}$ sont de nouvelles constantes.

M. Gyldén montre qu'on parvient à une grande approximation en utilisant, pour l'intégration de cette équation, la solution donnée par M. Hermite de l'équation de Lamé.

## *Runge (C.)*. — Sur les équations résolubles de la forme

$$x^5 + ux + v = 0.$$

## (173-186).

M. Runge forme, d'après Jacobi, l'équation du sixième degré à laquelle satisfait une fonction métacyclique particulière et parvient aux deux résultats suivants :

1° Si les valeurs absolues de $u$ et $v$ sont entières et inférieures à un nombre entier $n$, le nombre des équations résolubles comprises parmi les $(2n+1)^2$ équations obtenues est, pour $n$ croissant indéfiniment, infiniment petit par rapport au nombre total ;

2° $\lambda$ et $\mu$ faisant partie d'un domaine de rationnalité, la condition nécessaire et suffisante de la résolubilité pour ce domaine est que l'équation ait la forme suivante :

$$x^5 + \frac{5\mu^4(4\lambda+3)}{\lambda^2+1}x + \frac{4\mu^5(2\lambda+1)(4\lambda+3)}{\lambda^2+1} = 0.$$

## *Schläfli (L.)*. — Sur $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\frac{dx}{1+x^2}$ et sur des intégrales qui lui sont liées.

L'auteur reprend l'étude de quelques intégrales considérées par Cauchy.

*Falk* (*M.*). — Démonstration d'une proposition de la théorie des fonctions elliptiques. (197-200).

Démonstration peu différente de celle donnée par M. Hermite des propositions bien connues relatives à K, K' et $\frac{K}{K'}$.

*Minkowski* (*H.*). — Recherches sur les formes quadratiques. I. Détermination du nombre de formes différentes comprises dans un genre donné. (201-258).

Ce Mémoire fait suite à celui du même auteur inséré dans le tome XXIX des *Savants étrangers*, sous le titre : *Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers*. Là, il avait déduit le concept de *genre* du concept de congruence de formes. Dans le Mémoire des *Acta*, M. Minkowski s'occupe des nombres qui jouent, pour les genres généraux, le même rôle que les nombres de classes pour les genres binaires, et il obtient divers résultats importants relatifs à la représentation de ces nombres.

*Poincaré* (*H.*). — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. (259-380).

Le *Bulletin* a donné (2e série, t. II, IIe Partie, p. 155, 163, 204) une analyse des résultats publiés aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. C, p. 346 et 1068, et t. CI, p. 307) par M. Poincaré; c'est à leur exposition qu'est consacré cet important Mémoire dont l'objet est l'étude des deux problèmes suivants :

« Quelles sont les figures d'équilibre relatif que peut affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent conformément à la loi de Newton et qui est animée autour d'un certain axe d'un mouvement de rotation uniforme?

» Quelles sont les conditions de stabilité de cet équilibre? »

On en connaissait depuis longtemps deux solutions : l'ellipsoïde de Maclaurin et l'ellipsoïde de Jacobi. M. Matthiessen avait signalé dès 1859 l'existence de figures annulaires d'équilibre, et en avait commencé l'étude dans plusieurs Mémoires. MM. Thomson et Tait rappelèrent l'attention sur la question en énonçant, dans leur *Treatise on Natural Philosophy*, 2e édition, § 778, plusieurs propositions relatives, soit à l'existence des figures annulaires d'équilibre, soit à la stabilité des ellipsoïdes. M. Poincaré démontre et complète quelques-unes de ces propositions et il établit l'existence de nouvelles figures d'équilibre.

Nous allons chercher à donner, de la façon la plus brève qu'il nous sera possible de le faire, l'indication du contenu de ce Mémoire.

§ 1. *Introduction.* — Rappel des résultats que l'on trouve dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Tait et Thomson.

§ 2. *Équilibre de bifurcation.* — On considère d'abord le cas où il s'agit de l'équilibre absolu d'un système dont la position est définie par $n$ quantités $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Supposons qu'il y ait une fonction des forces $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

qui, outre les quantités $x_1, \ldots, x_n$, contienne un paramètre variable $y$. Les formes d'équilibre du système considéré sont données par les $n$ équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Ces $n$ équations auront un certain nombre de solutions réelles et, quand $y$ variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue, de manière à former *diverses séries linéaires de formes d'équilibre.*

Il pourra arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires; on dira alors que c'est une *forme de bifurcation.* Pour une valeur de $y$ infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, on pourra trouver *deux* formes d'équilibre qui différeront infiniment peu de la forme de bifurcation.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles viennent, quand on fait varier $y$, à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite.*

Une forme d'équilibre ne peut être une forme de bifurcation ou une forme limite que si le déterminant fonctionnel $\Delta$ des $n$ dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ par rapport aux $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$ est nul. Il résulte de là que, si les équations d'équilibre admettent, pour une certaine valeur de $y$, une solution pour laquelle $\Delta$ ne soit pas nul, elles en admettront encore une et infiniment peu différente de la première, pour les valeurs de $y$ suffisamment voisines de celle considérée tout d'abord.

Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre réelles en faisant varier $y$ et si $\Delta$ change de signe, la forme d'équilibre correspondante est une forme de bifurcation.

Si enfin, en suivant une série linéaire de formes réelles, on voit $\Delta$ s'annuler, mais sans changer de signe, la forme correspondante n'est pas une forme limite; elle peut être une forme de bifurcation, mais il n'en est pas toujours ainsi.

§ 3. ***Échange des stabilités.*** — Décomposons la forme quadratique

$$\Phi = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} X_i X_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

dont le discriminant est $\Delta$, en une somme de carrés,

$$\Phi = \Sigma \alpha_i Y_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $Y_i$ est une fonction linéaire des X.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que tous les coefficients $\alpha$, que l'on appelle *coefficients de stabilité,* soient négatifs.

Supposons que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y = 0$, on ait une forme d'équilibre de bifurcation; les $n$ dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ s'annuleront ainsi que $\Delta$. On peut toujours supposer aussi que l'on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Les coefficients de stabilité sont alors

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}.$$

Pour que $\Delta$ s'annule, il faut et il suffit qu'un ou plusieurs de ces coefficients s'annulent; supposons, par exemple, que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ s'annule et que les autres coefficients ne s'annulent pas. Supposons, enfin, que la fonction F soit holomorphe et puisse se développer suivant les puissances de $x$ et de $y$.

Les équations d'équilibre fournissent $x_2, \ldots, x_n$ sous la forme

$$(1) \qquad x_2 = \varphi_2(x_1, y), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(x_1, y),$$

les $\varphi$ étant holomorphes; et $x_1$ est donné par l'équation

$$(2) \qquad 0 = ax_1^2 + 2bx_1y + cy^2 + \theta,$$

$\theta$ représentant un ensemble de termes de degré supérieur au second en $x_1$ et $y$.

L'équation (2) représente une courbe C formée de deux branches B et B'; ce qui montre de nouveau que la forme d'équilibre considérée est une forme de bifurcation.

Si, pour $y$ positif, il y a stabilité sur la branche B, il y aura instabilité sur la branche B'; ce sera l'inverse pour $y$ négatif. De même, si, pour $y$ positif, il y a instabilité sur la branche B, il y aura stabilité sur B', et ce sera encore l'inverse pour $y$ négatif. En d'autres termes, il y a *échange des stabilités* entre les deux branches B et B' au moment où elles se croisent.

M. Poincaré montre ensuite que l'hypothèse restrictive faite sur F n'est pas nécessaire et complète les résultats obtenus dans le § 2 par la proposition suivante :

« Pour qu'une forme d'équilibre, appartenant à une série linéaire réelle, soit de bifurcation, il suffit, non seulement que $\Delta$ change de signe, mais que l'un quelconque des coefficients de stabilité change de signe. »

§ 4. *Cas d'un nombre infini de variables.* — Les considérations exposées dans ce paragraphe ont pour but d'étendre les résultats des §§ 2 et 3 au cas d'un système dont la figure dépend d'une infinité de variables et, en particulier, au cas d'une masse fluide soumise à différentes forces.

Cette extension a, en somme, pour base, le principe suivant :

« Si un système mécanique quelconque et en particulier une masse fluide sont en équilibre stable sous l'action de certaines forces, et si l'on vient y appliquer en outre des forces perturbatrices infiniment petites, ce système prendra, sous l'action de ces forces, une figure d'équilibre stable infiniment peu différente de sa figure primitive. »

A la démonstration de ce principe, M. Poincaré ajoute la remarque suivante :

« Il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en Mécanique la même rigueur qu'en Analyse pure pour ce qui concerne l'infini. Je ne crois pas qu'on puisse le mettre sérieusement en doute, malgré les objections dont je viens de parler et qui sont de nature à intéresser plutôt l'analyste que le mécanicien. »

§ 5. *Première application.* — Démonstration de l'existence de la forme d'équilibre qui consiste en une figure annulaire de révolution.

§ 6. *Exemples d'équilibre de bifurcation.* — Étude du problème suivant, traité par Laplace dans les n$^{os}$ 27 et 28 du Livre III de la *Mécanique céleste* :

« Une sphère solide, de densité $\rho$ et de rayon $c$, est recouverte d'une couche fluide homogène de densité 1. Quelle est la figure d'équilibre de cette couche fluide? Quelle sera à l'état d'équilibre la forme de la surface libre de cette couche? »

§ 7. *Stabilité de l'équilibre relatif.* — Rappel des résultats démontrés dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. Tait et Thomson, et relatifs à la stabilité de l'équilibre relatif d'un système matériel rapporté à des axes mobiles. M. Poincaré donne sur un point des compléments qui lui sont utiles dans la suite et montre que les théorèmes établis dans les paragraphes précédents subsistent encore dans le cas de l'équilibre relatif.

§ 8. *Fonctions de Lamé.* — L'auteur arrive à l'objet principal de son travail. Il s'agit de déterminer la forme d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des $z$. Si on laisse de côté la question de stabilité, on peut traiter le problème comme s'il s'agissait de l'équilibre d'une masse fluide soumise seulement à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge ordinaire.

On connaît déjà plusieurs séries linéaires réelles de figures d'équilibre, ce sont les ellipsoïdes de Maclaurin et les ellipsoïdes de Jacobi. La figure de ces ellipsoïdes dépend de la vitesse angulaire de rotation $\omega$ qui joue ici le même rôle que jouait le paramètre $y$ dans les §§ 2, 3 et 4. Outre les ellipsoïdes, il existe des figures annulaires d'équilibre, dont il a été question dans le § 5. L'auteur se propose de rechercher s'il existe en outre des séries linéaires de figures convexes d'équilibre non ellipsoïdales. Pour cela, il cherche à reconnaître si, parmi les ellipsoïdes de Maclaurin et ceux de Jacobi, il y a des formes de bifurcation.

Pour arriver à ce résultat, il faut calculer les coefficients de stabilité de ces ellipsoïdes et rechercher dans quels cas ils s'annulent. Ces coefficients dépendant des fonctions de Lamé, on est amené à rappeler les résultats des travaux de Lamé et de Liouville au sujet de ces fonctions : c'est par là que se termine ce paragraphe.

§ 9. *Détermination des coefficients de stabilité.* — Pour que l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

puisse être une forme de bifurcation, il faut que l'un des coefficients de stabilité s'annule; on trouve ainsi, par deux voies différentes, la condition

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0, \tag{1}$$

$R_i$ étant une fonction de Lamé de $\rho$ et de degré $n$, et $S_i$ la fonction conjuguée

définie par l'équation

$$S_i = (2n+1) R_i \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R_i^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

§ 10. *Discussion de l'équation fondamentale.* — On a à rechercher si l'équation (1), où $\rho^2$ est l'inconnue, admet des racines comprises entre $+c^2$ et $+\infty$, et l'on trouve les résultats suivants :

$R_i$ divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; pas de racine ;

$R_i$ non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, $n > 1$; une racine ;

$R_i$ non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, $n = 1$; pas de racine.

§§ 11 et 12. *Ellipsoïdes de révolution et ellipsoïdes de Jacobi.* — On établit que, parmi les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi qui sont des figures d'équilibre de la masse fluide, il y en a qui sont des figures de bifurcation.

§ 13. *Petits mouvements d'un ellipsoïde.* — On étudie successivement les petits mouvements absolus d'un ellipsoïde rapporté à des axes fixes et les petits mouvements relatifs d'un ellipsoïde fluide rapporté à un système d'axes mobiles tournant avec une vitesse uniforme $\omega$ autour de l'axe des $z$.

§ 14. *Stabilité des ellipsoïdes.* — On reprend les considérations du § 7 et l'on en fait l'application aux ellipsoïdes.

§ 15. *Conclusions.* — L'auteur, après avoir rappelé les principaux résultats de son important Mémoire, les résume sous une forme concrète en exposant ce qui arrive d'une masse fluide homogène animée originairement d'un mouvement de rotation et qui se contracte en se refroidissant lentement, mais de façon à rester toujours homogène; le refroidissement est supposé assez lent et le frottement intérieur du fluide assez fort pour que le mouvement de rotation reste le même dans les diverses portions du fluide.

## *Pincherle* (*S.*). — Note sur une intégrale définie. (381-386).

Soient $A(z)$, $\varphi(z)$ deux séries de Laurent, la première convergente dans l'anneau circulaire $(|p^2|, 1)$, la seconde convergente dans l'anneau circulaire $(R, R_1)$. L'intégrale

$$(1) \qquad I(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\rho)} A\left(\frac{x}{y}\right) \varphi(y) \frac{dy}{y},$$

prise le long d'une circonférence concentrique et interne à l'anneau $(R, R_1)$ et de rayon $\rho$, représente aussi une série de Laurent. Si l'on fixe $A\left(\frac{x}{y}\right)$, tandis que $\varphi(y)$ est une série de Laurent quelconque, on peut regarder l'expression (1) comme un algorithme appliqué à l'*objet* $\varphi(y)$, et dont le *résultat* est de même espèce que l'objet, c'est-à-dire une série de Laurent.

M. Pincherle considère en particulier le cas où l'on a

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = \frac{1}{1 - p^{2n}}, \qquad a'_n = \frac{1}{1 - p^{-2n}}.$$

La différence

$$\Delta f(x) = f(x) - f(p^2 x)$$

est une série de Laurent convergente dans l'anneau $(R, R_1)$ et l'on trouve que

$$\Delta f(x) = \varphi(x) - c_0.$$

Ce résultat sert de point de départ à l'auteur.

*Runge* (*C.*). — Sur la représentation des fonctions arbitraires. (387-392).

Considérations simples sur la représentation d'une fonction arbitraire à l'aide de fonctions rationnelles.

E. Cosserat.

Tome VIII; 1886.

*Hill* (*W.*). — Sur la partie du mouvement du périgée lunaire qui est fonction des moyens mouvements du Soleil et de la Lune. (1-36).

*Mellin.* — Sur la théorie de la fonction Γ. (37-81).

Étude des fonctions de la forme

$$(1) \qquad F(z) = e^{az} \frac{\Gamma^{\mu_1}(z - a_1)\Gamma^{\mu_2}(z - a_2)\ldots\Gamma^{\mu_r}(z - a_r)}{\Gamma^{\nu_1}(z - b_1)\Gamma^{\nu_2}(z - b_2)\ldots\Gamma^{\nu_s}(z - b_s)},$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ sont des nombres entiers positifs et $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_s$, des constantes indépendantes de $z$. L'auteur généralise, pour ces fonctions, les beaux théorèmes que M. Pryne a donnés pour la fonction Γ dans le tome 82 du *Journal de Crelle*. En outre, l'application du théorème de Mittag-Leffler le conduit à un grand nombre de transcendantes nouvelles, intimement liées à la fonction Γ et, d'un autre côté, avec les intégrales de certaines équations différentielles linéaires.

La fonction $F(z)$ vérifie évidemment la relation

$$(2) \qquad F(z+1) = r(z)\,F(z),$$

où

$$(3) \qquad r(z) = e^{a} \frac{(z - a_1)^{\mu_1}(z - a_2)^{\mu_2}\ldots(z - a_r)^{\mu_r}}{(z - b_1)^{\nu_1}(z - b_2)^{\nu_2}\ldots(z - b_s)^{\nu_s}};$$

à chaque fonction rationnelle $r(z)$ correspond une fonction et, si l'on fait abstraction d'un facteur $e^{2k i\pi z}$, où $k$ est un entier, une seule fonction ayant la forme (1) et satisfaisant à la relation (2). Toutes les autres fonctions qui satisfont à la même relation peuvent s'obtenir en multipliant cette fonction particulière par une fonction admettant une période égale à un.

*Staude* (*O.*). — Sur les intégrales hyperelliptiques de seconde et de troisième espèce. (61-92).

La méthode de Riemann pour représenter les intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce au moyen des fonctions thêta a souvent été em-

ployée, notamment par MM. Roch (*Crelle*, t. 65, 68), Weber (*ibid.*, t. 82), Thomæ (*ibid.*, t. 93, 94). M. Staude emploie au contraire un procédé tout analogue à celui dont Jacobi s'est servi plus tard dans la théorie des fonctions elliptiques. (*Œuvres éditées par Weierstrass*, t. I, p. 526, 533). Cette application de la méthode de Jacobi aux intégrales hyperelliptiques de premier ordre permet aussi à l'auteur d'établir simplement une formule de Weierstrass, qui donne l'expression, au moyen des fonctions hyperelliptiques, de l'arc d'une ligne géodésique de l'ellipsoïde.

*Stern.* — Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction E($x$). (93-95).

Démonstration élémentaire de la relation

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{n}\right)+E\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+E\left(x+\frac{m-1}{n}\right)=E(mx).$$

*Schubert.* — Détermination de nombres pour les espaces linéaires à dimensions quelconques. (97-118).

Ce Mémoire fait suite à celui du même auteur, inséré dans le vingt-sixième Volume des *Mathematische Annalen*, sous le titre : *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes*.

*Stenberg (A.).* — Quelques propriétés des équations différentielles linéaires. (119-154).

Le Mémoire de M. Stenberg se rapporte à une série d'identités qui contiennent comme cas particulier les théorèmes de Lagrange sur les équations différentielles linéaires adjointes.

*Holst.* — Démonstration de ce théorème : Toute équation algébrique admet une racine. (155-160).

Cette démonstration se tire de l'étude de la courbe telle que le produit des distances d'un de ses points à des points fixes soit constant.

*Nœther.* — Sur les courbes algébriques réductibles. (161-192).

On sait que, si l'équation $F(s, z) = 0$ représente une courbe algébrique *irréductible* d'ordre $n$ et d'espèce $p$, il y a quelques théorèmes fondamentaux *d'intersection* concernant la relation de cette courbe avec ses adjointes $\varphi$. Ces théorèmes expriment géométriquement comment se comportent les fonctions algébriques relatives à $F = 0$, en particulier pour ce qui est de leur nombre de constantes, et avant tout du nombre $p$ des intégrales de première espèce, dans lesquelles les formes $\varphi$ figurent comme numérateurs des expressions à intégrer. Les démonstrations purement algébriques, qui se trouvent dans le Mémoire *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* de MM. Brill et Nœther (*Mathematische Annalen*, t. VII), subsistent quels que soient les points singuliers de $F = 0$; elles supposent seulement que cette courbe est irréductible.

Si l'on supprime cette condition, ces théorèmes ne sont modifiés que légèrement, ainsi que le montre M. Nœther dans la première Partie de son travail : il obtient ainsi des extensions intéressantes des propositions antérieurement connues. En outre, il étudie le système d'équations linéaires auquel on est conduit en exprimant que les formes $\varphi$ sont adjointes; il montre en particulier que le nombre $p$ de ces formes constitue un criterium pour l'irréductibilité de l'équation $F = 0$; c'est là un important résultat sur lequel M. Valentiner avait déjà appelé l'attention.

M. Nœther étudie aussi les théorèmes généraux concernant l'intersection des courbes *gauches* réductibles : il donne la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble de deux courbes tracées sur une même surface, en ce qui concerne les relations d'intersection des courbes gauches, puisse être traité comme un cas particulier d'une courbe gauche irréductible. Dans son Mémoire *Zur Theorie der Raumcurven* (*Acta*, t. II), M. Valentiner avait déjà donné un des théorèmes de M. Nœther.

## *Weber*. — Des corps numériques abéliens. (193-263).

On sait qu'on désigne sous le nom de *corps numérique algébrique* l'ensemble $R(x)$ des expressions rationnelles à coefficients entiers en $x$, $x$ étant une racine d'une équation entière irréductible du degré $n$ à coefficients entiers. Dans le *Monatsberichte der Berliner Akademie* du 20 juin 1853, M. Kronecker a donné la proposition capitale que voici : Les racines de toutes les équations abéliennes peuvent s'exprimer rationnellement au moyen des racines de l'unité ; en d'autres termes, tous les *corps abéliens* sont identiques avec les *corps circulaires*, c'est-à-dire formés avec les racines de l'unité. Toutefois la démonstration présente des difficultés dans le cas où le degré de l'équation est une puissance de deux. A la vérité, la décomposition de certains nombres complexes qui se présentent dans la théorie de la division du cercle en leurs facteurs premiers idéaux peut alors être utilisée [Kronecker, *Monatsberichte*, 14 avril 1856, 16 avril 1877, 7 décembre 1882; Kummer, *Theorie der idealen Primfactoren*. (*Abhandlungen*, 1856)].

Le Mémoire de M. Weber contient une exposition d'ensemble relative au théorème de M. Kronecker; il est divisé en trois Parties, dont chacune forme un tout distinct : la première se rapporte à la théorie générale des corps abéliens et des corps circulaires, et, en particulier, à leur représentation. Il y établit, en particulier, que, en généralisant les périodes de Gauss, on parvient à représenter tous les corps circulaires et chacun d'eux seulement une fois. M. Kronecker, dans l'une des Communications précédemment citées, avait touché ce point; mais sa démonstration ne regarde que le cas des corps circulaires réguliers. Dans la deuxième Partie, M. Weber s'occupe du cas où le degré du corps abélien est une puissance de deux, cas qui exige une étude toute particulière. Dans la troisième Partie enfin, il donne la démonstration complète du théorème de M. Kronecker.

## Sujet de prix de l'Académie du prince Jablonowski pour l'année 1889. (264).

## *Appell*. — Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la Physique mathématique. (265-294).

La fonction $Z(x, y, z)$ introduite par l'auteur dans un précédent Mémoire des *Acta* ([1]) est définie comme il suit :

Soient $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$ les coordonnées rectangulaires de trois points non situés dans un même plan avec l'origine; soient ensuite

$$a_\nu = ma + m'a' + m''a'',$$
$$b_\nu = mb + m'b' + m''b'',$$
$$c_\nu = mc + m'c' + m''c'',$$

où $m, m', m''$ sont des nombres entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs; puis,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho_\nu = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{r\rho},$$
$$R_\nu = \sqrt{r^2 - 2r\rho_\nu\cos\varphi + \rho_\nu^2},$$

on aura

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum_\nu^1 \left[\frac{1}{R_\nu} - \frac{1}{\rho_\nu} - \frac{r}{\rho_\nu} P_\nu(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho_\nu^2} P_\nu(\cos\varphi)\right],$$

où $P_1$, $P_2$ sont les deux premiers polynômes de Legendre, et où la sommation s'étend à toutes les combinaisons $(\nu)$ des entiers $m, m', m''$, sauf la combinaison 0, 0, 0. Cette fonction vérifie l'équation $\Delta Z = 0$ et joue le rôle d'élément simple pour les fonctions de variables réelles qui vérifient cette équation et reprennent les mêmes valeurs aux sommets d'un réseau de parallélépipèdes déterminés par l'origine et les trois points $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$.

Cette fonction, représentée, comme on voit, par une série toujours convergente, permet à l'auteur de résoudre une série de problèmes de Physique mathématique, parmi lesquels la détermination de la fonction de Green pour le parallélépipède rectangle, obtenue par Riemann, et la détermination des vitesses d'écoulement des liquides par le fond d'un vase prismatique ([2]). M. Appell détermine la fonction de Green pour tout polyèdre possédant la propriété suivante : si l'on prend les symétriques du polyèdre par rapport à chacune de ses faces, puis les symétriques des nouveaux polyèdres par rapport à chacune de leurs faces, et ainsi de suite indéfiniment, les polyèdres en nombre infini ainsi obtenus ne pénètrent pas les uns dans les autres. Ces résultats s'étendent même, au moyen du principe des images (Thomson, *Journal de Liouville*, t. XII), à certains volumes limités par des surfaces sphériques, sur lesquels M. Appell se réserve de revenir.

*Poincaré.* — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. (295-344).

---

([1]) *Bulletin*, $\text{XIII}_2$, p. 98.

([2]) *Voir* les recherches de MM. de Saint-Venant, Boussinesq, Flamant, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1870, 1882, 1885.

L'auteur débute par quelques considérations relatives aux séries divergentes qui, comme la série de Stirling, peuvent représenter asymptotiquement une fonction. D'une façon précise, M. Poincaré dit qu'une série divergente

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots,$$

où la somme des $n+1$ premiers termes est $S_n$, représente asymptotiquement une fonction $J(x)$, si, $x$ croissant indéfiniment (par valeurs réelles),

$$x^n(J - S_n)$$

tend vers zéro.

On peut multiplier deux séries asymptotiques par la règle ordinaire, on peut substituer une série asymptotique à la place de $z$ dans une série *convergente*

$$F(z) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots,$$

et ordonner ensuite suivant les puissances de $\frac{1}{x}$; on obtient ainsi une série qui représente asymptotiquement $F[J(x)]$; on peut intégrer une série asymptotique.

Tout ceci subsiste quand, au lieu de faire croitre $x$ par des valeurs réelles, on fait augmenter indéfiniment son module en conservant le même argument, mais il est essentiel de remarquer alors qu'une série divergente ne peut pas représenter une même fonction J quel que soit l'argument de $x$, quand on fait augmenter indéfiniment le module.

M. Poincaré rappelle ensuite les principaux résultats dus à MM. Fuchs et Thomé sur l'intégration par des séries des équations différentielles linéaires

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = 0,$$

où les P sont des polynômes entiers en $x$ : sauf des exceptions, qui se rapportent au cas où l'équation déterminante du point $\infty$ a des racines dont les différences sont des entiers, ou à des cas plus particuliers étudiés par M. Fabry dans sa thèse, il y a $n$ séries de la forme

$$e^Q x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right),$$

où Q est un polynôme entier en $x$, qui satisfont *formellement* à l'équation différentielle : une pareille série est dite *série normale d'ordre p*, en désignant par cette lettre le degré du polynôme Q : $p$ est d'ailleurs au plus égal au nombre entier immédiatement supérieur au plus grand des nombres

$$\frac{M_i - M_n}{n - i},$$

où $M_i$ désigne le degré de $P_i$. M. Poincaré étudie d'abord avec détail le cas où $p = 1$; en utilisant les résultats de son Mémoire *Sur les équations aux différences finies*, inséré dans le tome VII de l'*American Journal*, il montre qu'une série normale du premier ordre, alors même qu'elle est divergente, représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait for-

mellement. D'ailleurs l'intégrale représentée par une même série normale ne reste pas en général la même, quel que soit l'argument avec lequel $x$ croît indéfiniment. L'auteur donne ensuite une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série normale soit convergente et constitue ainsi ce qu'il appelle *intégrale normale*. Quelques exemples particuliers sont traités de façon à bien éclaircir la matière. Enfin, M. Poincaré s'occupe du cas où $p = 2$ et généralise les résultats précédents, de manière à arriver à la conclusion suivante : l'intégrale la plus générale d'une équation de rang quelconque est représentée asymptotiquement par une des séries normales qui satisfont formellement à cette équation. Toutefois, il peut y avoir exception dans le cas auquel on a fait allusion plus haut, où l'équation admet des séries anormales.

## *Casorati.* — Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. (345-386).

M. Casorati consacre deux Mémoires à étudier en détail quelques équations différentielles très simples, de manière à bien mettre en lumière l'existence (qui nous paraît d'ailleurs incontestable) de fonctions ayant le caractère analytique, c'est-à-dire susceptibles d'êtres représentées, dans un certain domaine, par des séries de puissances qui peuvent être *continuées* sans obstacle, qui admettent une *infinité* de valeurs et qui ont un nombre de périodes supérieur à deux. M. *Casorati* avait déjà insisté sur ce point dans deux Communications insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (décembre 1863, janvier 1864). La question nous paraît être au fond une question de mots : Quel sens faut-il attribuer au mot *fonction?* Doit-on, ou ne doit-on pas regarder Z, défini par l'égalité

$$z = \int_0^Z \frac{(\alpha + \beta Z)\, dZ}{\sqrt{Z(1 - Z)(1 - x^2 Z)(1 - \lambda^2 Z)(1 - \mu^2 Z)}},$$

comme une fonction de $z$, ou non, si, comme il n'est pas douteux, Z admet une infinité de valeurs? M. Casorati estime que, peut-être, Jacobi n'a pas soupçonné l'existence de cette infinité de valeurs.

## *Bertrand* (*J.*). — Sur les unités électriques. (387-392).

Des deux systèmes électrostatique et électrodynamique, le premier « n'est acceptable qu'en vertu de ce principe : toute unité bien définie est légitime. Mais il ne satisfait pas à la condition principale imposée à tout système d'unités, celle de permettre des formules applicables à toutes les hypothèses et laissant indépendantes les trois unités de longueur, de temps et de masse. »

J. T.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CVI; 1888 (1).

*Bertrand.* — Sur l'association des électeurs par le sort. (17-19).

Étant donnés 10000000 d'électeurs, parmi lesquels 4500000 sont d'une opinion et 5500000 de l'opinion opposée, si l'on charge le hasard de former 1000000 de groupes de 10 électeurs, de réunir ensuite ces groupes dix par dix pour former 100000 groupes de 100, puis les groupes de 100 dix par dix pour former 10000 groupes de 1000, et enfin les groupes de 1000 dix par dix pour former 1000 groupes de 10000, voici les nombres les plus probables des groupes dans lesquels les électeurs de la première opinion seront en majorité :

| | | |
|---|---|---|
| 261540 | groupes de | 10 |
| 15766 | » | 100 |
| 8 | » | 1000 |
| 0 | » | 10000. |

La probabilité pour que, sur 500 députés élus par cette méthode, la minorité obtienne *un seul* représentant est plus petite que celle de gagner deux quines de suite à la loterie.

*De Jonquières.* — Détermination du nombre maximum des points doubles proprement dits qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique de degré donné $m$, dont la détermination est complétée par d'autres points simples donnés. (19-26).

Dans une Communication précédente, l'auteur a montré qu'une surface de degré $m$, déterminée par $\frac{m}{6}(m^2+6m+11)$ points simples donnés, peut toujours être engendrée par deux faisceaux projectifs de surfaces dont la somme des degrés $n+n'$ soit égale à $m$ si $m \equiv 1, 2, 3$ (mod. 4), ou à $m+1$ si $m$ est multiple de 4, en excluant ceux des systèmes $(n, n')$ où l'un des nombres $n$ et $n'$ est de la même forme que $m$ par rapport au module 4.

De même, toute surface de degré $m$, déterminée par $\delta$ points doubles pouvant être pris arbitrairement et par $\frac{m}{6}(m^2+6m+11)-4\delta$ autres points simples donnés, peut être engendrée au moins d'une manière à l'aide de faisceaux projectifs d'ordres $n$ et $n'$, tels que la somme $n+n'$ soit égale à $m$ (ou à

(1) Voir *Bulletin*, $XIII_2$, p. 35.

$m+1$, si $m$ est multiple de 4), quelques-unes des combinaisons $(n, n')$ devant être exclues comme impropres si $n$ ou $n'$ est de la même forme que $m$ par rapport au module 4.

M. de Jonquières donne le détail des opérations qu'il faut faire pour trouver le plus grand nombre $\delta$ que comporte le système $(n, n')$ adopté pour la génération de la surface considérée. Appliquant sa méthode à la surface du dix-septième ordre, il trouve que le maximum absolu de nombre des points doubles qu'il est permis de lui attribuer arbitrairement est 82.

## *Rouché.* — Sur un problème relatif à la durée du jeu. (47-49).

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux soit ruiné. A et B sont leurs fortunes primitives, $a$ et $b$ leurs mises à chaque partie, $p$ et $q=1-p$ leurs probabilités respectives de gagner une quelconque des parties.

On promet à Jean, qui ne joue pas, 1 franc par partie jouée. Quelle est la valeur vénale V de la promesse qui lui est faite?

M. Bertrand a montré que si le jeu est équitable, on a $V = AB$, $a$ et $b$ étant supposées égales à 1. Si le jeu n'est point équitable, on appellera *avantage de Pierre à chaque partie* la quantité $(a+b)p-a$, et *avantage total* de Pierre la quantité $(A+B)P-A$, P désignant la probabilité pour que Pierre ruine Paul. Alors la valeur vénale de la promesse faite à Jean est égale au rapport de l'avantage total de l'un quelconque des joueurs à l'avantage du même joueur dans chaque partie.

## *Bertrand.* — Démonstration du théorème précédent. (49-51).

## *Kœnigs.* — Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques et, en particulier, de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques. (51-54).

Toute surface réglée peut être représentée par des équations de la forme

$$\rho x_i = g_i(\lambda) + h_i(\lambda)\mu \qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

les courbes $\mu = \text{const.}$ étant les lignes asymptotiques de la surface. Les fonctions $g_i$, $h_i$ sont liées par certaines relations nécessaires et suffisantes que M. Kœnigs établit et qui le conduisent à cette représentation générale des surfaces réglées rapportées à leurs lignes asymptotiques :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \rho x_i = h_i\mu + \frac{u'}{30V}h''_i + \left[2P_1\frac{u'}{30V} - \left(\frac{u'}{30V}\right)'\right]h'_i \\ + \left[(3P_2 - 2P'_1 - 2P_1^2)\frac{u'}{30V} - P_1\left(\frac{u'}{30V}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{u'}{30V}\right)'' - u\right]h_i. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ et $u$ sont des fonctions arbitraires de $\lambda$; leurs dérivées par rapport à ce paramètre sont désignées par des accents. Les quatre fonctions $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ vérifient une équation du quatrième ordre facile à former quand on connaît ces fonctions,

$$h^{\text{IV}} + 4P_1h''' + 6P_2h'' + 4P_3h' + P_4h = 0.$$

et qui fait connaître les coefficients $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. Enfin V est l'invariant de M. Halphen

$$30\,V = -P''_1 + 3P'_2 - 6P_1P'_1 - 2P_3 + 6P_1P_2 - 4P_1^3.$$

La formule est en défaut quand $V = 0$; elle doit alors être remplacée par celle-ci

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho x_i &= h_i\mu + uh''_i + (2P_1u - u')h'_i \\ &\quad + \left[(3P_2 - 2P'_1 - 2P_1^2)u - P_1u' + \frac{1}{2}u'' + \alpha\right]h_i, \end{aligned} \right.$$

$\alpha$ étant une constante.

Si, pour $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ et $u$, on prend des fonctions algébriques quelconques, les formules précédentes font connaître sous forme explicite toutes les surfaces réglées dont les asymptotiques sont algébriques.

Elles fournissent aussi, sans exiger d'intégration, la solution générale de ce problème : Une courbe $(h)$ étant donnée, trouver une courbe $(g)$ correspondant point par point à $(h)$, de sorte que le plan osculateur en un point M de $(h)$ passe au point correspondant M' de $(g)$ et que le plan osculateur de $(g)$ en M' passe aussi par M.

## *Demartres.* — Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement une suite de cercles. (54-57).

L'auteur fait connaître l'équation de tous les systèmes de courbes qui, sur une surface cerclée, divisent homographiquement les génératrices circulaires. Il existe une infinité de pareils systèmes dont la détermination dépend de trois fonctions arbitraires d'un paramètre.

Sur toute surface cerclée, il existe trois (et seulement trois) systèmes doubles de courbes orthogonales, telles que les lignes de chaque famille divisent homographiquement les géneratrices circulaires. Chacun de ces systèmes correspond à un couple de *sécantes focales* opposées.

A ce théorème, M. Demartres en ajoute quelques autres :

1° Pour que les lignes de distance nulle divisent homographiquement les génératrices circulaires, il faut et il suffit que la surface soit enveloppe de sphères ou à focale isotrope.

2° Sur les surfaces à focale isotrope et sur les enveloppes de sphères, les génératrices sont divisées homographiquement par toute famille de courbes telles que l'inclinaison sur la génératrice reste constante le long de celle-ci, cette inclinaison pouvant d'ailleurs varier suivant une loi quelconque d'une génératrice à une autre.

3° Pour qu'une surface à focale isotrope soit divisée homographiquement par ses deux systèmes de lignes de courbure, il faut et il suffit que cette surface soit anallagmatique.

## *Picard.* — Remarques sur les groupes de transformations relatifs à certaines équations différentielles. (118-120).

Soit une équation différentielle

$$y'' = \varphi(y, y'),$$

où ne figure pas la variable indépendante, et dont l'intégrale générale soit

$$y = f(x, C).$$

Désignant par Y une intégrale obtenue en remplaçant $x$ par $x+h$ et C par $C+k$, on pourra mettre Y et Y' sous la forme

$$(E)\qquad \begin{cases} Y = F(h, k, y, y'), \\ Y' = F_1(h, k, y, y'). \end{cases}$$

Relativement à $y$ et $y'$, les équations (E) définissent un groupe continu de transformations à deux paramètres $h$ et $k$; la transformation infinitésimale relativement à l'accroissement $\delta h$ de $h$ est

$$(S_1)\qquad \begin{cases} \delta y = y'\,\delta h, \\ \delta y' = \varphi(y, y')\,\delta h. \end{cases}$$

Cela posé, on suppose que l'équation différentielle proposée admette un groupe (E) de transformations avec les deux paramètres $h$ et $k$, et que la transformation infinitésimale correspondant à $h$ soit précisément $(S_1)$. Soit

$$\delta y = X(y, y')\,\delta k,$$
$$\delta y' = Y(y, y')\,\delta k$$

l'autre transformation infinitésimale. On conclut de là que le groupe de transformations considéré est *permutable;* X et Y sont assujettis seulement à vérifier les équations

$$y'\frac{\partial X}{\partial y} + \varphi\frac{\partial X}{\partial y'} = Y,$$

$$y'\frac{\partial Y}{\partial y} + \varphi\frac{\partial Y}{\partial y'} = X\frac{\partial \varphi}{\partial y} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y'}.$$

Si l'on connaît un système de fonctions X, Y de $y$, $y'$ satisfaisant à ces deux équations (et différent de $y'$, $\varphi$), on pourra exprimer $x$ et C par des intégrales de différentielles totales en $y$, $y'$.

*Lucas* (*F.*). — Généralisation du théorème de Rolle. (121-122).

*Riemann* (*J.*). — Sur une généralisation du principe de Dirichlet. (123-125).

Soit S une aire plane dont le contour $s$ est formé extérieurement par une ligne fermée simple et intérieurement par $n-1$ lignes fermées simples. On marque sur $s$ un nombre limité de points A (points singuliers du contour). Cela posé, il existe une fonction $U(x, y)$ possédant les trois propriétés suivantes :

1° Elle est harmonique dans S (c'est-à-dire uniforme, continue, douée de dé-

rivées partielles des deux premiers ordres également uniformes et continues, vérifiant l'équation $\Delta V = 0$).

2° Elle prend en chaque point non singulier de $s$ une valeur donnée, mais assujettie à varier d'une manière continue tant qu'on ne rencontre aucun point singulier; en outre, cette valeur tend vers une limite quand on s'approche d'un point singulier A en marchant dans le sens positif, et vers une autre limite quand on s'en approche dans le sens négatif.

3° Elle conserve une valeur finie dans le voisinage d'un point singulier A.

Il resterait à prouver qu'il n'existe qu'une seule fonction possédant ces trois propriétés.

M. Riemann se borne à faire observer que cette proposition cesse d'être vraie quand on fait abstraction de la troisième propriété.

*Bertrand.* — Sur la loi de probabilité des erreurs d'observation. (153-156).

Gauss a proposé, pour représenter la probabilité d'une erreur fortuite comprise entre $z$ et $z + dz$, la formule

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz.$$

Cette formule est liée à la règle qui prescrit de prendre la moyenne. Si l'on admettait une autre loi pour la probabilité des erreurs, il faudrait adopter une autre règle pour déduire d'une série de mesures la valeur la plus probable d'une grandeur inconnue.

La réciproque n'est pas vraie. Si l'on se donne *a priori* la formule qui lie la valeur la plus probable aux mesures directes, on trouvera dans la plupart des cas qu'aucune loi de probabilité des erreurs ne peut la justifier.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs observées d'une certaine grandeur; si l'on suppose que la probabilité d'une erreur soit proportionnelle à une fonction de cette erreur, et que la valeur la plus probable $z$ soit une fonction déterminée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + \psi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n).$$

A chaque valeur de la fonction $\psi$ correspondra une loi pour la probabilité des erreurs.

Le choix de $\psi$ se trouvera très restreint, si l'on ajoute la condition que $\psi$ soit symétrique par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

*De Jonquières.* — Sur un trait caractéristique de dissemblance entre les surfaces et les courbes algébriques, d'où dépendent les limites respectives des nombres de points doubles (ou, plus généralement, de points multiples d'ordre $r$) qu'il est permis de leur attribuer arbitrairement. (156-162).

Dans une Note précédente, l'auteur avait admis que, pour une surface algébrique (comme pour une courbe), le degré de l'*adjointe* ne pouvait être que zéro, un ou deux. Ayant reconnu que ce degré peut recevoir toutes les valeurs entières et positives, M. de Jonquières remarque qu'il en résulte pour les surfaces un avantage sur les courbes : c'est qu'on obtient le nombre maximum des

points doubles qu'on peut leur attribuer arbitrairement par une formule très simple qui dérive immédiatement des seules données du problème.

Il est amené à rectifier sur ce point de la manière suivante les conclusions de la Note précitée.

Le nombre maximum des points doubles qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface algébrique de degré $m > 4$, dont la détermination est complétée par des points simples donnés, est égal à la partie entière du nombre

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-6}{24}.$$

Plus généralement, le nombre maximum des points multiples d'ordre $r$ qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une surface d'ordre $m$, est égal à la partie entière du nombre

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)-6}{r(r+1)(r+2)}.$$

*Lelieuvre.* — Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces. (183-186).

M. Fuchs a fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle du premier ordre

$$F(y, y', x) = 0,$$

dans laquelle F est un polynôme entier en $y$ et $y'$, admette une intégrale générale n'ayant que des points critiques fixes; et M. Poincaré a montré que l'intégration revient, en général, à des opérations purement algébriques (à des quadratures, si le genre de la relation entre $y$ et $y'$ est un; à une équation de Riccati, si ce genre est zéro).

M. Lelieuvre applique ces résultats à la recherche des lignes asymptotiques et des lignes de courbure des surfaces. Étant donné sur une surface un système de coordonnées $\alpha$, $\beta$, il indique, dans des cas fort étendus, les conditions pour que l'équation différentielle en $\alpha$, $\beta$ des lignes de courbure et des lignes asymptotiques satisfasse aux conditions trouvées par M. Fuchs. Comme on connaît alors une de ces lignes sans intégration, on pourra généralement obtenir l'intégrale par des quadratures ou des opérations algébriques.

Par exemple, si $\beta$ est fonction rationnelle de $x$, $y$, $z$, il faut et il suffit que les points de rebroussement des lignes étudiées et leurs points de contact avec des lignes $\alpha =$ const. soient distribués le long de certaines lignes $\alpha =$ const.

Dans le cas particulier des surfaces réglées non développables, les conditions cherchées sont les suivantes :

1° Ou bien le cône des tangentes asymptotiques le long des génératrices est de révolution.

2° Ou bien le cône est tangent au cône isotrope et la surface admet deux génératrices rectilignes isotropes, ou une directrice isotrope et une trajectoire orthogonale minima de génératrices, ou deux de ces trajectoires. Les surfaces contenues dans ce groupe sont imaginaires, sauf les quadriques.

3° Ou bien la surface admet quatre directrices isotropes, ou trois directrices rectilignes isotropes et une trajectoire minima, ou deux droites isotropes et deux trajectoires. Ce groupe ne contient que les surfaces du second degré.






*Lerch.* — Sur une formule d'Arithmétique. (186-187).

Si l'on désigne par $\psi(p, q)$ le nombre des diviseurs de $p$ supérieurs à $q$, on a la formule

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \psi(m+\lambda, \lambda-1) = k+m;$$

d'où l'on déduit aisément ces deux-ci

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \psi(m-\alpha, \alpha) = 0, \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \psi(m+\alpha, \alpha) = 2m,$$

dont la première ne diffère que par la forme d'une formule de M. Catalan.

*Goursat.* — Sur les systèmes d'équations linéaires qui sont identiques à leur adjoint. (187-190).

Pour qu'un système d'équations linéaires du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2 + \ldots + A_{in}y_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les A sont des fonctions quelconques de $x$, soit identique à son adjoint

$$\frac{du_i}{dx} = -A_{1i}u_1 - A_{2i}u_2 - \ldots - A_{ni}u_n,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$A_{ii} = 0 \qquad \text{et} \qquad A_{ik} + A_{ki} = 0.$$

Les propriétés d'un pareil système, déjà étudiées par M. Darboux (*Théorie des surfaces*) dans le cas de $n = 3$, appartiennent au cas où $n$ est quelconque.

D'abord entre deux solutions quelconques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ du système (1) on a la relation

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \text{const.}$$

En particulier

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = \text{const.},$$

et cette dernière propriété caractérise les systèmes en question. De là résulte ainsi que, connaissant $n-1$ solutions linéairement indépendantes, on en conclut immédiatement l'intégrale générale.

Si l'on connaît une solution du système (1), on pourra transformer ce système en un autre encore identique à son adjoint, mais d'ordre inférieur d'une unité.

De ces principes généraux l'auteur déduit que, dans le cas de $n = 4$, l'intégration du système (1) peut toujours se ramener à celle de deux équations de Riccati.

*D'Ocagne.* — Sur la détermination du chiffre qui, dans la suite naturelle des nombres, occupe un rang donné. (190-191).

Si l'on pose

$$(1|1)=1, \quad (2|1)=11, \quad (3|1)=111, \quad \ldots, \quad (n|1)=11\ldots1,$$
$$\mathfrak{N}(1)=189, \quad \mathfrak{N}(2)=2889, \quad \mathfrak{N}(3)=38889, \quad \ldots, \quad \mathfrak{N}(p)=p88\ldots89,$$

on pourra formuler la règle suivante pour déterminer le chiffre qui occupe le rang $k$ dans la suite naturelle des nombres :

On détermine le nombre $n$ tel que

$$\mathfrak{N}(n-2) < k \leqq \mathfrak{N}(n-1),$$

puis on effectue la division de $k+(n|1)$ par $n$. Soient Q le quotient, R le reste.

Si R n'est pas nul, le chiffre cherché est le R^ième, à partir de la gauche, du nombre $\varphi$. Si R est nul, le chiffre cherché est le premier (à partir de la droite) du nombre $\varphi - 1$.

*Tisserand.* — Remarque à l'occasion d'une Communication de M. J. Bertrand. (231-232).

Dans une Note relative à la loi de probabilité des erreurs, M. Bertrand avait indiqué la question suivante :

« Déterminer la fonction $\psi(x_1-x_2, x_1-x_3, \ldots, x_1-x_n)$, de manière que cette fonction soit symétrique par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. »

M. Tisserand donne la réponse à cette question. Si $\varphi$ est une fonction symétrique quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on aura

$$\psi = \varphi\left(x_1 - \frac{\Sigma x_i}{n}, x_2 - \frac{\Sigma x_i}{n}, \ldots, x_n - \frac{\Sigma x_i}{n}\right).$$

Dans le cas où $\varphi$ est rationnelle, cette formule se réduit à

$$\psi = \Phi(\Sigma y_1 y_2, \Sigma y_1 y_2 y_3, \ldots, \Sigma y_1 y_2 \ldots y_n),$$

$y_1, y_2, \ldots$ désignant les écarts avec la moyenne $x_i - \frac{\Sigma x_i}{n}, \ldots$.

*Bertrand.* — Probabilité du tir à la cible. (232-234).

On a toujours admis, en étudiant la probabilité du tir à la cible, le principe suivant :

Si par le centre de la cible on fait passer deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, la probabilité pour que l'abscisse du point frappé soit comprise entre $x$ et $x+dx$ étant désignée par $\varphi(x)\,dx$ et celle pour que l'ordonnée soit comprise entre $y$ et $y+dy$, par $\psi(y)\,dy$, on représente par $\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy$ la probabilité pour que le point frappé se trouve dans le rectangle $dx\,dy$ de coordonnées $x$ et $y$.

Ce principe est fort contestable, et M. Bertrand indique quelques expériences

à faire pour en vérifier l'exactitude. Au cas où ces expériences donneraient tort au principe admis jusqu'ici, M. Bertrand en propose un autre :

La probabilité pour que la balle frappe dans un élément $\rho\, d\rho\, d\omega$ serait, en désignant par $k$ une fonction de $\omega$,

$$\frac{k^2}{\pi} e^{-k^2\rho^2} \rho\, d\omega\, d\rho,$$

ou, en posant $k\rho = G$,

$$\frac{1}{\pi} e^{G^2} G\, dG\, d\omega.$$

Si donc on trace la série des courbes semblables $G = \text{const.}$, le nombre des balles ayant frappé la cible au dehors de l'une de ces courbes devra décroître en progression géométrique quand la surface augmentera en progression arithmétique.

## *De Jonquières.* — Sur quelques notions, principes et formules, qui interviennent dans plusieurs questions concernant les courbes et les surfaces algébriques. (234-241).

## *Rouché.* — Sur la durée du jeu. (253-256).

« Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun $n$ francs avant d'entrer au jeu ; à chaque partie le perdant donne $1^{fr}$ au gagnant et le jeu ne cesse que lorsque l'un quelconque des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie du rang assigné ? »

Réponse :

$$P = \frac{1 + (-1)^{\mu-n}}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{n}\cos^{\mu-2}\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{3\pi}{n}\cos^{\mu-2}\frac{3\pi}{2n} + \ldots + (-1)^{r-1}\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}\cos^{\mu-r}\frac{(2r-1)\pi}{2n}\right],$$

$r$ désignant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}n$.

## *Voyer.* — Sur un problème du Calcul des probabilités. (256-257).

« Une urne contient $a$ boules blanches, $m - a$ boules noires. Un joueur tire ces boules une à une jusqu'à ce qu'il ait amené $p$ boules blanches. Il reçoit $1^{fr}$ par boule tirée ; quelle est son espérance mathématique ? »

Réponse :

$$p\,\frac{m+1}{a+1}.$$

## *Humbert.* — Sur les lignes de courbure des cyclides. (257-259).

M. Darboux a montré qu'on peut déterminer les lignes de courbure de toute surface du quatrième degré, à conique double, quand on prend pour *absolu* (Cayley) une quelconque des quadriques inscrites dans cette surface.

M. Humbert établit que les lignes de courbure considérées restent les mêmes, quelle que soit la quadrique inscrite prise pour absolu. En particulier, les lignes de courbure d'une cyclide par rapport à une quadrique inscrite quelconque coïncideront avec les lignes de courbure ordinaires.

Le théorème s'applique aux surfaces du troisième ordre. Leurs lignes de courbure ne changent pas quand on prend successivement pour absolu chacune des coniques de l'un des vingt-sept systèmes situés sur la surface.

La méthode des polaires réciproques conduit à cette transformation du premier théorème : la surface de quatrième classe et de douzième ordre, doublement inscrite dans un cône du deuxième degré, est coupée par toute quadrique inscrite suivant la courbe de contact, qui est du quatrième ordre, et suivant une autre courbe du seizième. Ces courbes du seizième ordre constituent le système des lignes de courbure de la surface quand on prend pour absolu une quadrique inscrite quelconque.

En particulier, si la surface de quatrième classe admet le cercle à l'infini comme ligne double, les lignes précédentes deviennent des lignes de courbure ordinaires, dont on a ainsi une détermination géométrique très simple.

*Hadamard.* — Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. (259-262).

Étant donnée une série entière

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

on demande de déterminer son cercle de convergence, si elle en a un.

Dans le cas où le module de $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ ou de $\sqrt[m]{a_m}$ a une limite, le rayon de convergence est égal à l'inverse de cette limite (Lecornu).

M. Hadamard résout le problème dans tous les cas. Il montre ensuite, plus rigoureusement que ne l'avait fait M. Lecornu et en faisant une hypothèse sur la manière dont le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tend vers sa limite quand il en a une, que cette limite est l'affixe du point singulier de la fonction $\varphi(x)$ représentée par la série entière.

*Autonne.* — Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre. (262-265).

M. Autonne développe la méthode fondée sur l'emploi des substitutions quadratiques crémoniennes, qu'il a indiquée pour l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre dans les *Comptes rendus* de l'année précédente, et il applique cette méthode à quelques cas très étendus.

*Pincherle.* — Sur une généralisation des fonctions eulériennes. (265-268).

Si l'on pose

$$\chi(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{k_n t^n}{n!},$$

et qu'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $m$ constantes ayant leur partie réelle positive, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\chi(t)\, t^z e^{-xt}\, dt}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m} (1 - e^{-\alpha_\nu t})}$$

représente une fonction analytique $(-1)^z \varphi^{(z)}(x)$ pour toute valeur de $z$ dont la partie réelle est égale ou supérieure à $m$ et pour toute valeur de $x$ dont la partie réelle est plus grande que le rayon de convergence de la série $\Sigma k_n x^n$.

M. Pincherle fait connaître les principales propriétés de cette fonction qui a la plus grande analogie avec la fonction O qu'a étudiée M. Appell dans son Mémoire *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes* (*Math. Annalen*, t. XIX).

Le cas particulier le plus intéressant s'obtient en faisant $\chi(t) = 1$. Les fonctions générales $\varphi^{(z)}(x)$ peuvent être développées en séries suivant les dérivées successives de la fonction qui correspond à ce cas particulier.

## *Lucas* (*F.*). — Résolution électrique des équations algébriques. (268-270).

L'auteur indique deux méthodes fondées sur l'emploi de l'électricité pour ramener la résolution d'une équation du degré $p$, $f(z) = 0$, à celle d'équations de degrés inférieurs à $p$.

On prendra la fonction primitive $F(z)$ de $f(z)$ sans terme constant, et, séparant les termes de degré pair des termes de degré impair, on obtiendra en égalant ces derniers à o une équation

$$\psi(z^2) = 0,$$

de degré $\frac{p-1}{2}$ ou $\frac{p}{2}$ suivant que $p$ est pair ou impair. Soit $\lambda^2$ une de ses racines; l'équation

$$F(z) - \varphi(\lambda^2) = 0$$

est du degré $p+1$; mais, connaissant déjà les deux racines $+\lambda$ et $-\lambda$, on est ramené à une équation du degré $p-1$. Les points racines de l'équation proposée $f(z) = 0$ sont les points nodaux des courbes équipotentielles du système des $p+1$ points racines de l'équation précédente. On pourra donc, comme l'auteur l'a déjà indiqué, les obtenir soit par la méthode d'exploration galvanométrique de Kirchhoff, soit par la méthode électrochimique de M. Guébhard.

Après cette méthode, M. F. Lucas en expose une moins simple, qui repose sur l'intersection de deux lignes équipotentielles distinctes qui ne se coupent pas orthogonalement, et qui introduit des points parasites dont il faut faire le décompte.

## *Rouché*. — Sur la durée du jeu. (338-340).

L'auteur indique une formule plus simple que celle qu'il a donnée dans sa Communication précédente (*Comptes rendus*, p. 265) pour représenter la probabilité P que le jeu se termine par la ruine totale d'un des joueurs après une partie d'un rang assigné $\mu$ (chaque joueur possédant $n$ francs avant d'entrer

au jeu, et le perdant donnant chaque fois 1fr au gagnant). La nouvelle formule, proposée par M. Rouché, est

$$P = \frac{1 + (-1)^{\mu-n}}{2^{\mu}} \frac{n\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{\mu - n}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{\mu + n}{2} + 1\right)}.$$

## *Demartres.* — Sur la surface engendrée par une conique doublement sécante à une conique fixe. (340-342).

Les propriétés projectives des surfaces cerclées s'étendent immédiatement aux surfaces engendrées par une conique doublement sécante à une conique fixe. Parmi ces propriétés, les unes appartiennent aux lignes conjuguées des génératrices, les autres aux lignes asymptotiques.

Il existe trois sortes de surfaces dont les génératrices coniques sont divisées homographiquement par les lignes conjuguées. Ce sont :

1° L'enveloppe d'une quadrique passant par une conique et assujettie à trois conditions complémentaires ;

2° Les surfaces pour lesquelles la conique fixe se réduit à deux points (les lignes conjuguées s'obtiennent alors par une quadrature) ;

3° Celles dont la génératrice reste tangente à une courbe fixe dans le plan osculateur de cette courbe (les lignes conjuguées s'obtiennent sans intégration).

Ces trois classes de surfaces comprennent toutes celles pour lesquelles les deux séries de lignes asymptotiques divisent homographiquement les génératrices. La recherche de ces lignes s'achève sans difficulté dans les trois cas.

M. Demartres développe les calculs dans le deuxième cas et il démontre en terminant ce théorème, qui donne comme cas particulier une propriété importante des quadriques :

Lorsqu'une surface est le lieu d'une conique passant par deux points fixes, si ces deux points sont des points ordinaires de la surface, les coniques génératrices sont divisées homographiquement et par leurs lignes conjuguées et par chaque série de lignes asymptotiques.

## *Fouret.* — Sur quelques propriétés géométriques des stelloïdes. (342-345).

L'auteur énonce un grand nombre de propriétés des courbes que M. F. Lucas (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 195) a appelées stelloïdes et qui sont les trajectoires orthogonales des cassinoïdes homofocales les plus générales. Les stelloïdes du premier degré sont des droites, celles du deuxième degré sont des hyperboles équilatères ; celles du degré $p$ ont $p$ asymptotes réelles formant une rose des vents. La plupart des théorèmes énoncés par M. Fouret au sujet de ces stelloïdes sont des généralisations des propriétés bien connues de l'hyperbole équilatère.

## *Carvallo.* — Formules d'interpolation. (346-349).

Quand on veut déterminer les coefficients $a$, $b$, $c$, ... de la formule

$$y = au + bv + cw + \ldots$$

dans laquelle des systèmes de valeurs simultanées des variables $y$, $u$, $v$, $w$, ... peuvent être déterminés expérimentalement, on emploie habituellement la méthode de Cauchy ou celle des moindres carrés. La seconde est seule d'accord avec le Calcul des probabilités; cependant la première loi est souvent préférée pour certains avantages pratiques. M. Carvallo montre comment on peut conserver tous ces avantages en adoptant la même marche de calcul pour la méthode des moindres carrés.

## *Bertrand.* — Seconde Note sur la probabilité du tir à la cible. (388-389).

Après avoir cité divers auteurs, entre autres Bravais, qui déjà avaient signalé l'impossibilité d'accepter l'indépendance (admise par Poisson) des écarts horizontaux et verticaux, et après avoir critiqué les démonstrations de ces auteurs, M. Bertrand retrouve la formule de Bravais en partant de cette hypothèse très plausible de Cotes :

Si l'on connaît un nombre quelconque de points où la cible a été frappée, la position la plus probable du point visé est le centre de gravité du système des points atteints.

La probabilité que la balle frappe un élément $dx\,dy$ est alors

$$\frac{\sqrt{k^2k'^2-\lambda^2}}{\pi}e^{-k^2x^2-2\lambda xy-k'^2y^2}\,dx\,dy.$$

Les trois constantes caractéristiques d'une série d'épreuves $k$, $k'$, $\lambda$ peuvent se déduire des coordonnées $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, ... des points atteints par rapport à deux axes arbitraires à l'aide des équations

$$\frac{k'^2}{2(k^2k'^2-\lambda^2)}=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n},$$
$$\frac{k^2}{2(k^2k'^2-\lambda^2)}=\frac{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}{n},$$
$$\frac{\lambda}{2(k^2k'^3-\lambda^2)}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{n}.$$

Les courbes d'égale probabilité sont les ellipses

$$k^2x^2+2\lambda xy+k'^2y^2=\text{const.}$$

La quantité $\dfrac{1}{2\sqrt{k^2k'^2-\lambda^2}}$ proportionnelle à la surface de l'ellipse dans laquelle il y a probabilité donnée pour que la balle vienne se loger peut servir de mesure à la précision d'une arme supposée sans défaut. Entre deux coups, le meilleur est celui pour lequel la somme

$$k^2x^2+2\lambda xy+k'^2y^2$$

a la plus petite valeur.

## *Sylvester.* — Sur les nombres parfaits. (403-505).

On ignore s'il existe des nombres parfaits impairs. M. Servais a montré (*Mathesis*, 1887) qu'un nombre parfait (s'il en existe) qui ne contient que trois

facteurs premiers distincts est divisible par 3 et par 5. M. Sylvester démontre qu'un pareil nombre ne peut exister, au moyen d'un raisonnement analogue à celui qui lui a fourni la démonstration de ce théorème, qu'il n'existe pas de nombre parfait qui contienne moins de six facteurs premiers distincts.

En ce qui concerne les nombres parfaits pairs, M. Sylvester rappelle qu'Euclide a fait voir que $2^n(2^{n+1}-1)$, où $2^{n+1}-1$ est premier, est un nombre parfait, et qu'Euler a donné la seule preuve actuellement connue de la proposition réciproque : il n'existe pas d'autres nombres parfaits pairs que ceux d'Euclide.

## *Robin.* — Distribution de l'électricité induite par des charges fixes sur une surface fermée convexe. (413-416).

Si l'on répartit sur une surface fermée convexe une couche simple de densité finie *quelconque* $f$, et qu'on forme les intégrales

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma, \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f_1\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma, \qquad \ldots,$$

où $r$ désigne le rayon vecteur qui va d'un point de la surface aux divers éléments $d\sigma$, et $\varphi$ l'angle de ce rayon vecteur avec la normale intérieure de ce point, ces intégrales tendent vers la valeur de la densité de la couche électrique en équilibre d'elle-même sur $\sigma$.

Si maintenant le conducteur $\sigma$ est soumis à l'influence de charges fixes extérieures (dont la somme algébrique est nulle) et si $f$ désigne la composante normale des actions que ces charges exercent en un point de la surface, la densité électrique induite en ce point est donnée par la série

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}(f + f_1 + f_3 + \ldots).$$

Cette formule donne la solution immédiate de ce problème :

« Déterminer une fonction V continue, ainsi que ses dérivées premières, à l'intérieur de $\sigma$, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, et dont la dérivée suivant la normale intérieure est assujettie à prendre en chaque point de $\sigma$ une valeur donnée. »

## *Bertrand.* — Sur la détermination de la précision d'un système de mesures. (440-443).

Si l'on accepte la formule qui suppose la probabilité d'une erreur $z$ proportionnelle à $e^{-k^2z^2}$, la constante $k$ mesure la précision. En égalant, lorsque les erreurs sont connues, la valeur calculée à celle que donne le hasard, on obtient une équation qui détermine $k$.

Au lieu de choisir, comme l'a fait Gauss, entre toutes les équations ainsi obtenues directement celle qui laisse craindre la plus petite erreur, M. Bertrand détermine l'équation elle-même par la condition que cette erreur soit rendue minima. Il est alors conduit à substituer aux formules classiques

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} = \frac{S_1}{n}, \qquad \frac{1}{2k^3} = \frac{S_2}{n}$$

les formules nouvelles

$$\frac{1}{k\sqrt{\pi}} \; \frac{S_2}{n+\frac{\pi}{2}-1}, \qquad \frac{1}{2k^2}=\frac{S_2}{n+2},$$

où $n$ désigne le nombre des observations, $S_1$ la somme des erreurs, $S_2$ la somme de leurs carrés.

Ces formules supposent les erreurs encore inconnues. Lorsqu'elles sont connues, les valeurs moyennes de $k$ et de $k^2$ sont

$$k=\frac{1}{\sqrt{S_2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \qquad k^2=\frac{1}{S_2}\,\frac{n+1}{2}.$$

*Sylvester.* — Sur une classe spéciale de diviseurs de la somme d'une série géométrique. (446-450).

En l'honneur de Fermat, M. Sylvester appelle *fermatien* de base $\theta$ et d'indice $m$ la fonction $\theta^m-1$, où $m$ est un entier positif et $\theta$ un entier quelconque, et *fermatien réduit* la fonction $\frac{\theta^m-1}{\theta-1}$.

Il montre qu'un *fermatien réduit* à indice impair, dont le dénominateur est divisible par chaque facteur premier de son indice, est lui-même divisible par cet indice, et que le quotient de la division de ces deux quantités est premier relativement à l'indice.

C'est dans les recherches sur la possibilité de l'existence de nombres parfaits autres que ceux d'Euclide que se rencontre la théorie des fermatiens réduits. Comme application de cette théorie, M. Sylvester fait voir qu'il ne peut exister de nombre parfait de la forme $3N\pm1$ et composé de sept facteurs premiers.

*Vicaire.* — Sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum. (456-459).

*Brunel.* — Sur les racines des matrices zéroïdales. (467-470).

La matrice

$$\underset{n}{(\mathrm{M})} = \left|\begin{array}{cccc} (a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}) \\ (a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}) \end{array}\right|$$

devient la matrice zéroïdale $\underset{n}{(0)}$ lorsque tous les éléments $a$ sont égaux à zéro.

Si l'on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de la matrice zéroïdale la matrice qui satisfait à l'équation

$$\underset{n}{(\mathrm{M})}^n = \underset{n}{(0)},$$

les éléments $a$ de cette matrice doivent seulement remplir les $n$ conditions obtenues en égalant à zéro les coefficients des puissances $(n-1)$, $(n-2)$, ..., o de la matrice $\underset{|\ |_n}{(M)}$ dans l'équation identique bien connue à laquelle satisfait cette dernière.

On peut exprimer les $n^2$ quantités $a$, assujetties aux conditions prescrites au moyen de $n(n-1)$ quantités $c$ par des formules que donne M. Brunel. La substitution dans la matrice cherchée des valeurs des éléments $a$ ainsi déterminés conduit à une expression de cette matrice, d'où résulte cette conséquence :

La racine $n^{\text{ième}}$ de la matrice zéroïdale peut être considérée comme fonction linéaire de $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices dont les éléments contiennent $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités $c$ que M. Brunel appelle constantes *intérieures;* les $\frac{n(n-1)}{2}$ autres quantités $c$ (constantes extérieures) se présentent comme coefficients de la fonction linéaire.

Les matrices constituantes jouissent de propriétés remarquables :

Elles sont linéairement indépendantes.

Des $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ produits deux à deux de ces $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices, il n'y en a que $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ qui diffèrent de la matrice zéroïdale.

On peut enfin déterminer les conditions que doivent remplir les constantes extérieures, pour que ce soit une puissance de $\underset{|\ |_n}{(M)}$ inférieure à $n$ qui produise la matrice zéroïdale.

## *Poulain.* — Théorème sur les équations algébriques et les fonctions quadratiques. (470-473).

Newton (ou plutôt Campbell) a énoncé cette règle pour reconnaître l'existence des racines imaginaires dans les équations algébriques :

Étant donnée l'équation numérique

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_r x^{m-r} + \ldots + A_m = 0,$$

si l'on pose

$$r' = m - r,$$

$$\lambda_r = \frac{rr'}{(r+1)(r'+1)},$$

$$B_r = \lambda_r A_r^2 - A_{r-1} A_{r+1},$$

et si l'on écrit la suite des signes que prend la fonction quadratique $B_r$ pour $r = 0, 1, 2, \ldots, m$, l'équation a au moins autant de racines imaginaires qu'il y a de variations dans cette suite.

M. Poulain fait remarquer que cette règle subsiste : 1° si dans les fonctions quadratiques on supprime les $\lambda$ et, plus généralement, si l'on divise chaque facteur $\lambda$ par $\lambda^n$; ou 2° si l'on multiplie les $\lambda$ successifs par $1+\frac{1}{q}$, $1+\frac{1}{q+1}$, $1+\frac{1}{q+2}$, ou par une puissance $n$ de ces nombres; ou 3° si l'on multiplie tous les $\lambda$ par un même facteur arbitraire K positif et supérieur à 1.

L'auteur énonce encore deux théorèmes indépendants de la loi de Newton : Le nombre des racines positives d'une équation et celui des racines négatives n'augmentent pas quand on multiplie respectivement les coefficients par 1, $\frac{p}{q}, \frac{p(p+1)}{q(q+1)}, \ldots$ ($p$ et $q$ entiers, $p > q$). Ces nombres ne diminuent pas en général si l'on divise ces coefficients par 1, $\frac{m}{q}, \frac{m(m-1)}{q(q+1)}, \ldots (m > q)$.

*Painlevé.* — Sur la représentation conforme des polygones. (473-476).

Tous les polygones dont la représentation conforme sur le demi-plan s'effectue algébriquement se déduisent par une substitution linéaire des polygones obtenus en associant d'une manière quelconque les demi-faces sphériques des polyèdres réguliers inscrites dans la sphère.

On peut former tous ces polygones et, inversement, reconnaître si un polygone donné rentre dans la classe en question.

*Humbert.* — Sur quelques propriétés des aires sphériques. (477-479).

Dans une Note précédente, M. Humbert a fait connaître une formule simple pour la différence de deux aires découpées sur une sphère de rayon R par un cône. Cette formule, comme l'a fait remarquer à l'auteur M. Darboux, est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable : la différence en question est égale au produit du diamètre de la sphère par la distance de son centre au plan mené par le sommet du cône perpendiculairement à la droite qui joint les centres de gravité des deux aires que le cône découpe sur une sphère concentrique de rayon (*plan d'orientation*), et par le produit de l'angle conique multiplié par la distance de ces deux centres de gravité (*module du cône*).

Quand le cône se réduit à un trièdre, il existe une construction mécanique très simple du plan d'orientation et du module.

M. Humbert énonce un certain nombre de théorèmes analogues au précédent sur les aires découpées sur une sphère par une quadrique :

« 1° La différence des deux aires découpées par la quadrique sur une sphère est proportionnelle, quelle que soit la position relative des deux surfaces, à la distance du centre de la sphère à l'un des plans principaux de la quadrique; d'où il s'ensuit que cette différence ne varie pas quand on fait tourner la quadrique autour d'une parallèle à l'un de ses axes;

» 2° Les deux aires annulaires découpées sur une sphère par le solide compris entre deux quadriques homothétiques et concentriques sont égales;

» 3° La différence des deux aires que découpe sur une sphère un paraboloïde de révolution reste constante quand le paraboloïde se déplace d'une manière quelconque dans l'espace. »

*Bertrand.* — Troisième Note sur la probabilité du tir à la cible. (521-522).

*Sylvester.* — Sur l'impossibilité de l'existence d'un nombre par-

fait impair qui ne contient pas au moins cinq diviseurs premiers distincts. (522-526).

*De Jonquières.* — Construction géométrique de la surface du troisième ordre. Réflexions sur la génération des surfaces algébriques à l'aide de deux faisceaux projectifs. (526-529).

Construire la surface du troisième ordre déterminée par un quadrilatère gauche et sept points donnés.

Par le quadrilatère gauche et chacun des points on fera passer l'hyperboloïde à une nappe déterminé par ces conditions. On aura ainsi sept hyperboloïdes et, en les traversant par une droite arbitraire M, on y détachera sept segments en involution, d'où l'on conclura une série de rayons rectilignes ou de points correspondant anharmoniquement à ces segments, et, par suite, aux hyperboloïdes.

Il ne s'agit plus que de déterminer une droite L, axe ou base commune d'un faisceau de plans, de façon que les sept plans passant par L et par chacun des sept points correspondent anharmoniquement avec sept hyperboloïdes passant par les mêmes points, ce qu'on sait faire.

*Painlevé.* — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. (535-537).

Pour qu'une équation différentielle linéaire et homogène s'intègre algébriquement, il faut d'abord que ses coefficients soient algébriques. Cette condition étant remplie, on peut toujours reconnaître, par des opérations purement algébriques, si l'intégrale est algébrique, ou ramener l'équation à une quadrature.

*Brillouin.* — Déformations permanentes en Thermodynamique. (416-418, 482-485, 537-540, 589-592).

On n'a étudié jusqu'ici en Thermodynamique que les corps qui, soumis à un cycle de transformations, à la même température et aux mêmes forces qu'au début, reprennent leur forme initiale. S'il n'y a qu'une variable géométrique $x$ et une variable mécanique X, on suppose qu'il existe une relation finie

$$f(x, \mathrm{X}, \mathrm{T}) = 0,$$

entre ces éléments et la température.

L'observation des faits (déformation résiduelle, déplacement du zéro du thermomètre, etc.) montre que cette hypothèse est inadmissible dans le cas des solides. M. Brillouin la remplace par la suivante qui rend compte de tous les faits connus.

Il existe une équation linéaire entre $x$, X, T,

$$dx = a\,d\mathrm{X} + b\,d\mathrm{T}.$$

$a$, $b$ étant deux fonctions de $x$, X, T que l'expérience fera connaître. De cette hypothèse résulte que, quelle que soit la série des transformations, il y a une infinité de manières de fermer le cycle sans déformation permanente, et aussi de manière à produire une déformation permanente donnée.

La loi de M. Brillouin modifie et complique les équations de la Thermodynamique : si l'on désigne par J $dQ$ la quantité de chaleur absorbée par le corps et $-\mathrm{X}\,dx$ le travail des forces extérieures pendant la transformation $dx$, $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{T}$, le principe de l'équivalence s'exprime par la relation

$$\int_{x_0, \mathrm{X}_0, \mathrm{T}_0}^{x, \mathrm{X}, \mathrm{T}} (\mathrm{J}\,d\mathrm{Q} + \mathrm{X}\,dx) = \mathrm{U}(x, \mathrm{X}, \mathrm{T}) - \mathrm{U}_0,$$

d'où l'on déduit facilement les expressions des chaleurs spécifiques $\mathrm{C}_\mathrm{X}$, $\mathrm{C}_x$, et des chaleurs latentes. Par l'élimination de U, on obtiendra entre les deux chaleurs spécifiques et les deux coefficients de dilatation et d'élasticité, deux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à $x$, X, T.

Le cycle de Carnot le plus simple est formé de trois isothermiques et de trois adiabatiques. En le comparant à un cycle parcouru par un gaz parfait et lui appliquant le second principe, M. Brillouin trouve qu'on peut donner à la chaleur élémentaire l'expression

$$d\mathrm{Q} = \mathrm{TR}\,d\mathrm{S},$$

S et R étant deux fonctions de $x$, X, T, liées entre elles ainsi qu'à l'énergie par l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \mathrm{X}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{T}} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\right) + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{X}}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{T}}\right) + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{X}} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\right) = 0.$$

## *Bertrand.* — Sur la rigueur d'une démonstration de Gauss. (563-565).

Par un exemple particulier, où il calcule directement la probabilité de sortie d'une boule blanche donnée par une urne qui contient des boules noires et des boules blanches en nombre inconnu, mais qui a déjà donné $m_1$ boules blanches sur $\mu$ tirages, M. Bertrand met en défaut la fameuse loi de probabilité de Gauss $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2}$.

M. Bertrand estime que cette grave objection, sans nul doute aperçue par Gauss, a été la cause de ses efforts pour substituer une théorie nouvelle à celle qu'il avait d'abord établie.

## *Lucas (F.).* — Détermination électrique des lignes isodynamiques d'un polynôme quelconque. (587-589).

Les points racines d'un polynôme $\mathrm{F}(\mathrm{Z}) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ du degré $p$ étant assimilés à des points matériels de masse 1 qui repoussent un point quelconque N de masse 1 en raison inverse de la distance, l'auteur a nommé *lignes isodynamiques* les lieux géométriques du point N pour chacun desquels l'intensité de l'action totale reste constante. Ces lignes algébriques et du degré $2p$ ont pour équation

$$\frac{1}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{X}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathrm{Y}^2}{\partial y^2}\right) = \text{const.}$$

M. Lucas indique comment on peut se servir de l'électricité pour tracer les lignes isodynamiques d'un polynôme dont on connaît les points racines.

*Bertrand.* — Sur l'indétermination d'un problème résolu par Poisson. (636-638).

Pour traiter expérimentalement le problème de Saint-Pétersbourg, Buffon a jeté une pièce de monnaie en l'air 4040 fois; il a obtenu 2048 fois le côté face. Poisson a cherché la probabilité pour que la pièce présentât quelque défaut. Il a assimilé ce problème au suivant :

On a préparé un nombre immense d'urnes semblables contenant des boules blanches et des boules noires en proportion inconnue, tous les rapports entre les deux nombres étant représentés également. On choisit au hasard une de ces urnes; on y fait 4040 tirages, on obtient 2048 boules blanches et 1992 noires. Quelle est la probabilité que l'urne choisie contienne plus de blanches que de noires?

M. Bertrand montre que l'assimilation des deux problèmes n'est pas permise.

*Sylvester.* — Sur les nombres parfaits. (641-642).

*Lucas (F.).* — Résolution immédiate des équations au moyen de l'électricité. (645-648).

L'auteur indique comment l'électricité permet de résoudre immédiatement et sans calculs une équation algébrique $F(z) = 0$ de degré quelconque $p$ à coefficients numériques réels.

On prendra arbitrairement $p+1$ quantités réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ et l'on décomposera en éléments simples la fraction

$$\frac{F(z)}{\Pi(z-\lambda)} = \sum \frac{\mu}{z-\lambda}.$$

Connaissant les points $\lambda$ et les paramètres $\mu$, on fera arriver sur ces points les extrémités d'électrodes déversant sur le plan (conducteur) des $z$ des quantités d'électricité proportionnelles aux $\mu$. Les points nodaux des lignes équipotentielles seront les points racines de l'équation $F(z) = 0$.

La détermination des lignes équipotentielles et des points nodaux se fera soit au moyen du galvanomètre (méthode de Kirchhoff), soit par l'électrochimie (méthode de Guébhard).

*Méray.* — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sont dépourvus d'intégrales, contrairement à toute prévision. (648-651).

On admet habituellement qu'un système d'équations différentielles possède des intégrales dans tous les cas où il est possible d'en construire les développements par la série de Taylor. Mais cette proposition souffre de nombreuses exceptions.

Par exemple, si l'on cherche les fonctions $u$, $v$ de $x$, $y$ qui satisfont au sys-

tème

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = v + \mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = u + \mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial x},$$

H désignant une constante réelle positive, et aux conditions initiales

(2) $$u = y\,(\text{pour } x = 0), \qquad v = x\,(\text{pour } y = 0),$$

on reconnaît que, si ces fonctions existent, les équations (1) et (2) différentiées de toutes manières fournissent, en y faisant $x = y = 0$, les valeurs correspondantes de toutes les dérivées de $u$, $v$, et permettent ainsi de développer $u$, $v$ en séries de Maclaurin.

Pour $\mathrm{H} = 1$, ces fonctions existent et ont les expressions

$$u = \frac{(x+y)(\sin x + \cos y)}{\cos(x+y)}, \qquad v = \frac{(x+y)(\sin y + \cos x)}{\cos(x+y)},$$

développables en séries convergentes.

Elles existent *a fortiori* pour $\mathrm{H} < 1$. Mais pour $\mathrm{H} > 1$, elles cessent d'exister, ce que M. Méray montre en faisant voir que leur développement conduirait à des séries entières dont le rayon de convergence ne peut surpasser zéro.

## *Darboux.* — Remarque sur la Communication précédente (651-652).

M$^{me}$ de Kowalevsky a déjà signalé (*Journal de Crelle,* t. 80) un exemple analogue à celui qu'indique M. Méray. Si l'on cherche à déterminer la fonction qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

et qui se réduit à $\frac{1}{1-y}$ pour $x = 0$, on obtiendra la série

$$\sum \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{x^n}{(1-y)^{2n+1}},$$

divergente quelque petits que soient $x$ et $y$.

M. Darboux lui-même a étudié (Cours de 1888) les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

qui se réduisent à $f(x)$ pour $y = y_0$ et à $\varphi(y)$ pour $x = x_0$. La solution existe sous certaines conditions de continuité.

## *Bougaief.* — Sur une intégrale numérique suivant les diviseurs. (652-653).

Si l'on désigne par $d$ un diviseur de $n$, la fonction $l'(n)$, qui satisfait à l'égalité

$$\Sigma\, l'(d) = \log n,$$

se réduit à 0 pour toutes les valeurs de $n$ non premières et non égales aux

puissances d'un nombre premier $p$; pour ces dernières, au contraire,

$$l'(p) = l'(p^2) = l'(p^3) = \ldots = \log a.$$

Cela posé, si l'on désigne par $q(n)$ la fonction numérique bien connue qui se réduit à zéro pour tous les nombres divisibles par un carré et à $\pm 1$ pour les autres, on a

$$\Sigma q(d) \log(d) = l'(n).$$

De cette identité résultent trois formules remarquables :

1° Pour tout nombre premier $\theta$, on a

$$\mathrm{E}\left[\frac{\log(n)}{\log(\theta)}\right] = n - 1 - \mathrm{SE}\left[\frac{n}{a}\right] + \mathrm{SE}\left[\frac{n}{ab}\right] - \mathrm{SE}\left[\frac{n}{abc}\right] + \mathrm{SE}\left[\frac{n}{abcd}\right] - \ldots,$$

le signe S s'étendant à tous les nombres premiers autres que $\theta$.

2° $\theta[n]$ désignant le nombre des nombres premiers non supérieurs à $n$, on a

$$\theta[n] + \theta[\sqrt[2]{n}] + \theta[\sqrt[3]{n}] + \ldots = \mathrm{SE}\left[\frac{n}{a}\right] - 2\,\mathrm{SE}\left[\frac{n}{ab}\right] + 3\,\mathrm{SE}\left[\frac{n}{abc}\right] - \ldots,$$

S s'étendant à tous les nombres premiers $a, b, c, \ldots$;

3° B désignant un nombre de Bernoulli, on a

$$\mathrm{B}_{2\mu-1} = \frac{2.\mu!\log\left(2^{\frac{1}{2^\mu}}.3^{\frac{1}{3^\mu}}.4^{\frac{1}{4^\mu}}\ldots\right)}{(2\pi)^{2\mu}\log\left(2^{\frac{1}{2^{\mu-1}}}.3^{\frac{1}{3^{\mu-1}}}.5^{\frac{1}{5^{\mu-1}}}\ldots\right)}.$$

## *Pellet.* — Sur les surfaces réglées applicables sur une surface de révolution. (654).

Par chaque point d'une courbe C on mène une droite faisant avec la tangente, la normale et la binormale des angles dont les cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont donnés. Cette droite engendre une surface réglée dont l'élément linéaire est

$$dl^2 + 2\alpha\, dl\, ds + ds^2\left[\left(1 - \frac{l\beta}{\rho}\right)^2 + l^2\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{r}\right)^2 + l^2\frac{\beta^2}{r^2}\right],$$

$\rho$ et $r$ étant les rayons de courbure et de torsion de l'arc $d\sigma$.

Si la courbe C est telle que $\beta = 0$ et $\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{r} = \text{const.}$ (courbe dont les normales principales sont normales principales d'une deuxième courbe), la surface réglée aura C pour ligne de striction et ses génératrices auront un paramètre de distribution constant. La recherche des lignes géodésiques peut être ramenée aux quadratures.

## *Bertrand.* — Sur la combinaison des mesures d'une même grandeur. (701-704).

## *Jensen.* — Sur un théorème général de convergence. (729-731).

La série à termes positifs $\Sigma u_n$ sera convergente si, à partir d'une certaine

valeur du nombre entier et positif $n$,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu,$$

$a_n$ étant une fonction positive de $n$ et $\mu$ une constante positive.

Ce critérium comprend comme cas particuliers celui de Cauchy ($a_n = 1$), celui de Duhamel ($a_n = n$), ceux de Bertrand $a_n = n \log n$, $n \log n \log \log n$, ....

En général, on pourra toujours prendre $a_n$ de façon que $\Sigma \frac{1}{a_n}$ soit divergente; il suffira de faire $a_n = \frac{\lambda_n}{b_{n+1} - b_n}$, $\lambda_n$ restant fini et $b_n$ croissant constamment et indéfiniment avec $n$.

Si $a_n$ est choisi de la sorte, la série $\Sigma u_n$ sera divergente si, à partir d'une certaine valeur de $n$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0.$$

## *D'Ocagne.* — Sur les équations algébriques à racines toutes réelles. (731-732).

Si $z = 0$ est une équation algébrique de degré $\mu$ à racines toutes réelles, réelles aussi sont les racines de l'équation de degré $\mu + m$

$$\varphi_{m+1} z + \frac{\varphi'_{m+1}}{1} x z' + \frac{\varphi''_{m+1}}{1.2} x^2 z'' + \ldots + \frac{\varphi^{m}_{m+1}}{1.2\ldots m} x^m z^{(m)} = 0,$$

où

$$\varphi_{m+1} = k^1_{m+1} + k^2_{m+1} x + \ldots + k^{m+1}_{m+1} x^m,$$

les $k_{m+1}$ étant des nombres définis par la formule récurrente

$$k^{p+1}_{m+1} = (p+1) k^{p+1}_m + k^p_m,$$

avec les valeurs $k^1_{m+1} = 1$, $k^{m+1}_{m+1} = 1$.

## *Fabry.* — Réductibilité des équations différentielles linéaires. (732-734).

Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre $m$ dont les coefficients sont des fractions rationnelles par rapport à la variable indépendante, M. Fabry se pose et résout ce problème :

« Trouver une équation d'ordre $n$ et de même forme dont toutes les intégrales vérifient l'équation proposée, et trouver dans quel cas le problème est possible. »

## *Faye.* — Sur certains points de la théorie des erreurs accidentelles. (783-786).

## *Bertrand.* — Sur la valeur probable des erreurs les plus petites dans une série d'observations. (786-788).

*Mannheim.* — Sur certains conoïdes et en particulier sur le conoïde de Plücker. (820-823).

Tout conoïde droit, dont la courbe directrice se projette sur le plan suivant une circonférence qui contient le pied de la directrice rectiligne, peut être engendré au moyen du déplacement continu de cette courbe directrice.

Par exemple, un hélicoïde gauche à plan directeur peut être engendré au moyen du déplacement continu d'une hélice de grandeur invariable (d'une infinité d'hélices).

Le conoïde de Plücker jouit d'une propriété analogue; il peut être engendré au moyen du déplacement d'une ellipse invariable de grandeur, et pour cela on peut employer une infinité d'ellipses.

Par exemple, une ellipse de grandeur invariable assujettie à avoir les extrémités de son petit axe sur deux des arêtes d'un trièdre trirectangle fixe et à rencontrer la troisième arête engendre un conoïde de Plücker.

*Bortniker* (Mlle). — Sur la théorie des cyclides. (824-829).

Étant donnés une sphère et un point, l'auteur appelle *distance moyenne* du point à la sphère la puissance de ce point par rapport à la sphère, divisée par le rayon. Le moment du point par rapport à la sphère est le produit de la masse de ce point par le carré de sa distance moyenne à la sphère.

Cela posé, un système de points matériels de masses $m$, $m'$ étant donné, quelle est l'enveloppe des sphères pour lesquelles le moment du système est constant et qui coupent orthogonalement une sphère fixe? On trouve, en considérant la valeur du moment comme un paramètre, un système de cyclides homofocales générales.

On peut disposer de la sphère directrice de façon qu'on ait des cyclides à plans de symétrie. Pour une valeur donnée du rayon, le centre aura alors sept positions possibles. Quand le rayon variera, le centre décrira une cubique gauche.

Enfin, si l'on cherche le lieu des points d'où l'on peut mener trois sphères orthogonales entre elles et à la sphère directrice, et doublement tangentes à trois cyclides homofocales données, on trouve une cyclide.

*Bioche.* — Sur certaines surfaces réglées, à propos d'une Note de M. Pellet. (829-830).

L'auteur donne une démonstration nouvelle des résultats que M. Pellet a indiqués dans sa dernière Communication. Il établit en outre ce théorème :

« Si l'on donne une courbe de M. Bertrand (courbe dont les normales principales sont normales principales à une autre courbe), la surface qui a cette ligne pour ligne de striction, et qui est applicable sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe, s'obtient en menant par chaque point de la courbe donnée une parallèle à la binormale de la courbe conjuguée. »

*Jamet.* — Sur deux systèmes de courbes orthogonales. (830-833).

Intégration en termes finis de l'équation différentielle des trajectoires ortho-

gonales des courbes de niveau

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r'} = \frac{2}{a},$$

dues à deux masses $\alpha$ et $\beta$.

## *Jensen.* — Sur une généralisation du théorème de Cauchy. (833-836).

1° Si $\varphi_n$ et $a_n$ sont des fonctions du nombre positif et entier $n$, telles que $\varphi$ ait une limite définie $\varphi_\infty$, que $a_\infty$ soit infini et que

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{|a_\nu - a_{\nu-1}|}{|a_n|}$$

soit toujours plus petit qu'un nombre donné, on aura

$$\varphi_\infty = \lim_{n=\infty} \frac{(a_1 - a_0)\varphi_1 + (a_2 - a_1)\varphi_1 + \ldots + (a_n - a_{n-1})\varphi_n}{a_n}.$$

Cette proposition est une généralisation du théorème de Cauchy

$$\lim \frac{f(n)}{n} = \lim [f(n) - f(n-1)].$$

2° Si $\Sigma u_n$ est une série convergente, on aura

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{a_n} = 0.$$

## *Bertrand.* — Sur l'évaluation *a posteriori* de la confiance méritée par la moyenne d'une série de mesures. (887-891).

Si, dans la mesure d'une même grandeur, la concordance des résultats inspire une confiance indiscutable, c'est qu'elle fait croire avec grande raison à la précision des instruments et à l'habileté de l'observateur.

Mais, si l'on suppose le mérite de l'observateur, celui de l'instrument et celui de la méthode assez bien connus à l'avance pour qu'on doive écarter l'idée de les accroître, quelle est l'erreur probable de la moyenne et comment dépend-elle de la concordance, alors nécessairement fortuite, des observations? Le Calcul des probabilités amène à cette conclusion inattendue qu'elle n'en dépend pas.

## *Jonquières (de).* — Construction géométrique, par deux faisceaux projectifs, de la surface du troisième degré déterminée par diverses conditions données. (907-912).

M. de Jonquières a déjà indiqué deux cas dans lesquels on peut construire la surface du troisième ordre; actuellement, il en fait connaître deux autres :

1° Les données sont trois points doubles et sept points simples;

2° Les données sont sept points et trois droites qui ne se coupent pas.

L'auteur fait observer que la démonstration de ce théorème de Salmon qu'une surface du troisième ordre ne peut avoir plus de quatre points doubles s'étend aux surfaces d'ordre quelconque :

Une surface d'ordre $n$ peut avoir au plus

$$\frac{1}{2} n(n-1)(2n-5)+1$$

points doubles.

*Carvallo.* — Sur l'application de la méthode des moindres carrés. (924-926).

*Kœnigs.* — Sur la distribution des volumes engendrés par un contour fermé. (927-929).

Si l'on fait tourner d'un angle $\theta$ un contour fermé $l$ autour d'une droite quelconque

$$(\Delta)\qquad \begin{cases} cy - bz + p = 0, \\ az - cx + q = 0, \\ bx - ay + r = 0, \end{cases}$$

le volume engendré, dont le signe est déterminé par le sens de parcours choisi sur $l$, a pour expression

$$V_\Delta = \theta\,\frac{Ap + Bq + Cr + La + Mb + Nc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

A, B, C étant les aires des projections du contour $l$ sur les plans coordonnés, et L, M, N les demi-sommes des carrés des distances des divers éléments de ces aires à l'origine.

Si l'on imagine un segment de droite R dont A, B, C sont les projections, R fournira la distribution de l'aire de projection du contour $l$ sur les divers plans de l'espace; et si l'on considère un système $\Sigma$ de segments dont R sera la résultante de translation et L, M, N les moments par rapport aux axes, le moment de ce système par rapport à la droite $\Delta$ sera précisément

$$\frac{Ap + Bq + Cr + La + Mb + Nc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

De là ce théorème :

« A tout contour fermé $l$ doué d'un sens de parcours, est attaché un système $\Sigma$ de segments tel que le volume engendré par la rotation du contour autour d'un axe $\Delta$ est égal au produit de l'angle de rotation par le moment de $\Sigma$ par rapport à $\Delta$. »

La théorie des moments de Poinsot s'applique donc aux volumes de révolution. Si l'on prend pour axe $Oz$ l'axe central du système, on a

$$V_\Delta = \theta(R\pi \sin\alpha + G\cos\alpha),$$

$\alpha$ désignant l'angle de l'axe de rotation avec le segment R, $\pi$ la plus courte distance entre l'axe central et l'axe de révolution, G le volume engendré par la rotation 1 autour de l'axe central.

L'auteur fait l'application de cette formule générale à divers cas particuliers, parmi lesquels nous citerons le suivant qui comprend le théorème de Guldin :

« Le volume engendré par un contour plan tournant autour d'un axe Δ est égal au chemin parcouru par le pied P de la perpendiculaire commune à l'axe Δ et à la normale élevée au centre de gravité de l'aire plane, multiplié par la projection de cette aire sur le plan méridien du point P.

## *Bertrand.* — Sur l'erreur à craindre dans l'évaluation des trois angles d'un triangle. (968-970).

Lorsqu'on mesure les trois angles d'un triangle par des méthodes qui laissent pour chacun la même erreur à craindre, la probabilité d'une erreur $z$ étant $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2} dz$, si les trois mesures donnent pour la somme de ces angles $180° + \alpha$, la théorie prescrit de diminuer chaque angle de $\frac{\alpha}{3}$; le carré de l'erreur à craindre sur chacun d'eux est $\frac{1}{3k^2}$.

Cette valeur est calculée avant que les mesures soient prises.

Mais si les mesures sont prises et la valeur de $a$ connue, la valeur probable du carré de l'erreur diminue-t-elle si $\alpha$ est grand, accroît-elle, si $\alpha$ est petit, la confiance due aux observations?

Il faut distinguer deux cas :

Si les instruments sont mal connus, la somme trouvée pour les angles est un indice précieux de la valeur des opérations.

Si l'instrument (c'est-à-dire $k$) est bien connu, la valeur de $\alpha$ ne change rien à l'évaluation de l'erreur probable.

M. Bertrand montre en effet que, la somme des erreurs commises sur les angles étant $\alpha$, la probabilité pour que la somme de leurs carrés soit $\rho$ est

$$e^{-k^2\rho^2} \rho\, d\rho . 2k^2 e^{\frac{k^2\alpha^2}{3}}.$$

La valeur probable de $\rho^2$ est

$$2k^2 e^{\frac{k^2\alpha^2}{3}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-k^2\rho^2} \rho^3\, d\rho = \frac{\alpha^2}{3} + \frac{1}{k^2}.$$

Si l'on corrige chaque angle en lui retranchant $\frac{\alpha}{3}$, la somme des carrés des erreurs est

$$\rho^2 - \frac{\alpha^2}{3} = \frac{1}{k^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

## *Cayley.* — Note sur les surfaces minima et le théorème de Joachimstahl. (995-996).

M. Cayley démontre par des considérations géométriques très simples ce théorème que la seule surface minima réglée est l'hélicoïde à plan directeur.

De cette remarque que deux triangles isoscèles PP′O, PP′N, à base commune

PP′ et situés dans deux plans différents, forment des angles égaux OPN et OP′N, on déduit immédiatement le théorème de Joachimstahl et le théorème plus général de MM. Bonnet et Serret, relatifs aux lignes de courbure planes ou sphériques.

*Bertrand.* — Sur les lois de mortalité de Gompertz et de Makeham. (1042-1043).

Simpson a proposé, pour calculer les rentes viagères sur plusieurs têtes, une méthode dont voici le principe : on peut, pour calculer les conditions d'une rente viagère sur deux têtes, substituer aux deux âges différents un âge unique convenablement choisi.

Si l'on nomme $\varphi(z)$ le nombre des survivants à l'âge $z$ pour un nombre donné de naissances, le principe de Simpson donne, comme le montre M. Bertrand, pour forme de la fonction $\varphi$

$$\varphi(z) = \mathrm{H}\, e^{\mathrm{G}e^{ku} + \mathrm{C}u},$$

H, G, $k$ et C étant des constantes. C'est la loi de Makeham, qui se réduit à celle de Gompertz pour $\mathrm{G} = 0$.

*Boussinesq.* — Équilibre d'élasticité d'un solide sans pesanteur, homogène et isotrope, dont les parties profondes sont maintenues fixes pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires. (1043-1048).

*Premier cas.* — On donne les déplacements $u_0$, $v_0$, $w_0$, en chaque point de la surface plane d'un solide remplissant la moitié de l'espace, et l'on cherche en chaque point de l'intérieur les déplacements $u$, $v$, $w$ et les pressions $p_x$, $p_y$, $p_z$ (celles-ci, comme on sait, se déduisent immédiatement des déplacements).

La solution de ce problème est donnée par les formules suivantes. Si l'on désigne par $-2\pi u$, $-2\pi v$, $-2\pi w$ les potentiels en un point intérieur de trois couches matérielles fictives de densités respectives $u_0$, $v_0$, $w_0$ étalées sur le plan de la surface (pris pour plan des $xy$), et que l'on pose

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

on aura

$$u = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$\lambda$, $\mu$ étant les deux constantes de Lamé.

*Deuxième cas.* — On connaît sur chaque point de la surface les trois pressions $p_x$, $p_y$, $p_z$. On peut scinder ce cas en deux autres : 1° $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z$ étant une fonction donnée de $x$, $y$ ; 2° $p_z = 0$, $p_x$ et $p_y$ étant des fonctions don-

nées de $x$, $y$; car l'addition des valeurs trouvées dans ces deux cas donnera celles qui conviennent au cas général.

1° $p_x = p_y = 0$. Si l'on pose

$$\varphi = -\frac{\mu}{2\pi(\lambda+\mu)} \int \log(z+r)\, p_z\, d\sigma,$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface supportant la pression $p_z$, et $r$ la distance du point intérieur d'ordonnée $z$ à l'élément $d\sigma$, on aura

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, z\, \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, z\, \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, z\, \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

2° $p_z = 0$. Si l'on pose

$$P_x = -\frac{1}{2\pi} \int [z \log(z+r) + r]\, p_x\, d\sigma,$$

$$P_y = -\frac{1}{2\pi} \int [z \log(z+r) - r]\, p_y\, d\sigma,$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y}\right), \qquad \varphi_2 = \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\right),$$

on aura

$$u = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, \frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, \frac{\partial\varphi}{\partial y} + 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi.$$

## *Pellet.* — Sur la formule de Fourier et ses analogues. (1062-1064).

Si $f(z)$ désigne une fonction holomorphe en tous les points situés dans le contour fermé S, on a, pour tout point $x$ d'argument $\varphi$, situé sur une circonférence de rayon R ayant pour centre l'origine et coupant le contour en deux points $A_0$, $A_1$ dont les arguments sont $\varphi_0$, $\varphi_1$,

$$\int_S \frac{f(z)\,dr}{z-x} = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(Re^{\varphi i})\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sum_1^n f(Re^{\varphi i}) \cos m(\varphi-\omega)\,d\varphi + R_n,$$

$R_n$ tendant vers zéro.

La formule subsiste encore pour les points $A_0$ et $A_1$ si la fonction $f$ est nulle en ces points; l'intégrale du premier membre se réduisant alors à zéro. Elle subsiste encore s'il existe sur l'arc $AA_1$ un point critique tel que l'intégrale $\int f\,dz$ prise le long d'un petit cercle entourant le point critique soit infiniment petite.

En remarquant que l'intégrale du premier membre a pour valeur $2i\pi f(x)$, lorsque $x$ est intérieur au contour S, on déduit de la formule qui précède divers développements d'une fonction, d'abord la formule de Fourier, ensuite le développement suivant les polynômes de Legendre et, plus généralement,

suivant les polynômes qui proviennent de la réduction en fraction continue de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}}{z-x}\,dz.$$

ordonnée suivant les puissances décroissantes de $x$.

La méthode s'étend au développement d'une fonction de deux angles en série de fonctions sphériques.

## *Demartres.* — Sur les courbes de M. Bertrand, considérées comme lignes géodésiques de surfaces cerclées. (1065-1067).

Trouver les surfaces dont chaque génératrice circulaire est inclinée d'un même angle $i$ sur une même famille de lignes géodésiques, cet angle pouvant, d'ailleurs, varier d'une génératrice à la suivante.

Voici la solution que M. Demartres donne de ce problème :

On prend une ligne dont la courbure et la torsion soient liées par la relation

$$\frac{\cos i}{\rho} + \frac{\sin i}{T} + \frac{1}{a} = 0.$$

De chaque point de cette courbe comme centre, on décrit un cercle de rayon constant $a$, le plan de ce cercle passant par la normale principale et faisant un angle $\frac{\pi}{2} - i$ avec le plan osculateur. Le cercle ainsi défini engendre la surface cherchée. Les trajectoires, sous l'angle $i$, des génératrices circulaires sont des lignes géodésiques.

Toutes les trajectoires sont des courbes de M. Bertrand, et, par suite, d'une pareille courbe on peut, par les trajectoires d'un cercle de rayon constant, en déduire une infinité d'autres aux mêmes paramètres que la première.

En faisant $i = \frac{\pi}{2}$, on retrouve ce théorème de M. Lie : Si de chaque point d'une courbe à torsion constante $\frac{1}{a}$, on décrit, dans son plan osculateur, un cercle de rayon $a$, les trajectoires orthogonales de ce cercle ont une torsion constante et égale à $\frac{1}{a}$.

M. Demartres énonce, en terminant, cette proposition : Lorsqu'une surface canal de rayon $a$ admet pour axe une ligne dont la courbure est égale à $\frac{1}{a}$, les génératrices circulaires sont divisées homographiquement par les deux séries de lignes asymptotiques.

## *Bougaief.* — Sur les fonctions discontinues logarithmiques. (1067-1070).

L'auteur signale l'importance des fonctions discontinues qui dépendent de la représentation naturelle des nombres entiers $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ sous la forme de produits de nombres premiers $a, b, c$.

Parmi ces fonctions il faut remarquer les fonctions discontinues logarithmi-

ques $L(n)$, lesquelles satisfont aux deux conditions

$$L(1) = 0, \qquad L(n'n'') = L(n') + L(n'').$$

Ces fonctions sont des fonctions linéaires des exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; elles ont la forme générale

$$L(n) = \varphi(a)\alpha + \varphi(b)\beta + \varphi(c)\gamma,$$

où $\varphi(n)$ est une fonction arbitraire analytique ou numérique.

Le logarithme ordinaire $l(n)$ est un cas particulier de ces fonctions logarithmiques discontinues, pour lequel $\varphi(n)$ est égal à $l(n)$.

Les fonctions logarithmiques discontinues fournissent le moyen de trouver une infinité de lois numériques nouvelles. Chaque fois qu'on a une identité numérique entre deux produits de nombres entiers, en prenant le logarithme discontinu des deux produits, on obtient une nouvelle loi numérique avec une fonction arbitraire $\varphi(n)$. En donnant à cette fonction différentes formes, on obtient des lois numériques particulières.

M. Bougaief donne divers exemples de cette transformation.

## *Loir.* — Caractères de la divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque (7, 11, 13, 17, ...). (1070-1071).

## *Lucas* (*F.*). — Résolution des équations par l'électricité. (1072-1074).

Pour résoudre électriquement une équation algébrique de degré $p$, $F(z) = 0$, à coefficients réels donnés numériquement, on prendra arbitrairement, sur l'axe des $x$, $p+2$ points L, dont les abscisses $\lambda$ permettront de former le polynôme

$$f(z) = \Pi(z-\lambda),$$

ainsi que la fraction rationnelle

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \sum \frac{\mu}{z-\lambda}.$$

En prenant pour plan de la figure une plaque conductrice et faisant arriver aux points L des extrémités d'électrodes déversant des quantités d'électricité (positives ou négatives) proportionnelles aux $\mu$ correspondants, on obtiendra un régime électrique dont les lignes équipotentielles auront pour *points nodaux* les *points racines* de l'équation proposée.

Cette solution dispense de l'emploi d'une électrode supplémentaire à placer sur la périphérie de la plaque de rayon infini, qui s'introduisait dans la solution donnée par l'auteur dans une précédente Communication.

## *Bertrand.* — Sur la méthode des moindres carrés. (1115-1117).

La démonstration proposée par Gauss en 1809 pour la méthode des moindres carrés supposait, pour la probabilité des erreurs, une loi très particulière, dans laquelle ne figure qu'une seule constante; celle qu'il donna en 1821 est affranchie de toute hypothèse.

Comment se fait-il que l'on puisse, d'une loi qui reste inconnue, déduire une loi précise?

L'explication est simple, répond M. Bertrand. Gauss a fait implicitement l'hypothèse qui précise la forme de la fonction; elle consiste à supposer les erreurs infiniment petites. L'identité de tous les problèmes n'est pas dès lors plus étrange que celle de la loi des courbures, la même sur toutes les surfaces pour toutes les courbes issues d'un même point. M. Bertrand montre, en effet, que cette hypothèse revient à attribuer à la probabilité d'une erreur $r$ la forme $G e^{-k^2 z^2}$.

*Boussinesq.* — Équilibre d'élasticité d'un solide sans pesanteur, homogène et isotrope, dont les parties sont maintenues fixes pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires. Cas où les données sont mixtes, c'est-à-dire relatives en partie aux pressions et en partie aux déplacements. (1119-1123).

Après avoir traité (*voir* plus haut) les deux cas où l'on donne : 1° les déplacements $u_0$, $v_0$, $w_0$ à la surface; 2° les pressions $p_x$, $p_y$, $p_z$ à la surface, M. Boussinesq donne la solution des cas mixtes.

1° Les données sont $u_0$, $v_0$, $p_z$. Si l'on pose

$$2\pi P_z = -\int p_z \frac{d\sigma}{r}, \qquad 2\pi U = -\int u_0 \frac{d\sigma}{r}, \qquad 2\pi V = -\int v_0 \frac{d\sigma}{r},$$

$$\Phi = -\frac{k'}{1+k} + \frac{k}{1+K}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

on aura

$$u = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{z}{1+k}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - P_z\right),$$

$$v = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{z}{1+k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - P_z\right),$$

où, pour plus de simplicité, l'on a posé

$$k = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad k' = 2k+1.$$

2° Les données sont $p_x$, $p_y$ et $w_0$. La solution est donnée par les formules

$$u = \frac{1}{\pi}\int p_x \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{2\pi(1+k)}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$v = \frac{1}{\pi}\int p_y \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{2\pi(1+k)}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$w = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int w_0 \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{2\pi(1+k)}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

où l'on a posé

$$\psi = \frac{\partial}{\partial x}\int p_x r\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int p_y r\,d\sigma + (1-k)\int w_0 \frac{d\sigma}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int w_0 r\,d\sigma.$$

*Perrin.* — Sur quelques familles d'opérateurs différentiels. (1131-1135).

Parmi les opérateurs différentiels, en nombre indéfini, qu'on peut concevoir appliqués à des fonctions homogènes et isobariques de $\mu$ séries de quantités formées, par exemple, de coefficients de $\mu$ formes binaires simultanées, quelques-uns peuvent être rattachés à un petit nombre de familles dont tous les membres jouissent de propriétés offrant quelque intérêt au point de vue de la théorie des formes.

Soit d'abord la famille ($\zeta$) définie par la formule

$$\zeta_p = \sum_\mu a_0 \frac{d}{da_p} + \frac{p+1!}{p!\,1!} a_1 \frac{d}{da_{p+1}} + \ldots + \frac{p+r!}{p!\,r!} a_r \frac{d}{da_{p+r}} + \ldots.$$

L'alternant de deux opérateurs $\zeta$ quelconques est nul, c'est-à-dire que

$$\zeta_p \zeta_q - \zeta_q \zeta_p = 0.$$

Cette relation, pour $q = 1$, montre que tout opérateur $\zeta$ appliqué à un péninvariant fournit un autre péninvariant.

Elle montre encore que l'opérateur $\zeta_p$, appliqué à un covariant ou à un semi-covariant de la forme $(a_0 a_1 \ldots a_n \mid x, y)^n$, fournit un semi-covariant en général du même ordre.

Une seconde famille ($\omega$) est définie par la formule

$$\omega_p = \sum_\mu \left[ a_1 \frac{d}{da_p} + \frac{p+1!}{p!\,1!} a_2 \frac{d}{da_{p+1}} + \ldots + \frac{p+r!}{p!\,r!} a_{r+1} \frac{d}{da_{p+r}} + \ldots \right].$$

L'alternant de deux opérateurs de la famille ($\omega$) appartient à la même famille

$$\omega_p \omega_q - \omega_q \omega_p = (p-q) \frac{p+q-1!}{p!\,q!} \omega_{p+q-1};$$

d'où l'on conclut que les seuls opérateurs $\omega$ réellement distincts sont les quatre premiers.

L'alternant d'un opérateur $\zeta$ et d'un opérateur $\omega$ appartient à la famille ($\zeta$)

$$\zeta_q \omega_p - \omega_p \zeta_q = \frac{p+q-1!}{p!\,q-1!} \zeta_{p+q+1};$$

d'où l'on conclut:

1° Que $\zeta_2$ et $\omega_2$ appliqués, une seule fois chacun, à un péninvariant sont commutatifs;

2° Que $\zeta$ peut s'exprimer ainsi en fonction de $\omega_2$ et de $\zeta_1$

$$\zeta_p = \frac{2^{h-1}}{p!\,(p-1)!} \left[ \zeta_2 \omega_2^{h-1} - \frac{p-1}{1} \omega_2 \zeta_1 \omega_2^{h-2} + \ldots - (-1)^{h-1} \omega_2^{h-1} \zeta_1 \right];$$

3° Que, pour un péninvariant de degré $\theta$, on a

$$\zeta_1 \omega_0^m = m \theta \omega_0^{m-1};$$

4° Que, pour une fonction quelconque, on a

$$\zeta_1^m \omega_p = \omega_p \zeta_1^m + m \zeta_p \zeta_1^{m-1}.$$

Donc $\omega_p$, appliqué au coefficient du dernier terme d'un covariant ou semi-

covariant d'ordre $m - 1$, fournit le coefficient du dernier terme d'un semi-covariant en général d'ordre $m$.

M. Perrin montre enfin que l'opérateur $\zeta_p \zeta_q \ldots \zeta_t$, appliqué à un péninvariant, donne un péninvariant; par où l'on peut, si $\nu$ est un péninvariant d'étendue $n$, de degré $\theta$ et de poids $\pi$, former autant de relations entre les coefficients numériques de $\nu$ qu'il existe de manières de former $\pi - 1$ avec $\theta$ entiers au plus égaux à $n$.

## *Fouret.* — Sur une source d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. (1135-1138).

Si l'équation

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

a toutes ses racines réelles, l'équation

$$\Phi(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x) = 0,$$

dans laquelle $f(x)$ représente un polynôme d'un degré égal ou supérieur à $n$, a au moins autant de racines réelles que l'équation $f(x) = 0$, et, si elle en a davantage, l'excédent est un nombre pair.

De là suit que, si les équations $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles, il en est de même de l'équation $\Phi(x) = 0$.

En particularisant soit $F(x)$, soit $f(x)$, M. Fouret obtient des types remarquables d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. On peut citer celle qui correspond à $F(x) = (x+1)^n$, savoir

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{n}{1!}\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + nx + 1 = 0,$$

qui a fait l'objet d'importantes recherches de la part d'Abel, Tchebichef, Laguerre et Halphen.

## *Paraf.* — Sur deux théorèmes de Jacobi relatifs aux lignes géodésiques. (1139-1141).

La ligne géodésique qui joint deux points d'une surface n'est pas nécessairement la ligne la plus courte et n'est même pas toujours minima par rapport aux courbes infiniment voisines.

Jacobi a énoncé à ce sujet (*Journal de Crelle,* t. 17) deux théorèmes qu'il ne démontre pas, mais dont M. Paraf donne actuellement la démonstration :

1° L'arc géodésique AB est véritablement un minimum si la géodésique voisine AM ne va pas couper AB entre A et B.

2° Sur toute surface à courbures opposées, les lignes géodésiques sont véritablement les plus courtes.

A la suite de la Communication de M. Paraf, M. O. Bonnet fait observer qu'il a publié (*Comptes rendus,* t. XL et XLI) deux Notes renfermant les résultats précédents. On trouve même dans la première Note plusieurs propriétés que Jacobi n'avait pas signalées, entre autres celle-ci : si dans une surface convexe la courbure totale est toujours positive et supérieure à la constante $\frac{1}{a^2}$,

toute géodésique ne pourra être minima dans une étendue supérieure ou égale à $\pi a$.

*Cesaro*. — Sur deux récentes Communications de M. Jensen. (1142-1143).

M. Cesaro revendique pour M. Kummer la priorité de la règle de convergence des séries $\Sigma u_n$ à termes positifs, à savoir que, si le produit $a_n u_n$ du terme général $u_n$ par une fonction positive $a_n$ surpasse toujours le produit suivant $a_{n+1} u_{n+1}$ d'une quantité supérieure à $k u_{n+1}$, $k$ étant un nombre positif, la série $\Sigma u_n$ est convergente.

D'ailleurs, M. Dini a montré qu'il existe une infinité de séries pour lesquelles il est impossible de trouver une fonction $a_n$, telle que la règle de Kummer soit décisive à leur égard.

*Guyou*. — Sur une solution élémentaire du problème du gyroscope de Foucault. (1143-1146).

*Bertrand*. — Sur la précision d'un système de mesures. (1195-1198).

*Fouret*. — Sur certains types d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles. (1220-1222).

Après avoir reconnu que le théorème démontré dans sa dernière Communication avait déjà été indiqué par M. Hermite, M. Fouret fait connaître une nouvelle source d'équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles :

Si $\varphi(x)$ est un polynôme entier de degré $n$ dont les facteurs linéaires sont tous réels, $f(x)$ un polynôme entier d'un degré égal ou supérieur à $n$, et $\alpha$ un nombre quelconque, mais non compris entre $-1$ et $-(2n+1)$, l'équation

$$F(x) = f(x)\frac{\varphi^{(n)}(x)}{p!} + \frac{f'(x)}{\alpha+1}\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\varphi(x) = 0$$

a au moins autant de racines réelles que l'équation $f(x) = 0$, et, si elle en a davantage, l'excédent est un nombre pair.

En particulier, l'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, si $f(x) = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles.

*Bertrand*. — Sur les conséquences de l'égalité acceptée entre la valeur vraie d'un polynôme et sa valeur moyenne. (1259-1263).

M. Bertrand montre, par un exemple, que la règle de Gauss qui donne *a posteriori* la précision d'un système d'observations n'est pas justifiée.

« Le théorème de Gauss sur la somme des carrés des erreurs indiquées par la méthode des moindres carrés, dit à la fin de sa Note M. Bertrand, n'en reste pas moins un admirable résultat algébrique, et c'est avec plaisir que je présente à l'Académie, pour être insérée dans ce numéro de nos *Comptes rendus*, une élégante démonstration de M. Guyou. »

*Halphen.* — Sur les intégrales pseudo-elliptiques. (1263-1270).

Abel s'est posé le problème suivant :

« Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{L\,dx}{\sqrt{X}}$, où L et X sont des fonctions, l'une rationnelle et l'autre entière de $x$, et dont les intégrales puissent s'exprimer par une fonction de la forme

$$\log \frac{P-\sqrt{X}}{P+\sqrt{X}},$$

P étant rationnelle. »

Il l'a résolu comme il suit dans le cas où X est de degré pair. Pour l'existence de la différentielle cherchée, il faut et il suffit que $\sqrt{X}$ soit développable en une fraction continue périodique; alors P est la dernière réduite de la première période.

C'est en se laissant guider par les idées d'Abel que M. Halphen aborde le problème général des intégrales pseudo-elliptiques, c'est-à-dire des intégrales $\int \frac{L\,dx}{\sqrt{X}}$ (X étant du troisième ou du quatrième degré) qui s'expriment par des fonctions algébriques et logarithmiques. (Les raisonnements de M. Halphen pourraient d'ailleurs s'étendre au cas où le degré de X est quelconque.)

L'auteur commence par ramener le cas général au cas où la fraction rationnelle L n'a, en dénominateur, que des racines simples et différentes de celles de X et où le degré de son numérateur surpasse de deux unités au plus le degré de son dénominateur.

Cela posé, pour que l'intégrale $\int \frac{L\,dx}{\sqrt{X}}$ soit pseudo-elliptique, il faut que le degré du numérateur de L surpasse d'une unité au plus celui du dénominateur et que L, décomposée en fractions simples, soit une somme d'expressions telles que

$$(1) \qquad L_i = \frac{n_1\sqrt{X_1}}{x-x_1} + \frac{n_2\sqrt{X_2}}{x-x_2} + \ldots + n\sqrt{a_0}\,x + K,$$

où $n_1$, $n_2$, ..., $n$ sont des entiers, K une constante, $a_0$ le coefficient du premier terme de X ($X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + \ldots$), enfin $X_1$, $X_2$, ... ce que devient X quand on y remplace $x$ par $x_1$, $x_2$, ....

Ces conditions ne suffisent pas. Il faut encore et il suffit que les quantités $x_1$, $x_2$, ..., $k$ satisfassent à deux conditions que M. Halphen exprime de la manière suivante :

Désignant par Y ce que devient X quand on y remplace $x$ par une constante quelconque $y$, il développe en fraction continue, procédant suivant les puissances ascendantes de $x - \xi$, la fonction

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y} = \alpha_1 + \cfrac{\beta_2(x-\xi)^2}{\alpha_2 + \cfrac{\beta_3(x-\xi)^2}{\alpha_3 + \ldots}}.$$

Dans ce développement, $\xi$ est une constante quelconque, les $\beta$ sont des constantes, les $\alpha$ des fonctions linéaires de $x$. Si l'on s'arrête au $m^{\text{ième}}$ quotient $\alpha_m$,

le reste a la forme

$$\frac{(x-\xi)^2(x-y_{m+1})}{\sqrt{X}-A},$$

A étant un polynôme du deuxième degré qui devient égal à $\sqrt{X}$ pour $x=y_{m+1}$, ce qui permet de calculer $y_{m+1}$.

Enfin, appelant $\frac{G_m}{H_m}$ la réduite de rang $m$, M. Halphen développe suivant les puissances décroissantes de $x$ la quantité

$$\frac{(x-y)G_m}{H_m} = ax^2+bx+\ldots$$

et pose

$$C_m = \frac{4aa_1-2ba_0}{a^2-a_0}.$$

Cela fait, dans le développement (2), il remplace $\xi$ successivement par $x_1$, $x_2$, ... et, $\infty$, et s'arrêtant respectivement aux réduites de rang $n_1, n_2, \ldots, n$, il calcule les constantes correspondantes $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_n$ et, dans le dernier cas ($\xi=\infty$), la quantité $y_{n+1}$, qu'il désigne par $z$.

Les deux conditions cherchées s'expriment alors par

$$z=y \qquad \text{et} \qquad C_{n_1}+C_{n_2}+\ldots+C_n=0.$$

*Lévy* (*M.*). — Sur la théorie de la figure de la Terre. (1270-1276, 1314-1319, 1375-1381).

En parlant de l'hypothèse de la fluidité de la Terre, Clairaut a montré que les surfaces d'égale densité sont sensiblement des ellipsoïdes de révolution et qu'en appelant $a$ le rayon d'une de ces surfaces (celui de la Terre étant pris égal à 1), $\varepsilon$ son ellipticité, $\rho$ sa densité, on a, en désignant par $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ les dérivées de $\varepsilon$ par rapport à $a$, l'équation différentielle

$$\frac{a^2\varepsilon''-6\varepsilon}{a\varepsilon'+\varepsilon}+\frac{2\rho a^3}{\int_0^a \rho a^2\,da}=0$$

et, à la surface de la Terre,

$$\frac{a\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{5\varphi}{2\varepsilon}-2,$$

$\varphi$ étant le rapport de la force centrifuge à l'équateur à l'attraction correspondante de la Terre.

Si l'on se donne arbitrairement la loi de la densité $\rho$, ces deux équations déterminent complètement $\varepsilon$. Il faut donc que la loi admise, pour la densité, reproduise : 1° l'ellipticité $\varepsilon$, connue à la surface; 2° la densité moyenne de la Terre, également connue; 3° la densité à la surface, supposée aussi connue, et enfin satisfasse à une quatrième condition fournie par la précession des équinoxes.

Il faut, en conséquence, adopter une expression de la densité contenant quatre constantes arbitraires.

Legendre a intégré l'équation de Clairaut, en termes finis, dans l'hypothèse

$$\rho=\rho_0\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}.$$

Lipschitz est parti de l'expression à trois constantes arbitraires

$$\rho = \rho_0(1 - k_0 a^\lambda),$$

et a obtenu $\varepsilon$ sous forme d'une série hypergéométrique.

A propos du travail de Lipschitz, MM. Tisserand et Radau ont fait des remarques importantes sur la difficulté d'établir un accord satisfaisant entre la théorie de la fluidité et celle de la précession.

M. Maurice Lévy revient sur cette question, en partant de la formule

$$\rho = \rho_0(1 - ka^\lambda)^{\mu - 1}\left[1 - \left(1 + \frac{\lambda\mu}{3}\right)ka^\lambda\right],$$

qui renferme quatre constantes arbitraires et se réduit à celle de Lipschitz pour $\mu = 1$. Elle conduit, comme cette dernière, à une intégration par série hypergéométrique, et donne lieu à une discussion analogue.

De cette discussion, il résulte qu'il est impossible de disposer de $\mu$ de façon à satisfaire à la condition de la précession, quoiqu'on soit parti d'une expression de la densité ayant le nombre de paramètres voulu pour y satisfaire *a priori*.

Les formules antérieures n'y satisfaisaient pas; mais on pouvait attribuer le fait à ce qu'elles n'avaient pas le nombre nécessaire de coefficients. Le résultat obtenu par M. M. Lévy confirme donc les prévisions de M. Tisserand.

Si l'on abandonne la condition relative à la précession comme impossible à réaliser dans l'hypothèse de la fluidité, on peut, en faisant varier $\mu$, satisfaire d'une infinité de manières aux trois premières conditions énoncées. On peut, en particulier, d'une infinité de manières, limiter la série hypergéométrique qui donne l'ellipticité.

*Sylvester.* — Preuve élémentaire du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques dans le cas où la raison est 8 ou 12. (1278-1281, 1385-1386).

*Guyou.* — Note relative à l'expression de l'erreur probable d'un système d'observations. (1282-1285).

*Bertrand.* — Note sur l'introduction des probabilités moyennes dans l'interprétation des résultats de la statistique. (1311-1313).

Lorsque des tirages se font dans une urne de composition invariable, contenant des boules blanches et des boules noires, non seulement dans une série d'épreuves le nombre des boules blanches doit prendre une valeur indiquée par le calcul; mais, l'accord ne pouvant être rigoureux, le calcul des probabilités assigne la valeur moyenne de l'écart. L'écart, pour chaque série d'épreuves, est un nombre donné par le hasard, dont les valeurs successives sont soumises à des lois régulières.

Les écarts observés, dans les Tableaux statistiques, sont loin d'obéir à ces lois; le *coefficient de divergence* (rapport de l'écart observé à la moyenne calculée) peut s'élever jusqu'à 80 (Tables de mortalité).

Ces Tables sortent-elles du domaine du Calcul des probabilités?

3e Part.



La conclusion, répond M. Bertrand, serait trop précipitée.

On peut consulter le hasard autrement que par des tirages au sort dans une urne de composition déterminée.

Dans ce nouvel ordre d'idées, M. Bertrand énonce le théorème suivant :

« Quels que soient le nombre et la composition des urnes, la loi des écarts est la même que pour une seule urne de composition déterminée; mais cette urne n'est pas celle qui donne la probabilité moyenne; il faut donc, pour comparer les résultats de la statistique à ceux du calcul, supposer deux urnes différentes, les résultats moyens étant assimilés à des tirages faits dans la première et les écarts aux résultats donnés par la seconde. »

## *Halphen.* — Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. (126-129).

L'auteur étudie la fraction continue qui provient du développement de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{F(y)} - \sqrt{F(x)}}{y - x},$$

où F est un polynôme du troisième ou du quatrième degré,

$$f(x) = \alpha + \gamma x + \cfrac{(x-\xi)^2}{\alpha_1 + \gamma_1 x + \cfrac{(x-\xi)^2}{\alpha_2 + \gamma_2 x + \dots}}.$$

En supposant $x$ et $y$ donnés et considérant $\xi$ comme une variable complexe, on démontre que, dans toute portion du plan, si petite qu'elle soit, il y a une infinité de points $\xi$ pour lesquels la fraction continue converge et une infinité d'autres pour lesquels elle diverge.

M. Halphen envisage, plus particulièrement, le cas où les points racines de $F(x)$ sont situés sur un cercle (cercle fondamental) et où $\xi$ est assujetti à rester sur ce cercle. En particulier, si les racines de $F(x)$ sont réelles, $\xi$ est réelle, car le cercle fondamental se réduit à une droite.

La circonférence fondamentale est partagée en quatre arcs par les quatre racines. Les deux arcs contigus à celui sur lequel se trouve $\xi$ constituent deux coupures interdites au point $x$.

Or, quel que soit $x$, la fraction continue converge et représente, dans tout le plan, la fonction $f(x)$ rendue uniforme par les coupures. Sur les coupures, la fraction est divergente.

La fonction (considérée comme fonction de $x$) converge uniformément dans tout le plan, excepté sur une ligne, et sur cette ligne (qui est algébrique), la convergence est non uniforme dans tout intervalle.

Il existe une infinité de valeurs de $\xi$ (indépendantes de $y$) pour lesquelles la fraction devient périodique; elle le devient quand les intégrales de $\frac{1}{\sqrt{F(x)}}$, prises depuis $\xi$ jusqu'à l'une ou l'autre des extrémités de l'axe où se trouve $\xi$ sont commensurables entre elles.

Quand la fraction est périodique, la ligne de convergence non uniforme perd son caractère; la convergence y devient uniforme, sauf en certains points où il y a divergence par oscillation.

Enfin M. Halphen fait observer que les quotients incomplets de cette fraction continue $f(x)$ (sauf le premier) sont des covariants de F pour toute substitution linéaire et fractionnaire faite à la fois sur $x$, $y$, $\xi$.

*Resal.* — Mouvement dans un milieu, dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse de la vitesse. (1329-1336).

Si, après avoir fait subir à un pendule un petit écart, on lui imprime une vitesse horizontale du même ordre de petitesse, il décrira en projection horizontale une ellipse ayant pour centre le point de suspension et dont le grand axe se déplace dans le sens du mouvement avec une vitesse relativement petite et proportionnelle au produit des axes de l'ellipse.

L'expérience montre, en outre, que le grand axe diminue graduellement, évidemment par le fait de la résistance de l'air.

Cette résistance a-t-elle une influence sensible sur le déplacement giratoire de l'ellipse? M. Resal, soumettant au calcul cette question qu'il avait abordée antérieurement par des procédés géométriques, montre que la résistance de l'air n'a d'autre effet que de réduire les axes de l'ellipse et d'augmenter l'aplatissement, mais qu'elle n'influe pas sur le déplacement du sommet.

*Cesaro.* — Sur une fonction arithmétique. (1340-1343).

M. Cesaro rappelle qu'il s'est occupé à diverses reprises de la remarquable fonction arithmétique considérée par M. Bougaïeff dans sa récente Communication *Sur une intégrale numérique suivant les diviseurs*. Cette fonction $\nu(n)$, nulle en général, prend la valeur $\log p$ toutes les fois que $n$ devient égal à une puissance d'un nombre premier quelconque $p$.

M. Cesaro retrouve, par des considérations nouvelles, les divers résultats obtenus par M. Bougaïeff dans la Communication susdite, entre autres cette expression curieuse des nombres de Bernoulli

$$B_m = 2(-1)^{\frac{m}{2}+1}\frac{m!}{(2\pi)^m}\,\frac{\log 2^{\frac{1}{2^m}}.3^{\frac{1}{3^m}}.4^{\frac{1}{4^m}}.5^{\frac{1}{5^m}}\ldots}{\log 2^{\frac{1}{2^m-1}}.3^{\frac{1}{3^m-1}}.4^{\frac{1}{4^m-1}}.5^{\frac{1}{5^m-1}}\ldots}$$

Il démontre même un théorème plus général que celui d'où M. Bougaïeff a déduit cette formule, en s'appuyant sur la propriété essentielle de la fonction $\nu$ exprimée par l'égalité

$$\nu(a)+\nu(b)+\nu(c)+\ldots=\log n,$$

$a, b, c, \ldots$ désignant tous les diviseurs de $n$.

Plus généralement, si l'on prend une fonction $\psi$ telle qu'on ait, pour toutes les valeurs entières de la variable, $\psi(x)\,\psi(y)=\psi(xy)$, on peut écrire

$$\sum\psi\left(\frac{n}{a}\right)\psi(a)\,\nu(a)=\psi(n)\log n,$$

d'où l'on déduit

$$\sum_1^\infty\frac{\psi(n)}{n^m}\sum_1^\infty\frac{\psi(n)\,\nu(n)}{n^m}=\sum_1^\infty\frac{\psi(n)\log n}{n^m}.$$

Cette relation est l'expression du théorème de M. Cesaro. Si l'on prend $\psi(n) = \sin\frac{\pi n}{2}$, elle montre que la somme

$$1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \ldots = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{E_{m-1}}{(m-1)!} \quad (m \text{ impair})$$

est égale au quotient de

$$\frac{\log 1}{1^m} - \frac{\log 3}{3^m} + \frac{\log 5}{5^m} - \ldots$$

par

$$\frac{\nu(1)}{1^m} - \frac{\nu(3)}{3^m} + \frac{\nu(5)}{5^m} - \ldots = \sum_1^\infty \frac{\psi(p)\log p}{p^m - \psi(p)},$$

d'où résulte, pour exprimer les nombres d'Euler, la formule

$$E_m = 2(-1)^{\frac{m}{2}}\, m!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1} \frac{\log \dfrac{5^{\frac{1}{5^{m+1}}}\cdot 9^{\frac{1}{9^{m+1}}}\cdot 13^{\frac{1}{13^{m+1}}}\cdot 17^{\frac{1}{17^{m+1}}}\cdots}{3^{\frac{1}{3^{m+1}}}\cdot 7^{\frac{1}{7^{m+1}}}\cdot 11^{\frac{1}{11^{m+1}}}\cdot 15^{\frac{1}{15^{m+1}}}\cdots}}{\log \dfrac{5^{\frac{1}{5^{m+1}-1}}\cdot 13^{\frac{1}{13^{m+1}-1}}\cdot 17^{\frac{1}{17^{m+1}-1}}\cdots}{3^{\frac{1}{3^{m+1}+1}}\cdot 7^{\frac{1}{7^{m+1}+1}}\cdot 11^{\frac{1}{11^{m+1}+1}}\cdots}}.$$

*Quiquet.* — Sur la loi de Makeham. (1465-1466).

*Picard.* — Sur la limite de convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles. (1466-1467).

Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe de $x$, $y$ quand $x$ et $y$ restent dans leur plan à l'intérieur des cercles ayant respectivement pour centres $x_0$, $y_0$ et pour rayons $a$, $b$, et soit M le module maximum de $f(x, y)$.

Briot et Bouquet ont démontré que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

admet une intégrale développable en série de Taylor et prenant pour $x = x_0$ la valeur $y_0$. Ils donnent comme rayon du cercle où la série converge nécessairement l'expression

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right).$$

M. Picard montre que la série de Taylor formée à l'aide de l'équation différentielle converge nécessairement à l'intérieur du cercle ayant pour rayon la plus petite des quantités $a$ et M, ce qui donne une limite manifestement supérieure à celle que trouvent Briot et Bouquet.

*Cosserat.* — Sur l'emploi du complexe linéaire de droites dans l'étude des systèmes linéaires de cercles. (1467-1469).

On sait que, si

$$\sum_1^5 a_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^5 b_i x_i = 0$$

sont les équations de deux sphères en coordonnées pentasphériques, les dix quantités

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \qquad (p_{ii} = 0, \quad p_{ik} = - p_{ki}).$$

sont les coordonnées du cercle intersection des deux sphères.

Si l'on établit des relations linéaires entre les $p_{ik}$, on a (Kœnigs) des systèmes linéaires de cercles $A_5$, $A_4$, $A_3$, $A_2$, $A_1$, $A_0$ dont l'indétermination est marquée par l'indice (la position d'un cercle dans l'espace dépendant de six paramètres).

La théorie des systèmes linéaires de droites peut se déduire d'un seul théorème; il existe de même pour les systèmes linéaires de cercles un théorème fondamental que voici :

Si l'on considère le système A le plus général, il existe une sphère K et un complexe linéaire de droites L tels que la droite qui joint les points d'intersection d'un quelconque des cercles du système avec la sphère K engendre un complexe, qui est L.

Réciproquement, les cercles qui coupent une sphère fixe K en deux points tels que la droite qui les joint engendre un complexe linéaire de droites constituent un système $A_5$ de cercles.

Lorsqu'on établit des relations entre les coefficients de $A_5$, il peut se produire des cas singuliers dont l'auteur signale les plus importants. Citons notamment le cas où le complexe qui, associé à une sphère, définit $A_5$, est un complexe spécial; alors il existera une infinité de sphères pouvant servir à définir $A_5$.

M. Cosserat indique quelques-unes des conséquences les plus essentielles qu'on peut déduire du théorème ci-dessus.

## *Kœnigs.* — Sur les volumes engendrés par un contour fermé dans un mouvement quelconque. (1512-1514).

Le volume engendré par un contour fermé, qui se déplace dans l'espace d'une manière quelconque, a pour expression

$$AU + BV + CW + LP + MQ + NR,$$

où A, B, C, L, M, N sont les coordonnées d'un système de segments qui dépend uniquement du contour fermé, et U, V, W, P, Q, R les coordonnées d'un autre système de segments qui dépend uniquement du déplacement considéré.

En considérant sept contours fermés liés invariablement les uns aux autres, on est conduit à ce théorème :

Entre les volumes engendrés par sept contours fermés d'une figure invariable, il y a une relation linéaire homogène, indépendante du mouvement.

De même, entre les volumes engendrés par un même contour dans sept mouvements donnés, il y a une relation linéaire et homogène, indépendante du contour.

Ces propositions sont susceptibles d'un grand nombre d'applications, parmi lesquelles on peut citer la suivante :

Si l'on considère une courbe gauche à courbure constante, son cercle oscula-

teur, de rayon constant R, engendre un volume égal à $\pi R^2 \alpha$, $\alpha$ étant l'arc correspondant de l'indicatrice sphérique des binormales.

*Cosserat.* — Sur les propriétés infinitésimales de l'espace cerclé. (1514-1517).

L'auteur considère comme élément de l'espace l'ensemble de deux points (*double-point*). Il nomme *couple* le système formé par une sphère et un double point situé sur cette sphère, et il dit qu'un couple est situé sur un cercle, si le cercle est sur la sphère et passe par le double point du couple.

Si l'on considère huit points d'un cercle C, deux à deux situés sur des droites concourantes en un point P, on aura quatre doubles points, dont le rapport anharmonique sera le rapport des quatre droites concourantes.

Si l'on appelle *corrélation* une correspondance entre les doubles points d'un cercle C relatifs à un point P et les sphères passant par ce cercle, la corrélation anharmonique sera la corrélation du premier ordre et de la première classe, et l'on aura ce théorème (qui complète une proposition de M. Demartres) :

Les couples formés par un double point d'une surface et la sphère tangente en ce double point, et qui sont situés sur une même génératrice circulaire, engendrent une corrélation harmonique.

Dans l'espace cerclé, un cercle infiniment voisin d'un cercle définit sur lui une corrélation anharmonique dont l'usage peut être habituellement substitué à celui du cercle infiniment voisin.

La rencontre de deux cercles infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles des coordonnées du cercle. Cette forme admet trois formes adjointes (Kœnigs) dont la considération, jointe à l'étude des corrélations anharmoniques, conduit à la classification des surfaces cerclées due à Enneper.

L'étude des corrélations anharmoniques conduit également, à l'égard des congruences de cercles, à considérer des foyers et des sphères focales.

Considérant les complexes de cercles, on parvient à définir des cercles singuliers et une surface de singularités.

A l'égard du système quintuplement indéterminé de cercles, on a également des cercles singuliers et une surface de singularités.

*Petot.* — Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques. (1517-1520).

Aux points correspondants de toutes les surfaces dont les lignes de courbure admettent la même représentation sphérique, le rapport des deux courbures d'une ligne de courbure d'un système a la même valeur.

Si ces lignes de courbure sont, pour l'une des surfaces, des hélices tracées sur des cylindres quelconques, il en est de même pour toutes les autres. Donc la recherche des surfaces ainsi définies se ramène à celle des systèmes de courbes sphériques orthogonales comprenant une famille d'hélices tracées sur des cylindres quelconques.

D'autre part, l'indicatrice sphérique d'une hélice est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire aux génératrices du cylindre sur lequel est tracée

cette hélice. On a d'ailleurs, pour revenir d'une courbe sphérique quelconque C' à la courbe sphérique C dont elle est l'indicatrice, la règle suivante :

On exprime le rayon de courbure $R_1$ de $C_1$ en fonction de l'arc $s_1$ de cette courbe. Par le centre O de la sphère, on trace un rayon vecteur $OM_1$ de $C_1$, la parallèle $ON_1$ au segment positif de la tangente en $M_1$ à $C_1$, puis, dans le plan perpendiculaire en O à $OM_1$, une droite OM faisant dans le sens positif avec $ON_1$ un angle $\omega$ donné par la formule

$$\omega = \pi - \int \frac{\sqrt{1 - R_1^2}}{R_1} ds_1;$$

la trace M de cette dernière droite sur la sphère décrit la courbe cherchée. De là résulte une construction très simple de l'hélice sphériqne.

M. Petot donne la règle à suivre pour obtenir sur la sphère le système de coordonnées $u$, $v$ le plus général comprenant une famille d'hélices ($v$). Le problème dépend de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre qui se ramène (comme l'a montré M. Darboux) à une équation de Laplace quand on sait intégrer l'équation des trajectoires orthogonales des hélices ($v$).

*Jensen*. — Sur un théorème général de convergence. Réponse aux remarques de M. Cesaro. (1520-1522).

*Poincaré*. — Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation. (1571-1574).

Dans une thèse de date récente, M. Hamy a montré que, si une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation, est composée de couches de densités différentes, les surfaces de séparation de deux couches consécutives ne peuvent être toutes des ellipsoïdes.

Pour établir cette proposition, M. Hamy a commencé par démontrer le théorème suivant : « Si toutes les surfaces de séparation étaient des ellipsoïdes, tous ces ellipsoïdes seraient homofocaux ».

Ce lemme, d'après M. Poincaré, est susceptible de la généralisation que voici :

Que l'on imagine un noyau solide de densité $\rho$ variable en chaque point, recouvert entièrement de deux couches fluides de densités $\rho_1$ et $\rho_2$, la seconde enveloppant la première, et le tout animé d'un mouvement de rotation commun; si les surfaces extérieures des deux couches fluides sont des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes seront homofocaux.

Il est d'ailleurs possible d'imaginer à l'intérieur du noyau solide une distribution de la densité telle que les deux couches fluides prennent effectivement la forme de deux ellipsoïdes homofocaux.

Le résultat qui précède s'étend au cas de $n$ couches recouvrant un noyau solide et se recouvrant les unes les autres. La surface extérieure et les surfaces de séparation successives doivent être des ellipsoïdes homofocaux, si elles sont ellipsoïdales.

*Gylden*. — Quelques remarques relativement à la représentation des nombres irrationnels. (1584-1587).

Si l'on développe un nombre incommensurable compris entre 0 et 1 en frac-

tion continue, l'expérience montre qu'on trouve ordinairement pour les quotients incomplets successifs des valeurs entières. On est donc amené à se poser la question suivante : Quelle est la probabilité pour que, $\mu$ étant pris au hasard, on trouve parmi les quotients incomplets un entier donné à l'avance? ou encore : Existe-t-il une valeur probable de ces quotients incomplets?

M. Gylden répond par l'affirmative et trouve pour cette valeur probable le nombre 2.

*Liouville* (*R.*). — Sur certaines équations différentielles du premier ordre. (1648-1651).

L'équation différentielle

$$y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0,$$

où les $a$ sont des fonctions données de la variable indépendante, est réductible par la substitution

$$2(s_3 y + a_2 a_1) = \frac{3h_2 Y' + (b_1 - 3h_2 b) Y}{2h_1(Y' - b_2 Y)},$$

où $s_3$, $h_1$, $h_2$, $b_2$ sont des fonctions convenables de $x$ qu'on obtient par des calculs toujours possibles, à une équation linéaire du troisième ordre, dont les coefficients ne renferment aucun paramètre.

*Cesaro*. — Sur les fondements du calcul asymptotique. (1651-1654).

Soit

$$f(a) + f(b) + f(c) + \ldots = F(x),$$

où $a, b, c, \ldots$ sont les diviseurs de $n$. M. Cesaro montre que, si la série

$$f(1) + \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{3} f(3) + \ldots$$

est absolument convergente, la fonction $f$ est moyennement nulle et la fonction F égale en moyenne à la somme de la série.

Par exemple, on sait que les fonctions de Mertens et de Gauss sont liées par la relation

$$\frac{\mu(a)}{a} + \frac{\mu(b)}{b} + \frac{\mu(c)}{c} + \ldots = \frac{\varphi(n)}{n},$$

et que la série

$$\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{4} + \frac{\mu(3)}{9} + \ldots = \frac{6}{\pi^2}$$

est absolument convergente. Donc $\frac{\varphi(n)}{n}$ est, en moyenne, égale à $\frac{6}{\pi^2}$. Peut-on en conclure que $\varphi(n)$ est asymptotique à $\frac{6}{\pi^2} n$?

M. Cesaro fait voir que cette conclusion est légitime en démontrant le théorème suivant : « Si la fonction $F'(n)$ est moyennement égale à $\sigma$, la fonction $n^r F(n)$ est asymptotique à $\sigma n^r$. »

L'auteur indique même une proposition plus générale. On sait que, si la série

à termes positifs $\Sigma u_n$ est divergente, on a

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lim a_n,$$

pourvu que la limite du second membre existe, tandis que la moyenne $\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$ tendrait vers une limite $\lambda$. Dans ce cas, et sous la condition

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = k > 0,$$

on a, d'après M. Cesaro,

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lambda.$$

*Lecornu.* — Sur les mouvements giratoires des fluides. (1654-1657).

Un liquide est dit animé d'un mouvement giratoire lorsque tout s'y passe symétriquement autour d'un axe $Oz$. M. Lecornu examine le cas où, le fluide étant incompressible, les tourbillons seraient représentés par les vitesses des divers points d'un solide tournant uniformément autour de l'axe.

Si $u, v, w$ désignent les composantes de la vitesse : 1° dans la direction opposée à la distance $r$ à l'axe; 2° dans la direction de l'horizontale perpendiculaire à $r$; 3° dans la direction de la verticale $Oz$, on a, dans le cas en question,

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad w = -kr^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$k$ étant une constante et $\varphi$ une fonction assujettie à la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0.$$

M. Lecornu signale deux solutions simples de cette équation aux dérivées partielles

$$\varphi = b[(z+a)^2 - r^2 \log r] \qquad \text{et} \qquad \varphi = b\sqrt{r^2 + (z+a)^2},$$

où $a$ et $b$ désignent des fonctions quelconques du temps.

En prenant la seconde solution et réduisant $a$ et $b$ à des constantes (mouvement permanent), on voit que les trajectoires sont situées sur des surfaces de révolution, algébriques et du huitième ordre; la région où le mouvement est ascendant est séparée de celle où il est descendant par la surface du sixième ordre

$$r^2\sqrt{r^2 + (z+a)^2} = \frac{b}{k}.$$

Si $k = 0$, le mouvement giratoire est dépourvu de tourbillons (au sens d'Helmholtz). Les trajectoires se réduisent alors à des loxodromies tracées sur des sphères concentriques.

*Defforges.* — Sur un point de l'histoire du pendule. (1657-1660).

Preuves du droit de priorité de Prony dans l'indication de la méthode à suivre pour déterminer la longueur du pendule simple en faisant osciller un pendule composé autour de deux ou de trois axes attachés à ce pendule.

*Wolf.* — Remarques relatives à la Note de M. Defforges. (1660-1662).

*Gyldén.* — Quelques remarques relatives à la représentation de nombres irrationnels au moyen des fractions continues. (1777-1781).

*Goursat.* — Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. (1786-1788).

A toute substitution orthogonale à quatre variables on peut faire correspondre une substitution linéaire définie par les deux systèmes de formules

$$(\text{A}) \qquad \eta_1' = \frac{a\eta_1 + b}{c\eta_1 + d}, \qquad \xi' = \frac{l\xi + m}{p\xi + q},$$

$$(\text{B}) \qquad \eta_1' = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad \xi' = \frac{l\eta_1 + m}{p\eta_1 + q}.$$

La recherche des groupes d'ordre fini de substitutions linéaires orthogonales à quatre variables se trouve ainsi ramenée à la recherche des groupes d'ordre fini composés de substitutions de la forme (A) ou de la forme (B).

Après avoir donné des règles pour former ces derniers groupes, M. Goursat remarque que, si l'on désigne par $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'un point et que l'on pose

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}, & u_2 &= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}, \\ u_3 &= \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1}, & u_4 &= \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}, \end{aligned}\right\} \quad (u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=1),$$

toute substitution orthogonale effectuée sur les $u$ définit un mode de transformation de l'espace qui conserve les angles.

Une pareille transformation équivaut à un certain nombre d'inversions. On voit donc qu'à tout groupe fini de substitutions orthogonales à quatre variables correspond une division régulière de l'espace en un nombre fini de régions dont chacune se déduit de la première par une suite d'inversions.

Parmi les divisions ainsi obtenues, il y a lieu de considérer celles où les régions sont des tétraèdres à faces planes ou sphériques, deux tétraèdres qui ont une face commune étant symétriques par rapport à cette face; tous ces tétraèdres se déduisent de l'un d'entre eux en prenant le symétrique du premier par rapport à une de ses faces, puis le symétrique du nouveau tétraèdre et ainsi de suite.

Les divisions précédentes de l'espace peuvent être rattachées aux figures régulières de l'espace à quatre dimensions.

*Perrin.* — Sur la relation qui existe entre $p$ fonctions entières de $p-1$ variables. (1789-1791).

Soient $u, v, w, \ldots, p$ fonctions entières quelconques de $p-1$ variables (non homogènes) $x, y, z \ldots$. Le résultant R de ces fonctions peut être mis sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} R = R_{100\ldots}\, u + R_{010\ldots}\, v + R_{001\ldots}\, w + \ldots \\ \quad - \frac{1}{2!}(R_{200\ldots}\, u^2 + R_{020\ldots}\, v^2 + \ldots + 2R_{110\ldots}\, uv + \ldots) \\ \quad + \frac{1}{3!}(R_{300\ldots}\, u^3 + \ldots + 3R_{210\ldots}\, u^2 v + \ldots + 6R_{111\ldots}\, uvw + \ldots) \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $R_{qrs\ldots}$ désigne la dérivée partielle $\frac{\partial^{q+r+s+\ldots} R}{\partial a^q\, \partial b^r\, \partial c^s \ldots}$. Cette formule établit entre les $p$ fonctions $u, v, w, \ldots$ une relation qui est de degré $\mu = mnp\ldots$ par rapport à $x, y, z, \ldots$ et de degrés $\frac{\mu}{m}, \frac{\mu}{n}, \frac{\mu}{p}, \ldots$ par rapport aux coefficients de $u, v, w, \ldots$.

La relation précédente n'est autre que celle sur l'existence de laquelle est fondée la méthode d'élimination de Bézout. Il est donc toujours possible de donner aux polynômes multiplicateurs de Bézout (et cela de plusieurs manières) la forme de fonctions entières des fonctions données elles-mêmes. Quand on ne s'astreint pas à leur donner cette forme, la relation (1) montre entre quelles limites ils deviennent indéterminés.

En la différentiant, on obtient de nouvelles relations qui peuvent s'écrire abréviativement

$$\frac{d^{q+r+s+\ldots} R}{dx^q\, dy^r\, dz^s \ldots} = 0,$$

et qui permettent de préciser les conditions d'existence des divers genres de solutions multiples d'un système $(u, v, w, \ldots)$.

*Cesaro.* — Sur un théorème de Kummer. (1791-1794).

Réponse à la dernière Note de M. Jensen.

---

ACTA MATHEMATICA (1).

Tome IX; 1886.

*Bendixon* (*I.*). — Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss. (1-34).

La formule d'interpolation de Gauss donne l'expression d'une fonction ra-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XIV, p. 59.

tionnelle entière $f(x)$ de degré $n-1$ vérifiant les $n$ relations

$$f(a_\nu) = A_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sous la forme

$$f(x) = A_1 + A'_2(x-a_1) + A''_3(x-a_1)(x-a_2) + \ldots + A_n^{(n-1)}(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}),$$

où les quantités $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ sont formées d'après des lois très simples au moyen des quantités $A_\nu$. L'auteur s'est proposé d'étendre cette formule à une fonction analytique quelconque $f(x)$ vérifiant une infinité de relations

$$f(a_\nu) = A_\nu.$$

Il est amené dans ce but à étudier d'abord les propriétés des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\nu),$$

où les $B_\nu$ sont des constantes indépendantes de $x$; ces propriétés sont différentes suivant que la quantité $a_\nu$ a une limite finie $a$ pour $\nu$ infini, ou que le module de $a_\nu$ augmente indéfiniment avec $\nu$.

Si $\lim a_\nu = a$ pour $\nu = \infty$, les séries précédentes présentent la plus grande analogie avec les séries ordonnées suivant les puissances entières de $x-a$, comme cela résulte de la proposition fondamentale suivante :

*Si une série de la forme* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ *ou* $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$ *est convergente pour* $x = x_1$, *elle est absolument convergente pour chaque valeur de* $x$ *telle que* $|x-a| < |x_1 - a|$.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, si l'on a choisi un nombre entier $m$ assez grand pour que

$$\left| \frac{x - a_{m+\nu}}{x_1 - a_{m+\nu}} \right| < \varepsilon < 1,$$

le module du terme général de la série peut s'écrire

$$|B_{m+\nu}(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m+\nu})| \times \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m-1})} \right| \times \left| \frac{(x-a_m)\ldots(x-a_{m+\nu})}{(x_1-a_m)\ldots(x_1-a_{m+\nu})} \right|,$$

et l'on voit immédiatement que ce module est inférieur à $k\varepsilon^\nu$, $k$ désignant un nombre fixe. De ce théorème on déduit une suite de théorèmes correspondant aux propositions connues d'Abel sur les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable. Ainsi toute série (1) ou $\lim a_\nu = a$ est absolument convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon $r$ ayant son centre au point $a$ et divergente à l'extérieur; la convergence est *uniforme* à l'intérieur de tout cercle concentrique au premier et de rayon plus petit. Sur le cercle de convergence lui-même, la série peut être convergente ou divergente, mais,

si elle est convergente en un point $\alpha$ de ce cercle, on a l'égalité

$$\lim_{\varepsilon=0} f[\alpha-\varepsilon(\alpha-a)] = f(\alpha),$$

$\varepsilon$ étant réel et positif.

Il suit de là que, si une fonction $f(x)$ peut être représentée dans le domaine du point $a$ par une série convergente de la forme (1), cette fonction $f(x)$ est égale dans ce domaine à une fonction analytique de $x$ et peut par conséquent être représentée par une série $P(x-a)$. Inversement, étant donnée une fonction analytique régulière dans le domaine du point $a$, si cette fonction peut être développée en série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, les coefficients $B_\nu$ se déduisent aisément des valeurs $A_\nu$ que prend la fonction aux points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. On a, par exemple

$$B_0 = A_1, \qquad B_1 = \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}, \qquad \cdots.$$

Pour que la série ainsi obtenue représente la fonction $f(x)$, il faut évidemment qu'elle soit convergente; cette condition est d'ailleurs suffisante, car, si l'on pose

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu),$$

les coefficients $B_\nu$ étant calculés au moyen des égalités précédentes, l'égalité $\varphi(x)=f(x)$ subsiste pour une infinité de valeurs dans le voisinage du point $a$.

En appliquant cette méthode à la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ $(a \neq 0)$, on parvient à une série qui est convergente tant que $|x-a|<|a|$, et l'on a pour toutes ces valeurs de $x$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a_1} - \frac{x-a_1}{a_1 a_2} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{a_1 a_2 a_3}, \qquad \cdots,$$

et, en remplaçant $x$ par $\alpha-x$, où $\alpha \neq a$, on obtient la nouvelle formule

$$\frac{1}{\alpha-x} = \frac{1}{\alpha-a_1} + \frac{x-a_1}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})} + \ldots,$$

qui a lieu pour $|x-a|<|\alpha-a|$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction analytique régulière dans le domaine du point $a$; les points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ et $x$ étant pris à l'intérieur du cercle de convergence C, on a la relation

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F(\alpha)\,d\alpha}{\alpha-x},$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence concentrique et intérieure à la première et comprenant toutes les quantités $x, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Si l'on y remplace $\frac{1}{\alpha-x}$ par le développement précédent, $F(x)$ se présente sous la

forme suivante

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}\,dx + \frac{(x-a_1)}{2\pi i}\int_C \frac{F(\alpha)}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}\,d\alpha + \dots$$
$$+ \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{\nu-1})}{2\pi i}\int_C \frac{F(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\alpha)(x-a_1)\dots(x-a_\nu)\,d\alpha}{(\alpha-x)(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_{\nu+1})};$$

le reste tendant vers zéro lorsque $\nu$ augmente indéfiniment, on en conclut que $F(x)$ peut être développée à l'intérieur de C en une série de la forme (1) et les coefficients ont nécessairement les valeurs qui se calculent directement au moyen des valeurs $A_\nu$ de $F(x)$ pour les valeurs $a_\nu$ de $x$.

L'auteur passe ensuite aux séries de la forme (1) où l'on a $\lim a_\nu = \infty$ pour $\nu = \infty$, et il prend d'abord un cas particulier très simple

$$(2) \qquad \frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)} + \dots + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_{\nu+1})} + \dots,$$

dont l'étude conduit à des conclusions intéressantes. La relation

$$\frac{1}{\alpha-a_1} + \dots + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_{\nu+1})} = \frac{1}{\alpha - x}\left(1 - \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right),$$

nous ramène à l'étude du produit infini

$$(3) \qquad \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)};$$

si la série $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ est convergente, on voit que ce produit est convergent pour toute valeur de $x$, et par conséquent la série (2) sera convergente dans tout le plan. Si la série $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ n'est pas convergente, M. Bendixon se borne au cas où les $a_\nu$ sont tous réels et positifs et où la série $\sum\frac{1}{a_\nu}$ est divergente. L'étude du produit infini (3) le conduit à cette conclusion que la série (3) est convergente si $R(\alpha - x) < 0$, et divergente dans le cas où $R(a - x) > 0$, R désignant la partie réelle d'une quantité imaginaire; dans la région comprise dans le domaine de convergence, la série (2) est absolument et uniformément convergente.

On arrive encore à des conclusions très nettes relativement aux séries de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-r_1)\dots(x-r_\nu),$$

où $r_1, \ldots, r_\nu, \ldots$ sont des quantités positives telles que $\lim_{\nu=\infty} r_\nu = \infty$ et que la série $\sum \frac{1}{r_\nu}$ est divergente. En général, pour une série de cette espèce, il existe un nombre $\rho$ tel que la série est convergente si $R(x) > \rho$ et divergente si $R(x) < \rho$. Dans toute région prise dans ce domaine, la série est uniformément convergente, mais il y a en général un domaine de convergence absolue différent du premier. Il existe, en effet, un autre nombre $\sigma \geq \rho$ tel que la série est absolument convergente, si $R(x) > \sigma$ et seulement dans ce cas. Le plan se trouve ainsi divisé en trois régions distinctes au point de vue de la convergence. Les résultats précédents s'étendent immédiatement aux séries de la forme

$$\Sigma B_\nu (x - r_1 e^{\theta_1}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta_\nu}),$$

où $r_1, \ldots, r_\nu, \ldots$ sont réels et positifs, la série $\sum \frac{1}{r_\nu}$ étant divergente.

Les séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty,$$

où la série $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$ est convergente, possèdent des propriétés toutes différentes. Pour assurer leur convergence ou leur convergence absolue dans tout le plan, il suffit qu'elle ait lieu pour une valeur particulière $\alpha \neq a_\nu$ de la variable; de plus, il suffit qu'elles soient simplement convergentes en un point $\alpha$ pour qu'elles soient uniformément convergentes dans toute région finie du plan.

M. Bendixon reprend ensuite l'étude de la série

$$\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{\nu+1})} + \ldots$$

en faisant quelques hypothèses plus générales sur les $a_\nu$:

1° Tous les $a_\nu$ sont réels, $\sum \frac{1}{a_\nu}$ est convergent ainsi que $\sum \frac{1}{a_\nu^2}$, mais $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$ est divergent. La série est convergente pour toute valeur de $x$, et uniformément convergente dans toute région finie du plan, mais la convergence absolue n'a lieu en aucun point.

2° On conserve les hypothèses précédentes, sauf que $\sum \frac{1}{a_\nu^2}$ est supposé divergent. Le domaine de convergence de la série se compose de la partie du plan des $x$ située entre les deux branches de l'hyperbole

$$\xi^2 - \eta^2 = R(\alpha^2);$$

dans toute région prise dans ce domaine, la série est uniformément convergente, mais la convergence absolue n'a lieu en aucun point.

Le Mémoire se termine par quelques exemples et en particulier par un développement en série de $D_x \log \Gamma(x+1)$.

*Tchebycheff (P.).* — Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux. (35-56).

Dans un Mémoire *Sur les valeurs limites des intégrales,* publié en 1874, dans le *Journal de Liouville,* l'auteur a communiqué quelques résultats sur les valeurs limites des intégrales, qu'il commence par rappeler.

Soit $f(x)$ une fonction toujours positive entre les limites $a$ et $b$, et soient $A_0, A_1, \ldots, A_{2m-1}$ les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b x f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx;$$

si l'on développe en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ l'intégrale $\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x}$, on aura, en négligeant les termes de degré supérieur à $2m$,

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_m}{z^{2m}} + \ldots$$

La fraction rationnelle du second membre étant réduite en fraction continue, on aura, avec le même degré d'approximation,

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}.$$

Cela posé, soit $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ la $m^{\text{ième}}$ réduite et soient

$$z_1, z_2, \ldots, z_{l-1}, z_l, \ldots, z_{n-1}, z_n, \ldots, z_m$$

les $m$ racines de l'équation $\psi_m(z) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante; le résultat rappelé par M. Tchebycheff peut s'énoncer ainsi : L'intégrale

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$$

est comprise entre les deux limites

$$\mathop{\mathcal{E}}_{z_{l+\omega}}^{z_{n-\omega}} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \quad \mathop{\mathcal{E}}_{z_{l-\omega}}^{z_{n+\omega}} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

où $\omega$ est une quantité positive infiniment petite et où le symbole $\mathop{\mathcal{E}}_h^k F(z)$ représente le résidu intégral de $F(z)$ entre les limites $h$ et $k$.

Dans le Mémoire actuel, l'éminent géomètre indique un résultat plus général relatif aux intégrales de la forme

$$\int_a^v f(x)\,dx,$$

où la limite supérieure $v$ reste arbitraire. Dans ce cas, les valeurs limites de

l'intégrale sont données par les inégalités

$$\sum_{a-\omega}^{v-\omega} F(z) < \int_a^v f(x)\,dx < \sum_{a-\omega}^{v+\omega} F(z);$$

$F(z)$ désigne une fonction rationnelle qui peut être représentée par une fonction continue

$$F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \dots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}},$$

dont les $m$ premiers dénominateurs sont les mêmes que ceux du développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z - x}$$

et ne dépendent par conséquent que des intégrales supposées connues

$$A_0 = \int_a^b f(x)\,dx, \quad A_1 = \int_a^b x f(x)\,dx, \quad \dots \quad A_{2m-1} = \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx,$$
$$a < v < b.$$

Z est une fonction linéaire de $z$ qui dépend de $a$, $b$, $v$, des intégrales $A_0$, $A_1$, ..., $A_{2m-1}$ et dont l'expression est différente suivant qu'on connaît ou non l'intégrale

$$A_{2m} = \int_a^b x^{2m} f(x)\,dx.$$

M. Tchebycheff montre comment cette formule conduit aux résultats énoncés dans le Mémoire du *Journal de Liouville*, et termine par l'application au problème suivant :

Trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)\,dx,$$

où la fonction inconnue $f(x)$ ne devient jamais négative entre o et $v$, connaissant les trois quantités

$$p = \int_0^b f(x)\,dx, \qquad d = \frac{\int_0^b x f(x)\,dx}{\int_0^b f(x)\,dx}, \qquad k = \int_0^b (x-d)^2 f(x)\,dx.$$

Les quantités $p$, $d$, $k$ déterminent évidemmment les trois intégrales

$$\int_0^b f(x)\,dx, \qquad \int_0^b x f(x)\,dx, \qquad \int_0^b x^2 f(x)\,dx.$$

de sorte qu'on a tous les éléments nécessaires pour former la fraction rationnelle $F(z)$.

*Markoff (A.).* — Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchebycheff. (57-70).

L'énoncé du problème est le suivant.

Soient

$\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_{n+1}(z)$, $\Omega(z)$ des fonctions données de $z$;
$a$ et $b$ des nombres donnés;
$m_1$, $m_2$, ..., $m_\nu$ des nombres positifs et indéterminés;
$y_1$, $y_2$, ..., $y_\nu$ des nombres indéterminés compris entre $a$ et $b$;
$\nu$ un nombre indéterminé;

il faut trouver les nombres

$$\nu,\ m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\nu,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\nu,$$

tels que les sommes

$$\Sigma m_i \lambda_i(y_i),\quad \Sigma m_2 \lambda_2(y_i),\quad \ldots,\quad \Sigma m_i \lambda_{n+1}(y_i), \qquad (i=1, 2, \ldots \nu)$$

aient des valeurs données à l'avance

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n+1}$$

et en même temps tels que la somme

$$\Sigma m_i \Omega_i(y_i),$$

étendue aux valeurs de $y_i$, qui ne dépassent pas une certaine limite $v$

$$(a < v < b),$$

soit maximum ou minimum.

On suppose que certains déterminants formés avec les fonctions $\lambda_i$, $\Omega$ et leurs dérivées sont positifs pour toutes les valeurs de $z$ comprises entre $a$ et $b$.

*Gino Loria.* — Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (71-72).

Remarque sur une démonstration donnée par M. Holst dans le tome VIII des *Acta* (p. 155).

*Dobriner (H.).* — Les surfaces à courbure constante avec un système de lignes de courbure sphérique représentées au moyen des fonctions thêta à deux variables. (73-102).

Les surfaces à courbure constante admettant un système de lignes de courbure sphériques ont été étudiées par M. Enneper (*Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, p. 421-443; 1868). L'auteur a montré que leur représentation dépendait de trois fonctions $p$, $q$, $\varphi$ d'une variable $u$, fonctions qu'il s'agit d'obtenir par l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Les fonctions $p$, $q$ satisfont à deux équations différentielles du second

ordre pour lesquelles les deux intégrales premières sont connues. La fonction $\varphi$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{p}{gq} - \frac{\cos\varphi}{q}.$$

M. Dobriner avait reconnu depuis longtemps que les fonctions $p$, $q$ étaient des quotients de fonctions thêta à deux variables; d'un autre côté, ses études sur la théorie générale des surfaces qui admettent des lignes de courbure sphériques (*Crelle*, t. 94, p. 153-155) l'avaient amené à cette conclusion que la considération de la fonction $\varphi$ n'était pas indispensable et que la représentation de la surface dépendait essentiellement de la détermination de deux systèmes de coefficients de substitutions orthogonales, ou, au point de vue géométrique, de deux courbes imaginaires pour chacune desquelles la tangente, la normale principale et la binormale constituent un de ces systèmes orthogonaux. Or l'expression de $p$, $q$ comme quotients de fonctions thêta donne lieu de penser que l'un des systèmes orthogonaux cherché pouvait bien être identique avec le système orthogonal bien connu formé avec les neuf quotients de fonctions thêta paires : c'est en effet ce qui arrive, et c'est un des points principaux du présent Mémoire de M. Dobriner. Les éléments de la seconde courbe auxiliaire s'obtiennent ensuite au moyen de fonctions thêta d'une seule variable, comme on pouvait le prévoir d'après le travail de M. Enneper.

*Weber* (*H.*). — Théorie des corps numériques abéliens. (105-130).

Dans ce Mémoire, qui fait suite à celui qui a paru sous le même titre dans le t. VII des *Acta*, M. Weber montre que la constitution d'un groupe abélien peut être entièrement caractérisée par une certaine suite de nombres entiers, les *invariants du groupe;* d'où le problème suivant :

*Déterminer tous les corps abéliens d'un groupe donné.*

D'après le précédent Mémoire, on a seulement pour cela à former les *périodes de la division du cercle* avec certaines propriétés prescrites. Mais on a montré, dans ce même travail, qu'un même corps abélien est contenu dans plusieurs corps circulaires complets, c'est-à-dire qu'ils peuvent être représentés au moyen de racines de l'unité de différents degrés; en conséquence, le précédent problème doit être complété comme il suit :

Représenter les corps abéliens d'un groupe donné par les racines de l'unité de moindre degré.

C'est à l'étude de ces deux problèmes qu'est consacré le présent travail de M. Weber.

*Zeller* (*Ch.*). — Formules pour le calendrier. (131-136).

*Mellin.* — Sur la connexion entre certaines équations différentielles linéaires et certaines équations aux différences. (137-166).

Le Mémoire de M. Mellin fait suite à un travail sur la théorie de la fonction Γ inséré dans le tome VIII des *Acta*, et qui a été signalé dans le *Bulletin* (t. XIV,

p. 69). Il concerne les propriétés des intégrales d'équations linéaires de la forme

$$(a_0 - b_0 x)x^n y^{(n)} + (a_1 - b_1 x)x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + (a_n - b_n x)y = 0.$$

On y trouvera, en particulier, une formule qui contient comme cas très spécial la relation classique

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{a-1}\,dx.$$

*Stieltjes* (*T.-J.*). — Note sur un développement de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2}\,dx$. (167-176).

Soit

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2}\,dx,$$

on trouve facilement le développement

$$(1) \qquad \varphi(a) = e^{a^2}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \frac{1.3}{8a^5} + \frac{1.3.5}{16a^7} + \ldots\right).$$

La série est divergente, mais l'égalité (1) exprime que l'on a, pour $a = \infty$,

$$\lim a e^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim a^3\left(e^{-a^2}\varphi(a) - \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La formule (1) peut être remplacée par une formule plus précise

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(a) = e^{a^2}\left[\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{4a^3} + \ldots + \dfrac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n . a^{2n-1}}\right] \\ \qquad + \dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\displaystyle\int_{a_n}^a x^{-2n} e^{x^2}\,dx_1 = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_n + \mathrm{R}_n, \end{cases}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant certaines constantes positives parfaitement déterminées. En effet, les deux fonctions qui figurent aux deux membres de (2) ont même dérivée, et l'on démontre facilement qu'on peut toujours choisir $a_n$ de façon que ces deux fonctions soient égales pour une valeur très petite de $a$. Si ces constantes $a_1, a_2, \ldots$ sont connues, et si $a$ tombe entre $a_{n-1}$ et $a_n$, on aura les deux inégalités

$$\varphi(a) > \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_{n-1},$$
$$\varphi(a) < \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \ldots + \mathrm{T}_{n-1} + \mathrm{T}_n,$$

qui permettront de renfermer $\varphi(a)$ entre deux limites dont la différence est $\mathrm{T}_n$ L'objet principal du travail de M. Stieltjes est précisément de donner une méthode rapide de calcul pour ces constantes.

La formule (2) ne se prête pas facilement au calcul de $a_n$; l'auteur la rem-

place par une autre où figure la valeur principale d'une intégrale

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{V.}p. \int_0^\infty \frac{e^{a^2(1-x^2)}}{1-x^2}\, dx.$$

De cette relation, qui se démontre aisément, on tire

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{V.}p. \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1-x^2} e^{a^2(1-x^2)}\, dx.$$

Si l'on pose $a^2 = n + \eta$, on peut développer $\mathrm{R}_n$ suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, en employant une méthode donnée par l'auteur dans un Mémoire publié dans les *Annales de l'École Normale*, t. III; 1886. De ce développement on conclut que $\mathrm{R}_n$ s'annule pour une valeur finie de $\eta$ dont on peut trouver le développement, et l'on a ainsi

$$a_n^2 = n - \frac{1}{6} + \frac{8}{405}\frac{1}{n} + \frac{60}{25515}\frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Si l'on a pris $n$ de telle façon que $a_{n-1} < a < a_n$, l'erreur commise dans le calcul de $\varphi(a)$ sera moindre que $\mathrm{T}_n$; si $a$ est grand, ce terme est à peu près $\frac{0,707}{a}$. Dans les derniers paragraphes, M. Stieltjes montre comment on peut pousser encore plus loin l'approximation et obtenir une valeur très approchée du terme complémentaire $\mathrm{R}_n$.

## *Hacks.* — Quelques théorèmes sur des sommes de diviseurs. (177-181).

Ces théorèmes se rapportent à diverses fonctions numériques introduites par M. Lipschitz; la plus simple est la somme

$$\mathrm{F}(m) = f(1) + f(2) + \ldots + f(m),$$

où $f(x)$ désigne le nombre des diviseurs de l'entier $x$. On a

$$\mathrm{F}(m) = \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{m}\right],$$

où $[x]$ désigne l'entier contenu dans $x$.

Des théorèmes de cette nature, dus à M. Lipschitz et rappelés par M. Hacks, ont été donnés dans le tome C des *Comptes rendus* (*Bulletin*, $\mathrm{XI}_2$, p. 160).

M. Hacks donne ensuite divers résultats intéressants concernant la parité de ces fonctions; par exemple, on a

$$\mathrm{F}(m) \equiv [\sqrt{m}] \pmod{2}.$$

## *Tchebycheff.* — Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs. (182-184).

Intéressante application des recherches de l'auteur, dont il a été rendu compte plus haut, sur les valeurs limites des intégrales.

*Gyldén.* — Recherches sur la convergence des séries qui servent à la représentation des coordonnées des planètes. (185-294).

*Vetto.* — Sur les substitutions orthogonales. (295-300).

Réponse à une question posée par M. Stieltjes dans le tome VI des *Acta*.

Si $a_{k\lambda}$, $A_{k\lambda}$, ($k$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n$) sont les coefficients de deux substitutions orthogonales, on peut choisir $\delta_k = 1$, ou $\delta_k = -1$, de façon que le déterminant $|a_{k\lambda} + \delta_k A_{k\lambda}|$ puisse s'annuler, si $n$ est pair, sans que tous ses éléments s'annulent, et si $n$ est impair sans que tous les sous-déterminants du second ordre soient nuls.

*Berger.* — Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres. (301-320).

Signalons parmi les résultats obtenus par M. Berger d'une façon tout élémentaire la proposition suivante :

Si l'on désigne par $n$ un nombre positif impair, le nombre de toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

est égal à

$$4\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où $\delta$ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre $n$.

Cette proposition a été établie par Lejeune-Dirichlet au moyen du Calcul intégral.

Dans un autre ordre d'idées, citons encore la proposition suivante :

Si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs positives impaires de la variable $z$, on aura la formule

$$\sum_{h_0,\,h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2\sum_{n} \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où l'on a à observer que dans le premier membre $h_0$ parcourt tous les nombres pairs, et $h_1$ tous les nombres impairs positifs, et que, dans le second membre, $n$ parcourt tous les nombres impairs positifs et $\delta$ tous les diviseurs positifs du nombre $n$, pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

L'auteur transforme cette formule de diverses façons et en tire des conséquences, connues pour la plupart, mais que l'on ne s'attendait pas à obtenir par cette voie.

*Poincaré* (*H.*). — Sur les résidus des intégrales doubles. (321-380).

L'important Mémoire de M. Poincaré contient l'extension aux intégrales doubles du théorème célèbre de Cauchy sur les intégrales d'une fonction analytique d'une variable, prises le long d'un contour fermé. Une des premières difficultés du problème consistait dans l'absence de représentation géométrique. On sait en effet de quel secours est, pour la théorie des fonctions d'une va-

riable, la représentation employée par Gauss et Cauchy. Si l'on veut suivre la même méthode pour étudier les fonctions de deux variables imaginaires

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it,$$

on est conduit à regarder $x, y, z, t$ comme les coordonnées d'un point de l'espace à quatre dimensions. Mais le langage seul a une apparence géométrique; l'image sensible fait toujours défaut. M. Poincaré n'emploie que rarement ce langage hypergéométrique; il lui emprunte cependant les termes suivants dont il paraît difficile de se passer.

Un *point* est un système de valeurs réelles des quatre variables $x, y, z, t$; les *hypersurfaces*, les *surfaces*, les *lignes* sont constituées par les multiplicités à trois dimensions, à deux dimensions, à une dimension, c'est-à-dire par l'ensemble des points qui vérifient une, deux ou trois relations distinctes. Dans une intégrale double

$$\iint F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

le champ d'intégration est défini par deux relations entre les variables $x, y, z, t$; il y a une *surface d'intégration*. De même, si $F(\xi, \eta)$ est une fonction rationnelle, l'ensemble des points singuliers formera une surface qui ne devra avoir aucun point commun avec la surface d'intégration.

Voici comment l'auteur évite dans beaucoup de cas l'emploi de considérations hypergéométriques. Soient $\lambda, \mu, \nu$ les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire. Posons

$$(1) \quad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ désignant des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle des variables.

Lorsque le point $(\lambda, \mu, \nu)$ décrit l'espace tout entier, le point $(x, y, z, t)$ décrit dans l'hyperespace une hypersurface unicursale. De même, si le point $(\lambda, \mu, \nu)$ décrit une surface S, le point $(x, y, z, t)$ décrit dans l'hyperespace une surface S'; si S est une surface fermée, S' sera dite aussi fermée. On suppose de plus que lorsque le point $(\lambda, \mu, \nu)$ décrit S, le point $(x, y, z, t)$ décrit une seule fois S'. Par suite, toutes les fois que le point $(x, y, z, t)$ reste sur une même hypersurface unicursale, on peut le représenter par un point $(\lambda, \mu, \nu)$ de l'espace ordinaire, et de même toute surface d'intégration sera représentée par une surface ordinaire de l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$.

En posant simplement

$$x = \varphi_1 = \lambda, \qquad y = \varphi_2 = \lambda, \qquad z = \varphi_3 = \lambda, \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu) = \varphi_4(x, y, z),$$

la surface d'intégration sera définie par une surface S de l'espace ordinaire et une fonction rationnelle

$$t = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)},$$

P et Q étant deux polynômes entiers tels que $Q(x, y, z)$ ne soit nul pour aucun point réel. Il est aisé de voir que toute surface d'intégration, non susceptible de ce mode de représentation, peut être décomposée en plusieurs autres qui diffèrent très peu de surfaces algébriques susceptibles de ce mode de représentation. D'ailleurs, les théorèmes de l'auteur n'exigent pas que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

soient des fonctions rationnelles. Il suffit qu'elles restent uniformes et bien déterminées dans une portion de l'espace contenant la surface S qui sert d'*image* à la surface d'intégration.

Dans le paragraphe suivant, l'auteur définit d'une façon précise les conditions d'intégrabilité des expressions de la forme

$$(2) \qquad \iint \Sigma (X_i, X_k)\, dx_i\, dx_k,$$

$(X_i, X_k)$ désignant des fonctions des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telles que

$$(X_i, X_i) = 0, \qquad (X_i, X_k) = -(X_k, X_i).$$

Si l'on pose dans cette expression (2)

$$(3) \qquad x_i = \varphi_i(u, v),$$

elle devient

$$J = \int\int \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (X_i, X_k) \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v}\, du\, dv,$$

et elle offre un sens bien déterminé, si l'on convient de donner à $u$ et à $v$ toutes les valeurs qui satisfont à une certaine inégalité

$$(4) \qquad \psi(u, v) > 0.$$

On est ainsi amené à se poser la question suivante : Que faut-il pour que cette intégrale J ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de la courbe qui limite cette surface? En termes plus précis, imaginons que l'on fasse dans l'expression (2) un autre changement de variables

$$x_i = \varphi'_i(u, v),$$

la fonction $\varphi'_i$ étant en général différente de $\varphi_i$ mais telle que l'on ait $\varphi'_i = \varphi_i$, lorsque $\psi(u, v) = 0$, et conservons la même inégalité (4) pour définir l'intégrale double. Si dans ces conditions l'intégrale n'a pas changé, l'expression sous le signe $\iint$ est dite *intégrable*.

Pour trouver les conditions d'intégrabilité, M. Poincaré fait un changement de variables plus général,

$$x_i = \varphi_i(u, v, w)$$

dépendant d'un paramètre arbitraire $w$, les fonctions $\varphi_i$ étant telles que, lorsque $\psi(u, v) = 0$, ces fonctions sont indépendantes de $w$. Alors la surface d'intégration variera avec $w$, mais non la courbe qui limite cette surface. Il faut écrire que l'intégrale J ne dépend pas de $w$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dJ}{dw} = 0.$$

De la formule qui donne J on tire

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dw} = & \int\int \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv}\, du\, dv \\ & + \int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left( \frac{d^2 x_i}{du\, dw} \frac{dx_k}{dv} + \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} \frac{dx_i}{du} \right) du\, dv,\end{aligned}$$

et quelques transformations faciles reposant sur le théorème de Green permettent de ramener cette intégrale à la forme

$$\frac{dJ}{dw}=\iint\sum\left[\frac{d(X_i,X_k)}{dx_h}+\frac{d(X_k,X_h)}{dx_i}+\frac{d(X_h,X_i)}{dx_k}\right]\frac{D(x_i,x_k,x_h)}{D(u,v,w)}\,du\,dv,$$

le signe $\Sigma$ portant sur toutes les combinaisons $(i,k,h)$, où l'on ne considère pas comme différentes deux combinaisons qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres. L'expression de $\frac{dJ}{dw}$ devant être nulle quelles que soient les fonctions $\varphi_i$, il faudra que l'on ait

$$\frac{d(X_i,X_k)}{dx_h}+\frac{d(X_k,X_h)}{dx_i}+\frac{d(X_h,X_i)}{dx_k}=0;$$

ce sont les conditions d'intégrabilité, au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Ainsi pour l'intégrale double

$$\iint[(X,Y)\,dx\,dy+(X,Z)\,dx\,dz+(X,T)\,dx\,dt$$
$$+(Y,Z)\,dy\,dz+(Y,T)\,dy\,dt+(Z,T)\,dz\,dt],$$

on aura quatre conditions d'intégrabilité

$$\frac{d(X,Y)}{dz}+\frac{d(Y,Z)}{dx}+\frac{d(Z,X)}{dy}=0,$$
$$\frac{d(X,Y)}{dt}+\frac{d(Y,T)}{dx}+\frac{d(T,X)}{dy}=0,$$
$$\frac{d(X,Z)}{dt}+\frac{d(Z,T)}{dx}+\frac{d(T,X)}{dz}=0,$$
$$\frac{d(Y,Z)}{dt}+\frac{d(Z,T)}{dy}+\frac{d(T,Y)}{dz}=0.$$

Ces conditions d'intégrabilité s'appliquent immédiatement aux intégrales doubles des fonctions de deux variables complexes. Soit

$$\xi=x+iy,\qquad \eta=z+it$$

ces deux variables et $F(\xi,\eta)$ une fonction que l'on peut aussi écrire $P+iQ$, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire; P et Q vérifient les relations connues

$$(5)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial t},\qquad \frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Imaginons dans l'hyperespace une surface d'intégration définie par une surface S de l'espace $(\lambda,\mu,\nu)$ et par les équations fondamentales (1). Il importe d'abord de définir avec précision ce qu'on doit entendre par l'intégrale double

$$\iint F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

étendue à toute cette surface. Le produit sous le signe $\iint$ étant effectué d'après les règles ordinaires du calcul, cette expression devient

$$\iint[(P+iQ)\,dx\,dz+(iP-Q)\,dx\,dt+(iP-Q)\,dy\,dz-(P+iQ)\,dy\,dt].$$

2d Part -



Soient maintenant $u$ et $v$ deux variables auxiliaires telles que $\lambda$, $\mu$, $\nu$ soient des fonctions holomorphes de $u$ et de $v$ pour tous les points de la surface S; l'intégrale cherchée sera l'intégrale double ordinaire

$$\int\int\left|(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}+(i\mathrm{P}-\mathrm{Q})\frac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}\right.$$
$$\left.+(i\mathrm{P}-\mathrm{Q})\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}-(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})\frac{\partial(y,t)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv,$$

étendue à tous les systèmes de valeurs de $u$ et de $v$ qui correspondent aux différents points de la surface S. Si l'on ne pouvait trouver deux variables $u$ et $v$ satisfaisant à cette condition, on décomposerait la surface S en plusieurs régions assez petites pour que, dans chacune d'elles, on puisse exprimer $\lambda$, $\mu$, $\nu$ par des fonctions holomorphes de $u$ et de $v$.

L'ordre des variables $u$ et $v$ n'est pas indifférent, puisque l'intégrale change de signe quand on permute ces deux variables. Pour ne rien laisser d'indéterminé dans l'intégrale, l'auteur convient de distinguer sur la normale à une surface fermée les deux directions qui vont vers l'intérieur et vers l'extérieur; sur une surface non fermée, on peut toujours convenir de regarder un des côtés comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur. Cela étant, imaginons un observateur ayant les pieds en un point O de la surface S et la tête dirigée vers l'extérieur, et un contour fermé très petit C décrit sur la surface autour du point O. Si le point $(\lambda, \mu, \nu)$ décrit ce contour dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre par rapport à l'observateur, le point de coordonnées $(u, v)$ décrira dans son plan un autre contour fermé C'. Il faudra que ce contour soit décrit dans le même sens que le premier, les axes des $u$ et des $v$ étant disposés comme le sont d'ordinaire les axes des $x$ et des $y$ positifs.

L'intégrale double est ainsi complètement définie et elle rentre dans la catégorie considérée plus haut; on a en effet ici

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{Z}, \mathrm{T}) = 0, \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Z}) = (\mathrm{T}, \mathrm{Y}) = \mathrm{P}+i\mathrm{Q},$$
$$(\mathrm{X}, \mathrm{T}) = (\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = i\mathrm{P}-\mathrm{Q},$$

et les conditions d'intégrabilité sont remplies identiquement d'après les relations (5). Supposons d'après cela que, conservant les mêmes relations fondamentales (1), on fasse varier la surface S de l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$. Si l'on a d'abord deux surfaces S et S' limitées par un même contour C et telles que l'on puisse, par une déformation continue, passer de S à S' sans rencontrer aucun point pour lequel $\mathrm{P}+i\mathrm{Q}$ devienne infinie ou discontinue, il résulte aussitôt du théorème démontré plus haut que l'intégrale prise le long de S' est égale à l'intégrale prise le long de S: proposition absolument analogue au théorème de Cauchy et dont il est aisé de déduire de nombreuses conséquences. Dans l'hyperespace, les surfaces singulières sont définies par les deux équations

$$\psi_1(x, y, z, t) = 0, \qquad \psi_2(x, y, z, t) = 0;$$

$x$, $y$, $z$, $t$ étant remplacées dans ces équations par $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$, les deux équations des surfaces singulières se réduisent à deux relations

$$f_1(\lambda, \mu, \nu) = f_2(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

définissant dans l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$ certaines *courbes singulières*. Les résultats

précédents pourront alors s'énoncer comme il suit : étant données deux surfaces S et S′ limitées à un même contour C, si dans l'espace compris entre S et S′ il n'y a aucune courbe singulière, l'intégrale prise le long de S est égale à l'intégrale prise le long de S′. Plus généralement, si deux surfaces S et S′ de l'espace ($\lambda$, $\mu$, $\nu$) contiennent à leur intérieur les mêmes courbes singulières, les deux intégrales sont encore les mêmes. En résumé, l'intégrale prise le long d'une surface fermée de l'espace ($\lambda$, $\mu$, $\nu$) ne dépend que des courbes singulières comprises à l'intérieur de cette surface.

M. Poincaré applique d'abord cette théorie générale au calcul des résidus des fonctions rationnelles de deux variables, c'est-à-dire des intégrales doubles

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

prises sur une surface fermée. La fonction $F(\xi, \eta)$ étant de la forme

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)\, R(\xi, \eta)},$$

où P, Q, R sont trois polynômes entiers dont les deux derniers sont irréductibles, les courbes singulières sont de deux sortes : les unes sont définies par l'équation

$$Q[\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + \varphi_4] = 0,$$

et les autres par l'équation

$$R[\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4] = 0.$$

Considérons une de ces courbes fermées C′

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega),$$

les $\psi$ étant des fonctions périodiques du paramètre $\omega$, dont on peut supposer la période égale à $2\pi$, et la surface d'intégration définie par les formules

$$\xi = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega), \qquad \eta = \psi_3 + i\psi_4 = \rho_0 e^{i\varphi},$$

où l'on fait varier $\omega$ et $\varphi$ de 0 à $2\pi$. Si l'on pose

$$\lambda' = \cos\omega(1 + \rho\cos\varphi), \qquad \mu' = \sin\omega(1 + \rho\sin\varphi), \qquad \nu' = \rho\sin\varphi,$$
$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega) + \rho\cos\varphi, \qquad t = \psi_4(\omega) + \rho\sin\varphi,$$

la surface d'intégration précédente appartient à l'espace ($\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$) et a pour image dans cet espace le tore dont l'équation est $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 < 1$), tandis que la courbe singulière est représentée par le cercle

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \qquad \nu' = 0,$$

qui est évidemment à l'intérieur du tore. D'ailleurs, il est facile d'évaluer directement l'intégrale double. Si on laisse $\omega$ et $\xi$ constants et qu'on fasse varier $\varphi$ de 0 à $2\pi$, $\eta$ décrit une circonférence de rayon $\rho_0$ ayant pour centre le point $\psi_3 + i\psi_4$. L'intégrale simple

$$I = \int F(\xi, \eta)\, d\eta$$

est alors égale au produit de $2i\pi$ par le résidu de la fonction $F(\xi, \eta)$ (regardée comme fonction de $\eta$ seulement) par rapport au point $\psi_3 + i\psi_4$. Si l'on

a, par exemple,

$$Q(\psi_1 + i\psi_2, \psi_3 + i\psi_4) = 0,$$

le résidu en question se calcule aisément, et l'on trouve pour valeur de l'intégrale simple

$$I = \frac{2i\pi\,P(\xi, \eta)}{\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}\,R(\xi, \eta)},$$

où

$$\xi = \psi_1 + i\psi_2, \qquad \eta = \psi_3 + i\psi_4.$$

Si l'on fait ensuite varier $\omega$ de $0$ à $2\pi$, $\xi$ décrit dans son plan une courbe fermée et l'on est ramené à chercher l'intégrale simple

$$J = \int \frac{2i\pi\,P(\xi, \eta)\,d\xi}{R\,\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}},$$

prise le long d'une courbe fermée, $\xi$ et $\eta$ étant liés par la relation $Q(\xi, \eta) = 0$. C'est donc une intégrale abélienne relative à la courbe $Q = 0$. Une discussion assez délicate permet de déterminer ensuite le signe.

En résumé, les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{QR}$$

sont les mêmes que celles des intégrales simples abéliennes

$$J = \int \frac{2i\pi\,P\,d\xi}{R\,\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}}, \qquad J' = \int \frac{2i\pi\,P\,d\xi}{Q\,\dfrac{\partial R}{\partial \eta}},$$

relatives respectivement aux deux courbes $Q = 0$, $R = 0$. Ces périodes sont de deux sortes; si les courbes $Q = 0$, $R = 0$ sont de genres $q$ et $r$, l'intégrale double aura $2q + 2r$ périodes cycliques. Les périodes polaires de J proviendront des points d'intersection des deux courbes $R = 0$, $Q = 0$ et des points doubles de la courbe $Q = 0$. Pour les premiers, la période est égale à

$$-4\pi^2 \frac{P}{\dfrac{\partial Q}{\partial \eta}\dfrac{\partial R}{\partial \xi} - \dfrac{\partial Q}{\partial \xi}\dfrac{\partial R}{\partial \eta}}$$

et pour les seconds à

$$-4\pi^2 \frac{P}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}}},$$

où $\xi$ et $\eta$ sont remplacées par les coordonnées du point d'intersection ou du point double. On traite de la même façon les cas plus généraux où l'intégrale double est de la forme

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^\alpha R^\beta S^\gamma}.$$

Par exemple, les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne

$$2i\pi\int\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial\eta}\frac{\partial Q}{\partial\eta}-P\frac{\partial^2 Q}{\partial\eta^2}\right)d\xi}{\left(\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)^2},$$

relative à la courbe $Q = 0$.

Dans les deux paragraphes suivants, M. Poincaré considère une surface d'intégration définie comme il suit: $\xi$ et $\eta$ décrivent respectivement dans leurs plans deux cercles concentriques à l'origine. Les équations de cette surface sont par conséquent

$$(6)\qquad x^2+y^2=\rho_1^2,\qquad z^2+t^2=\rho_2^2.$$

Si l'on pose

$$(7)\qquad x=\frac{\rho(k^2-1)}{k^2+1},\qquad y=\frac{2\lambda\rho}{k^2+1},\qquad z=\frac{2\mu\rho}{k^2+1},\qquad t=\frac{2\nu\rho}{k^2+1},$$

où

$$k^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2,$$

la surface précédente appartient à l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$, pourvu que l'on ait $\rho_1^2+\rho_2^2=\rho^2$, et elle est représentée dans cet espace par le tore qui a pour équation

$$(k^2+1)^2\rho_2^2=4\rho^2(\mu^2+\nu^2).$$

De cette façon, toute intégrale double où la surface d'intégration est définie par les équations (6) se ramène à une intégrale double ordinaire étendue à la surface d'un tore. Prenons en particulier l'intégrale double

$$\iint\frac{P\,d\xi\,d\eta}{QR},$$

où

$$Q=\xi-hf(\xi,\eta),\qquad R=\eta-k\varphi(\xi,\eta)$$

$$P=F(\xi,\eta)\left[1-h\frac{\partial f}{\partial\xi}-k\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+hk\frac{\partial(f,\varphi)}{\partial(\xi,\eta)}\right],$$

où $f$, $\varphi$, F sont trois polynômes quelconques. Si $h$ et $k$ sont nuls, les surfaces singulières ont pour équations

$$\xi=0,\qquad \eta=0$$

et fournissent dans l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$ deux lignes singulières, l'axe des $\lambda$ et le cercle $(\lambda=0,\ \mu^2+\nu^2=1)$. Si $h$ et $k$ sont très petits, les équations $Q=0$, $R=0$ donneront dans l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$ deux lignes singulières voisines respectivement des précédentes et dont une seule (celle qui est voisine du cercle) sera comprise à l'intérieur du tore. L'intégrale cherchée aura donc une valeur finie et sera égale à une période d'une intégrale abélienne. L'application de la méthode générale montre que c'est une période polaire qui a pour valeur $4\pi^2F(\xi_0,\eta_0)$, $\xi_0$ et $\eta_0$ étant les valeurs de $\xi$ et de $\eta$ très voisines de 0 qui satisfont aux deux équations $\xi=hf$, $\eta=k\varphi$. De là on déduit sans peine une démonstration rigoureuse d'une remarquable généralisation de la formule de Lagrange, due à M. Stieltjes.

M. Poincaré se sert du même tore pour l'étude d'une question tout à fait différente. Étant donnée une fonction entière de deux variables $F(\xi, \eta)$, posons

$$\xi = (\alpha + i\beta)\rho, \qquad \eta = (\gamma + \delta i)\rho,$$

avec la condition

$$(8) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1;$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ restant constants et $\rho$ croissant indéfiniment, s'il arrive que $F(\xi, \eta)$ tende toujours vers une limite finie et déterminée, on peut affirmer, d'après les théories anciennes, que $F(\xi, \eta)$ est une constante. Grâce à la théorie actuelle, on peut faire un pas de plus. En effet, si l'on reprend les formules (7), à tout système de valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ vérifiant la relation (8) correspond un point de l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$, et inversement. On peut donc dire que tout point $(\lambda, \mu, \nu)$ représente une manière particulière pour $\xi$ et $\eta$ de tendre vers l'infini. Si pour certaines régions de l'espace, dont la définition est assez compliquée, on sait démontrer que F tend vers une limite finie, on pourra affirmer que F est une constante. Cette proposition est évidemment plus générale que le théorème déjà connu.

Les périodes considérées jusqu'ici sont des constantes. Mais il existe des intégrales doubles étendues à des surfaces fermées dont la valeur est essentiellement variable. Imaginons, par exemple, dans l'espace $(\lambda, \mu, \nu)$ une surface fermée S traversée en deux points par une courbe singulière C. Si la fonction $F(\xi, \eta)$ devient infinie du premier ordre en ces points, l'intégrale double conserve une valeur finie et est égale à une intégrale simple abélienne prise le long d'une portion seulement de la courbe C. Il est clair que ces intégrales doubles ne conservent pas la même valeur quand on déforme d'une manière continue la surface d'intégration. Ce sont des *périodes variables*. Le dernier paragraphe contient diverses applications aux fonctions $\Theta$ de deux variables.

## *Lindstedt*. — Sur un théorème de M. Tisserand relatif à la théorie des perturbations. (381-384).

## *Stieltjes*. — Sur les racines de l'équation $X_n = 0$. (385-400).

L'auteur établit d'abord la proposition d'Algèbre que voici :

Soit $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ une forme quadratique *positive* dans laquelle les coefficient $a_{ik}$ $(i \gtrless k)$ sont tous négatifs ou nuls; si les quantités $\xi_i$ sont toutes positives ou nulles, aucune des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tirées des équations

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ne peut être négative, et si toutes les quantités $\xi$ sont positives, il en est de même des $x$.

Il déduit de là des limitations pour les racines d'un polynôme de degré $n$, $\varphi(x)$, vérifiant l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\varphi'' + 2[\alpha - \beta - (\alpha + \beta)x]\varphi' + n(n + 2\alpha + 2\beta - 1)\varphi = 0,$$

où $\alpha$, $\beta$ sont des constantes positives; dans le cas particulier où cette équation se réduit à celle que vérifient les polynômes de Legendre, il retrouve les limitations des racines de ces polynômes obtenues par M. Bruns, et d'autres plus

précises et aussi élégantes. Dans un *post-scriptum*, M. Stieltjes signale le fait que les mêmes formules, relatives aux polynômes $X_n$, avaient été trouvées, antérieurement, par M. Markoff dans un travail inséré dans le Tome XXVII des *Mathematische Annalen*, dont il n'avait point eu connaissance.

M. Stieltjes donne une autre application, relative à un problème qui se présente dans l'étude de la distribution de l'électricité sur un système de conducteurs, de la proposition d'Algèbre que nous avons signalée tout d'abord.

E. G.

---

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (¹). — 3ᵉ série.

Tome VII; 2ᵉ semestre 1888.

*B.* (*Ch.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1888. (305-314).

Propriétés diverses de deux séries de paraboles.

*B.* (*Ch.*). — Solution de la question d'Algèbre proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1888. (314-317).

Sur le polynôme $f(x)$ de degré $n$, vérifiant l'identité :

$$n f(x) = (x - a) f'(x) + b f''(x).$$

*Malo* (*E.*). — Solution géométrique de la question proposée au Concours général de 1885. (317-325).

Sur les propriétés de deux demi-diamètres rectangulaires d'une surface du second ordre.

*Payet* (*P.*). — Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Centrale en 1887. (325-331).

Sur un système de coniques ayant un foyer donné et passant par deux points donnés.

*Moret-Blanc.* — Solutions des questions proposées au Concours d'agrégation en 1883. (332-341).

Mathématiques élémentaires : problème relatif à un trapèze rectangle.
Mathématiques spéciales : sur les normales menées d'un point à un ellipsoïde.

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIII₂, p. 116.

*Jaggi* (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours d'agrégation en 1884. (341-344).

Sur une ellipse et une hyperbole situées dans deux plans rectangulaires.

*Roussel* (*L.*). — Solution de la question proposée au Concours général en 1885. (344-347).

Sur les normales menées d'un point à un paraboloïde elliptique.

*Farjon* (*F.*). — Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École Normale en 1885. (348-350).

Sur un quadrilatère circonscrit à une ellipse et inscrit dans un cercle ayant pour centre l'un des foyers.

*Genty.* — Note de Géométrie. (350-352).

Sur le déplacement d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux surfaces, de telle sorte que les normales se rencontrent.

*A. M.* — Théorème réciproque d'un théorème de M. E. Cesaro et application. (353-356).

Il s'agit d'une proposition relative à un article de M. Cesaro, *Sur deux classes remarquables de lignes planes*, publié antérieurement dans le même Recueil (1888, p. 171), et concernant les rayons de courbure et les développées.

*Antomari* (*X.*). — Recherche des points doubles dans les courbes unicursales. (356-359).

Exposition d'un procédé plus simple que celui qu'on suit habituellement; du même coup, on évite l'introduction de solutions étrangères. Application à deux exemples.

*Del Re* (*A.*). — Sur une question de Géométrie liée à la théorie des normales à une quadrique. (359-362).

Soient :

$\Sigma$ une quadrique;
$\Sigma_c$ la surface des centres;
P un point quelconque.

Un cône (P) de sommet P, circonscrit à $\Sigma_c$, présentera, dans chaque plan tangent, une seule normale à $\Sigma$; lieu des pieds des normales ainsi obtenues.

*Worontzoff.* — Sur le développement en séries des fonctions implicites. (362-365).

L'auteur établit une formule propre à résoudre le problème, et en fait ensuite application à un exemple simple.

*Gilbert* (*Ph.*). — Remarques sur l'intégration par partie. (365-368).

L'auteur fait observer que les cas où l'intégration par partie s'applique avantageusement sont moins généraux qu'on ne le croit d'ordinaire; et il appuie cette opinion sur des considérations qui paraissent irréfutables.

*Servais* (*Cl.*). — Sur la courbure dans les coniques. (369-374).

Propriétés déduites d'un cas particulier de la transformation de Hirst. L'auteur énonce une suite de propositions qui semblent nouvelles pour la plupart, et dont quelques-unes fournissent des constructions simples.

*Cesaro* (*E.*). — Sur les transformations de la série de Lambert. (374-382).

Comparaison de la convergence de deux séries. Examen des transformées de la série de Lambert $\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\ldots$, données par Schlömilch et par Clausen. L'auteur rappelle aussi une transformée qu'il a indiquée dans *Mathesis* (1886, p. 126)

*Gomes Teixeira* (*F.*). — Démonstration d'une formule de Waring. (382-384).

Application d'une méthode indiquée par M. d'Ocagne pour le calcul de certaines fonctions symétriques.

*Roux* (*M.*). — Solution géométrique de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1888. (384-391).

Sur les propriétés de deux paraboles variables, qui restent tangentes entre elles.

*Niewenglowski* (*B.*). — Solution de la question d'Analyse proposée au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1888. (391-400).

Propriétés de la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique une cycloïde, dont on donne les équations.

Correspondance. — M. *J. Monchel* : Communication des énoncés de deux théorèmes sur les déterminants. (400).

Question proposée : 1583. (400).

*Cesaro* (*E.*). — Remarques sur divers articles, concernant la théorie des séries. (401-407).

Considérations sur des séries indiquées par M. Lerch, dans lesquelles $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ dépasse toute limite pour certaines valeurs de $n$, et qui sont cependant convergentes. L'article se termine par une remarque sur le théorème de convergence publié par M. Jensen (*N. A.*, 1888, p. 196).

*Pomey* (*Et.*). — Sur le plus grand commun diviseur de deux polynômes entiers. (407-427).

Le but de ce travail est la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux polynômes entiers, de degré $m$ et $n$, aient un plus grand commun diviseur de degré $p$. Après avoir établi quelques lemmes préliminaires, l'auteur rattache successivement le plus grand commun diviseur, soit au résultant d'Euler-Bézout-Sylvester, dans une première Partie du Mémoire, soit au résultant de Bézout-Cauchy dans la seconde Partie. Dans l'un et l'autre cas, on obtient le plus grand commun diviseur cherché par un calcul de déterminants.

*Weill.* — Sur une forme du déterminant de Vandermonde. (427-429).

Les éléments, dans les lignes successives du déterminant, se trouvent remplacés par les sommes $n-1$ à $n-1$ dans la première ligne, par des sommes de produits deux à deux dans la deuxième ligne, etc.

*Weill.* — Applications des propriétés projectives des coniques. (429-430).

Démonstrations très simples de trois propriétés de paraboles ou d'hyperboles.

*Marchand.* — Discussion de l'équation en $s$. (431-435).

Il s'agit de l'équation en $s$ de degré $n$ quelconque; examen spécial du cas d'une racine multiple, par l'emploi de la méthode de Sylvester.

*Genty* (*Max.*). — Note de Géométrie. (436-438).

La très élégante démonstration d'une propriété du paramètre de distribution d'un hyperboloïde, que donne ici l'auteur, nous montre qu'il a su profiter des excellentes leçons paternelles, et qu'il saura, lui aussi, apporter son tribut à la Science sous une forme pleine d'intérêt.

*Ocagne* (*M. d'*). — Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale. (438-442).

$y = \int \varphi(x)\,dx + C$ est l'équation de la courbe intégrale de la courbe donnée $y = \varphi(x)$ (coordonnées rectangulaires). Construction géométrique du centre

de courbure; comme conséquence, théorème sur le centre de courbure en un point de la parabole.

*Ocagne* (*M. d'*). — Solution de la question 1572. (442-443).

Propriété de la parabole.

*Beyens* (*I.*). — Solution de la même question. (443-444).

*Bernard* (*J.*). — Solution de la même question. (444-447).

Questions proposées : 1584 à 1588. (447-448).

*Ocagne* (*M. d'*). — Solution de la question de Mathématiques élémentaires proposée au Concours général de 1887. (449-456).

L'énoncé, publié *Nouv. Ann.*, 1887, p. 426, tient de la Géométrie de position et de l'Algèbre, et concerne la détermination de l'ordre de certains objets.

*Marchand*. — Développement de l'accroissement d'un polynôme entier suivant les puissances des accroissements des variables. (456-461).

L'auteur a cherché une méthode élémentaire, dégagée de la formule générale de Taylor; et il l'a trouvée dans l'emploi de la notation symbolique représentant une forme binaire.

*Joffroy*. — Nouveau théorème relatif aux circonférences tangentes. (461-464).

Propriétés des faisceaux formés par les lignes des centres.

*Cesaro* (*E.*). — Calcul de sous-invariants. (464-467).

Application de l'algorithme isobarique de l'auteur à une remarque de M. d'Ocagne.

*Dolbnia* (*J.*). — Sur le critère de Galois concernant la résolubilité des équations algébriques par radicaux. (467-485).

Indication d'une proposition d'Abel; étude des fonctions $R_1^{\frac{1}{n}}, \ldots$, qui entrent dans la solution d'une équation résoluble par radicaux. Ce Mémoire, d'une lecture qui demande une grande attention à cause de la nature même du sujet, tend à éclaircir cependant beaucoup les théories si brillantes, mais si difficiles de Galois. C'est donc un service des plus importants que M. Dolbnia a rendu à la Science par cette publication.

*Pirondini* (*G.*). — Sur les surfaces de révolution. (486-502).

Étude des loxodromies d'une surface de révolution quelconque. Remarque sur les travaux de l'abbé Aoust relatifs au même sujet. Propriétés des lignes géodésiques.

QUESTION PROPOSÉE : 1589. (502).

*Sarrau.* — Notions sur la théorie de l'élasticité. (503-552).

Bien que cet article, qui forme un véritable Traité de l'élasticité, en cinquante pages, soit extrait des leçons professées par l'auteur à l'École Polytechnique, il forme un tout qui présente une unité parfaite. L'intention qu'annonce l'auteur a été de ne présenter que les parties strictement essentielles d'une théorie dont les éléments sont épars dans un grand nombre de Traités et de Mémoires originaux. Il est arrivé à les présenter avec une clarté d'exposition et une sûreté de méthode bien dignes de servir de modèles.

Ne pouvant nous livrer à une analyse approfondie, nous reproduirons simplement ici les divisions principales.

I. *Théorie des tensions intérieures.* — Définition. Équilibre du parallélépipède élémentaire. Introduction des N, T. Équilibre du tétraèdre élémentaire. Composante de la tension suivant une direction quelconque. Surface directrice. Tensions principales. Ellipsoïdes des tensions. Formules de transformation des tensions.

II. *Déplacement général d'un système de points.* — Formules fondamentales. Décomposition du déplacement. Dilatation linéaire. Dilatation angulaire. Dilatations et glissements. Surface des dilatations. Dilatations principales. Formules de transformation des déformations élémentaires. Dilatation cubique.

III. *Expressions des tensions dans un système élastique déformé.* — Expressions des (N, T) en fonction des $(a, b)$. Principe de la réduction. Plan de symétrie. Trois plans de symétrie. Isotropie. Expressions des (N, T) en fonction des déplacements $u$, $v$, $w$.

IV. *Équations de l'équilibre et du mouvement intérieur pour les systèmes isotropes.* — Équations indéfinies. Équations définies. Équilibre d'élasticité. Cas particulier.

V. *Exemples d'équilibre.* — *a.* Compression normale et uniforme. *b.* Extension longitudinale d'un prisme. *c.* Équilibre d'une couche sphérique. *d.* Équilibre d'une couche cylindrique.

VI. *Mouvements intérieurs des systèmes isotropes.* — Équations des mouvements intérieurs. Mouvements simples. Mouvements simples compatibles. Vibrations longitudinales. Vibrations transversales. Propagation de la lumière dans un milieu isotrope. Propagation de la lumière dans un milieu cristallisé.

QUESTION PROPOSÉE : 1590. (552).

*Rouché (E.).* — La théorie des chances. (553-588).

Sous l'apparence d'une analyse du Livre de M. J. Bertrand : *Calcul des*

*probabilités*, Paris, 1889, M. Rouché donne ici à son tour, sous une forme concise, un véritable Traité, et un excellent Traité, de probabilités. En voici les grandes divisions :

I. L'énumération des chances. II. La probabilité totale et la probabilité composée. III. L'espérance mathématique. IV. Les épreuves répétées et le théorème de Bernoulli. V. La ruine des joueurs. VI. La probabilité *a posteriori*. VII. La loi de probabilité des erreurs fortuites. VIII. Le tir à la cible. IX. La méthode des moindres carrés. X. Les fausses applications du calcul des probabilités. Conclusions.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1888). — Énoncés des compositions : Mathématiques élémentaires; Mathématiques spéciales; Analyse et ses applications géométriques; Mécanique rationnelle. (589-591).

Tome VIII; 1889.

*Picard* (*E.*). — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (5-13).

Cette question a fait l'objet de travaux de Cauchy, Liouville, Sturm et de M. Kronecker. Le présent article est un résumé de la Leçon faite par l'auteur sur ce sujet à la Faculté des Sciences. Application très intéressante des déterminants fonctionnels.

*De Saint-Germain.* — Note sur la question de Mécanique proposée au Concours d'agrégation en 1887. (13-22).

Mouvement d'un cône homogène dont le sommet est fixe. Bien que l'article soit simplement extrait d'une lettre à M. Rouché, il n'en constitue pas moins une analyse très complète, en même temps que très habile, de toutes les circonstances du problème.

*Gutzmer* (*A.*). — Notes sur un point de la théorie des séries. (22-27).

A propos d'un article de M. Césaro, publié dans le tome précédent (p. 401), concernant des séries où $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ peut devenir aussi grand que l'on voudra, bien que les séries soient convergentes. Indication des travaux de M. Catalan et de M. Lerch sur ce sujet.

*De Comberousse* (*Ch.*). — Sur les équations réciproques. (27-33).

Étude sommaire et complète de la question. L'auteur ramène toutes les équations réciproques de seconde espèce à celles qui sont de degré pair.

*Fouret* (*G.*). — Sur quelques problèmes de Géométrie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré. (34-48).

Solutions simples et élégantes d'un certain nombre de problèmes touchant l'intersection d'une droite avec une surface gauche du second degré.

Emploi de notions élémentaires de Géométrie projective. Application à la construction des normales à certaines surfaces.

*Appell* (*P.*). — Sur les points d'intersection d'une conique fixe avec une conique mobile passant par deux points fixes. (48-56).

Application des méthodes indiquées par Clebsch pour l'étude des groupes de points sur une courbe unicursale. L'article contient plusieurs problèmes intéressants sur les coniques osculatrices.

*Fabry* (*Ch.*). — Étude géométrique d'une famille de coniques. (56-76).

La perspective d'une cubique gauche sur un plan, le point de vue étant sur la courbe, est une conique. En faisant varier le point de vue sur la courbe, on a la famille de coniques étudiée par l'auteur. Il débute par établir sur ces courbes un certain nombre de propositions, concernant leurs intersections et leur enveloppe. Dans une seconde Partie, il étudie les coniques, droites et points correspondants par rapport à un triangle. Comme corollaire, il obtient le théorème de Poncelet sur les coniques inscrite et circonscrite à un triangle. L'article se termine par l'examen de quelques cas particuliers, et par la transformation par polaires réciproques des principales propriétés précédemment établies.

*Amigues* (*E.*). — Équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions. (77-82).

L'auteur examine successivement les cas suivants : la ligne de striction est donnée; la ligne de striction est plane. Il examine spécialement les propriétés du paramètre de distribution.

*Fouret* (*G.*). — Sur deux déterminants numériques. (82-85).

De ces deux déterminants, le premier est toujours égal à l'unité; l'autre est égal à 0 ou à 1, suivant que son ordre $n$ est impair ou pair. *Voir* aussi l'article de l'auteur (*Bull. de la Soc. mathématique de France*, t. XIV, p. 146).

*Joffroy* (*J.*). — Nouveau théorème sur les progressions arithmétiques. (85-88).

Propriété élémentaire très curieuse des progressions à termes entiers, dont le premier terme est l'unité, ou dont la raison égale le premier terme.

*Pomey* (*Et.*). — Longueur des axes d'une section plane d'une quadrique en coordonnées obliques. (88-98).

Au moyen de notations particulières, et par un emploi judicieux du calcul des déterminants, l'auteur, par plusieurs méthodes différentes, arrive à une solution, remarquablement simple quant à la forme, de cette question compliquée et assez difficile à première vue.

*Faure* (*H.*). — Sur le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle. (98-100).

Ce lieu se décompose en deux cubiques circulaires, étudiées par le Dr Hart, mais dont il ne semble pas qu'on eût remarqué cette propriété.

*Gutzmer* (*A.*). — Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe. (101-111).

Analogue d'un théorème de M. Rouché. Moyenne arithmétique des carrés des modules des valeurs de $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, le long d'un cercle autour de l'origine. Cette moyenne est égale à la somme des carrés des modules des termes de la série. Nouvelle démonstration du théorème de M. Rouché auquel il est fait allusion plus haut.

*Lévy* (*L.*). — Démonstration d'une formule relative à la capillarité. (111-115).

Rectification d'une démonstration incorrecte de la formule de Laplace

$$\Delta p = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) F,$$

d'après une méthode dont le principe est dû à M. Lippmann.

*Cesaro* (*E.*). — Sur la transformation orthotangentielle. (116-119).

Généralisation d'une transformation antérieurement étudiée par MM. d'Ocagne et de Longchamps. Application des méthodes intrinsèques de l'auteur.

*Gomes Teixeira* (*F.*). — Sur l'intégrale $\int_0^{\pi} \cot(x - \alpha)\, dx$. (120-122).

Détermination de l'intégrale par un calcul qui la fait dépendre de

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\, dx}{1 + [f(x)]^2}.$$

*Marchand* (*E.*). — Étude du complexe proposé au Concours général de 1885. (122-137, 401-421).

Application des coordonnées homogènes de la ligne droite. Voici les principales divisions de l'étude de M. Marchand :

Complexe spécial. Complexe tangent. Droites singulières. Congruence des droites singulières. Point et plan singuliers. Surface régulière. Conséquences géométriques. Rectifications. Propriétés des droites singulières. Forme canonique. Tangentes de la surface singulière. Surface singulière. Faisceau de complexes. Cas particulier. Théorème final.

*De Saint-Germain* (*A.*). — Lieu des points d'un solide qui partagent avec le centre de gravité l'une de ses propriétés dynamiques. (138-140).

Reprise d'une question traitée par l'auteur dans une Note publiée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (17 décembre 1888). La solution est obtenue ici par un calcul simple et direct.

*Worontzoff*. — Sur le développement en séries des fonctions implicites. (140-143).

En posant $f(x) = m$, $f(x_0) = m_0$, l'auteur développe $\int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx$ suivant les puissances croissantes de $m - m_0$. Application à un exemple.

*Worontzoff*. — Solution de la question 1570, proposée par M. Rouché. (143-149).

On a $\sin(x - y) = m \sin(x + y)$, avec $-1 < m < +1$. Développement de $y$ suivant les puissances croissantes de $m$. L'article se termine par une Note de M. Rouché, donnant une solution simple et directe.

*Andrade* (*J.*). — Sur l'invariant différentiel des figures congruentes. (150-158).

Origine géométrique de cet invariant, utilisé par M. Poincaré dans sa théorie des fonctions fuchsiennes.

*Lefèvre* (*L.*). — Problème donné au Concours général en 1874. (158-164).

Forme la plus générale du polynôme entier $\mathrm{F}(x)$ tel que $\mathrm{F}(1 - x) = \mathrm{F}(x)$, et $\mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x^m}$.

*Guyon*. — Sur les approximations numériques. (165-186).

L'auteur croit, avec raison à notre avis, qu'il y aurait avantage à restituer à cette question sa véritable place, en Algèbre, pour les élèves ayant acquis les premières notions sur les dérivées. Ce serait une sorte d'introduction à la théorie générale des erreurs. L'article se divise de la manière suivante :

Classification des erreurs; objet et division du problème des approximations numériques; formule générale des erreurs. Première Partie du problème des approximations numériques. Deuxième Partie du problème des approximations.

De nombreux exemples sont de nature à donner à cette étude un caractère absolument pratique.

*Farjon* (*F.*). — Solution géométrique des questions données au Concours pour l'École Polytechnique en 1882. (187-197).

Propriétés d'une conique variable tangente à deux cercles et passant par leurs points d'intersection.

*Servais* (*Cl.*). — Sur les cubiques nodales circulaires. (197-203).

L'auteur démontre plusieurs propriétés intéressantes des cubiques nodales circulaires. *Voir* aussi une *Note sur la courbure dans les coniques,* à laquelle se réfère le présent article (*Nouv. Ann.*, août 1888).

*Dolbnia.* — Sur l'addition des intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce. (204-213).

Application d'un célèbre théorème d'Abel, publié dans son *Précis* d'une théorie des fonctions elliptiques. Quoique la question soit à peu près épuisée, dit l'auteur, néanmoins, une façon nouvelle de la poser mérite peut-être quelque attention. Sa méthode semble en effet se recommander par une grande simplicité.

*Salvert* (V^te *de*). — Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde et les systèmes orthogonaux du second ordre. (214-228).

L'auteur s'est proposé de diriger l'application de la méthode générale, c'est-à-dire l'intégration des équations classiques, en vue du double résultat que voici : 1° formation d'un système de coordonnées orthogonales sur la surface; 2° recherche d'un système triple orthogonal dont la surface donnée fasse partie.

Il recommande la méthode employée aux géomètres qui voudraient l'appliquer à d'autres surfaces que celles du second ordre, et pourraient ainsi obtenir des résultats nouveaux.

*Jamet* (*V.*). — Sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. (228-232).

Méthode nouvelle et rapide, reposant sur une proposition préliminaire donnant les conditions d'identité de deux polynômes.

*Astor* (*A.*). — Potentiel d'un ellipsoïde homogène ou composé de couches homogènes concentriques, dont la densité varie d'une couche à la suivante. (232-243).

Le procédé de calcul de M. Astor repose sur la notion de l'*épaisseur normale*

2ud Part.



de la couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins, $dn = P\frac{dr}{r}$, P étant la distance du centre au plan tangent, et $r$ le rayon vecteur. Il suppose successivement le point M, par rapport auquel on cherche le potentiel, extérieur, puis intérieur.

*Lemaire.* — Note sur la question du Concours général de Mathématiques spéciales en 1888. (243-246).

Sur une courbe anallagmatique, dont la déférente est une conique.

*Biehler (C.).* — Sur les plans diamétraux dans les surfaces du second ordre. (247-275).

Étude très méthodique de cette question classique. L'auteur examine successivement les cas suivants :

Surfaces qui ont un centre unique à distance finie. Paraboloïdes. Cylindres à centres. Cylindre parabolique.

Pour chaque cas, il se livre à un examen approfondi des plans diamétraux singuliers.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1888. — Énoncés des compositions : Physique, Chimie, Composition française, Lavis, Calcul trigonométrique, Épure de Géométrie descriptive. (275-277).

Concours général de 1888. — Philosophie : énoncés des compositions de Mathématiques. (277-279).

École forestière (Concours de 1888). — Énoncés des compositions : Mathématiques ; Trigonométrie et Calcul logarithmique. (279-280).

Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (Concours de 1887). — Énoncés des compositions : Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Géométrie descriptive, épreuve pratique de calcul, épreuve pratique de Géométrie. (280-282).

Concours pour les bourses de licence (1888). — Énoncés de compositions de Mathématiques. (282).

Concours d'admission a l'École Navale (1888). — Énoncés des compositions : Arithmétique, Algèbre, Géométrie descriptive, Calcul trigonométrique, Géométrie, Géométrie analytique. (283-285).

Concours d'admission a l'École spéciale militaire (1888). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Géométrie descriptive, Lavis. (285-286).

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1888. — Énoncés des compositions : Mathématiques, Physique. (286-287).

Errata aux Tables des quarts de carrés de J. Blater. (287).

*Leinekugel* (*G.*). — Solution géométrique de la question proposée au Concours général en 1889. (288-298).

Sur le système des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes à un cercle et à une parabole.

*Leinekugel* (*G.*). — Solution analytique de la question proposée au Concours général en 1889. (298-301).

Même question.

Concours d'admission a l'École Centrale en 1888. — Énoncés des compositions (1re et 2e sessions) : Calcul trigonométrique, Géométrie analytique, Chimie, Physique, Épure. (301-307).

*Renou* (*A.*). — Démonstration du théorème de Pascal. (307).

Application du théorème de Desargues.

*Mannheim* (*A.*). — Sur un déplacement particulier d'une figure de forme invariable. (308-325).

Cet article est extrait des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. III, 1889). L'auteur a démontré antérieurement que, *lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse,* et il se propose d'établir ici ce théorème par des considérations purement géométriques. L'article se divise ainsi :

Sur le déplacement dans l'espace d'une droite dont tous les points décrivent des ellipses. Sur le déplacement dans l'espace d'une figure de grandeur invariable dont les points décrivent des ellipses.

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Note sur un système de deux courbes planes. (325-329).

A propos d'une Communication de M. Laisant publiée sous le même titre dans le *Bulletin de la Soc. Mathém. de France;* il s'agit d'une droite mobile dont les extrémités parcourent des arcs qui restent dans un rapport constant;

tangente et rayon de courbure de la courbe décrite par un point qui divise la droite dans un rapport donné. Solution géométrique.

UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. — Construire les axes d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués. (329-330).

Solution élégante, s'appuyant sur le déplacement d'un segment de longueur constante. *Voir* sur le même sujet, même Recueil, un article de M. Mannheim (t. XVII, 2e série.)

*Marchand* (*E.*). — Concours général de 1889; autre solution. (331-342).

Dans l'énoncé de la question, on demande de trouver trois enveloppes; et l'on obtient trois fois la même parabole comme enveloppe; c'est ce fait que M. Marchand s'est spécialement proposé d'analyser et d'expliquer.

*Gambey*. — Solution de la question proposée au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1888. (342-366).

Mathématiques élémentaires : propriétés de deux points A, A' et de deux droites, parallèles à AA' et équidistantes de cette droite. Mathématiques spéciales : sur un ellipsoïde et un système de deux points. Analyse et applications : sur les surfaces minima; surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique une cycloïde. Mécanique rationnelle : intégration, d'après Jacobi, des équations canoniques du mouvement d'un système matériel; mouvement d'un point matériel sur un hyperboloïde à une nappe.

*Bourlet* (*C.*). — Sur les polyèdres. (366-389).

Ensemble de propositions sur les polyèdres, et notamment sur leurs points de rencontre avec une droite et sur leur décomposition. Distinction des polyèdres convexes ou non convexes. L'article se termine par une étude spéciale de la similitude des polyèdres.

*Lefevre* (*L.*). — Intersection d'une droite et de la surface réglée définie par trois directrices rectilignes. (389-391).

Solution fondée sur la considération du rapport anharmonique.

*Lemaire*. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1888. (391-400).

Sur deux séries de paraboles. Solution analytique et considérations géométriques.

*Méray* (*Ch.*). — Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité

abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. Son application à la spécification mathématique de ces dernières. (421-435).

Article extrait des *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques,* Ouvrage en préparation avec la collaboration de M. Ch. Riquier. L'idée principale des auteurs consiste à introduire dans la théorie de la multiplication le facteur fictif $\frac{n}{d}$ et à écrire $E \times \frac{n}{d}$ au lieu de $\frac{E \times n}{d}$. Ce sont ces facteurs fictifs qu'on nomme *fractions.* La tentative est ingénieuse et digne de remarque, pour les personnes qui ont mûri ces questions; mais, au point de vue de l'enseignement, elle nous semblerait anti-philosophique et funeste; la proscription des grandeurs concrètes, en pareille matière, serait loin, selon nous, de constituer un progrès.

*Andradez.* — Sur deux théorèmes curieux signalés par M. Poincaré. (435-440).

Ces théorèmes se rapportent aux fonctions qu'on rencontre dans le problème du refroidissement d'un corps isotrope.

Publications récentes. — (440-445).

*Cesaro (E.).* — Remarques sur les surfaces gauches. (445-458).

Application des méthodes intrinsèques à l'étude des surfaces gauches dont la ligne de striction est donnée, problème précédemment étudié par M. Amigues (même tome, p. 77, *voir* plus haut). M. Cesaro arrive ainsi à un grand nombre de résultats intéressants, et annonce un prochain travail sur l'application de sa méthode à l'étude d'une surface quelconque.

*Dolbnia (J.).* — Sur l'analogie entre les fonctions elliptiques et trigonométriques. (459-471).

Recherche des fonctions transcendantes qui satisfont à l'équation

$$\frac{\tau(u+a)\,\tau(u-a)}{\tau^2 u\, \tau^2 a} = \varphi(a) - \varphi(u).$$

En distinguant les cas où $\varphi(u)$ a deux ou une seule période, l'auteur arrive aux intéressantes analogies qu'annonce le titre de l'article.

*Stieltjes (T.-J.).* — Sur un passage de la théorie analytique de chaleur. (472-478).

Étude rigoureuse de la détermination du développement

$$1 = a\cos x + b\cos 3x + c\cos 5x + d\cos 7x + \ldots,$$

examiné par Fourier.

*Fontaneau* (*E.*). — Sur le problème de Clebsch (*Théorie de l'élasticité des corps solides*, § 39 à 42). (478-494).

Clebsch, dans son Ouvrage *Sur la théorie de l'élasticité des corps solides*, a étudié des états d'équilibre d'un cylindre, caractérisés par l'absence de pressions latérales. L'auteur reprend ce sujet, en s'attachant à combler les lacunes laissées par Clebsch, à en rendre l'exposition élémentaire dans la mesure du possible, et en rattachant la solution à la méthode générale inaugurée par Lamé.

*Borel* (*Em.*). — Généralisation de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1874. (495-500).

Lieu géométrique relatif à des coniques circonscrites à un triangle donné.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1889. — Énoncés des compositions : Composition française, Physique et Chimie, Mathématiques, Calcul trigonométrique, Lavis, Épure. (501-503).

*Lemaire* (*J.*). — Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1889. (503-508).

Solution de la question de Mathématiques : sur deux séries de paraboles.

*Borel* (*E.*). — Solution géométrique de la deuxième et de la quatrième Partie de la question proposée aux candidats à l'École Polytechnique en 1889. (509-512).

Même question qu'à l'article précédent.

*Colette* (*J.*). — Géométrie du compas. (512-520).

Examen de quelques problèmes figurant dans le Livre de Mascheroni *Géométrie du compas* (1797), et en particulier de la recherche du centre d'un cercle, au moyen du compas seulement.

*Balitrand.* — Sur les cubiques gauches. (520-525).

L'auteur, en appliquant une méthode identique à celle employée par M. Appell pour les coniques (*Nouv. Ann.*, 1889, p. 48, *voir* ci-dessus), établit plusieurs propriétés intéressantes des cubiques gauches ou planes.

*Balitrand.* — Sur le déplacement d'une droite. (526-527).

Démonstration géométrique et généralisation d'un théorème de M. Genty.

*Pomey* (*J.*). — Tangente en un point d'une courbe remarquable. (527-529).

La courbe dont il s'agit est définie comme il suit : $T_1$, $T_2$, ... sont les longueurs des tangentes menées d'un point M à autant de courbes $c_1$, $c_2$, ..., et l'on suppose qu'il existe une relation entre toutes ces longueurs, en sorte que M décrit un lieu géométrique.

*Aubert.* — Sur une généralisation du théorème de Pascal donnant neuf points en ligne droite. (529-535).

L'auteur part d'un théorème sur un système de cercles passant par deux points fixes, et il l'étend par voie projective. Il tire de là diverses conséquences, et parmi elles, le célèbre théorème de Pascal, avec une extension très digne de remarque.

*Biehler* (*Ch.*). — Sur le plan asymptote et les cylindres asymptotes d'une surface. (536-541).

M. Biehler appelle *plan asymptote* le lieu des droites, parallèles à une direction, qui rencontrent la surface en deux points au moins à l'infini. Son article est une intéressante extension aux surfaces de la théorie des asymptotes aux courbes planes.

Bibliographie. — 1. *G. de Longchamps :* Cours de Mathématiques spéciales; Ire Partie, Algèbre, 2e édition; Paris, 1889. — 2. *E. Amigues :* Leçons d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement; Paris, 1890. — 3. *B. Niewenglowski :* Cours d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique; 2 vol., Paris, 1890. (541-544).

*Lévy* (*L.*). — Note sur l'équation d'Euler et de Poisson. (545-552).

A propos d'un théorème de M. Darboux, étendu par M. Appell, sur des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.

*Biehler* (*Ch.*). — Sur les équations auxquelles conduit le problème de la division des arcs en Trigonométrie. (552-563).

L'article se divise de la manière suivante :

Équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$. Équation qui donne $\cos\frac{a}{m}$, étant donné $\sin a$. Équation qui donne $\sin\frac{a}{m}$, étant donné $\cos a$. Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{m}$.

*Pomey* (*J.-B.*). — Calcul de la capacité électrostatique de deux fils télégraphiques parallèles. (564-567).

M. Pomey ramène la question à un problème de Géométrie plane, et la traite au moyen d'un calcul assez rapide.

*Ocagne* (*M. d'*). — Une application des coordonnées parallèles. (568-573).

Au sujet d'un théorème de M. Tarry. L'auteur examine le problème suivant :

« M, N, sommets d'un triangle MNP de similitude constante, décrivent deux droites parallèles. Connaissant l'enveloppe de MN, trouver le lieu de P. »

*Biehler* (*Ch.*). — Sur les surfaces du deuxième degré. (573-585).

L'auteur cherche successivement les conditions pour que l'équation générale du second degré représente : un cône, un cylindre, un système de deux plans, un paraboloïde, un cylindre parabolique, un système de deux plans parallèles, un plan double.

*Barisien.* — Solution de la question 1590. (586-587).

Lieu relatif à un système de coniques homofocales.

A. L.

---

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. In-8°, 6e série. Tome III; 1884-1885 [1].

*Favaro* (*A.*). — Sur une lettre de Ch.-Fr. Gauss à E.-G.-M. Olbers, publiée par M. B. Boncompagni. (53-62).

*Lazzeri* (Dr *G.*). — La représentation de l'espace de rayons sur un plan connexe, et son application à l'étude des connexes linéo-linéaires. (247-268, 437-474).

L'auteur donne d'abord quelques propriétés des connexes singuliers et des systèmes de connexes linéo-linéaires [connexes (1,1)]; puis il établit une correspondance entre les complexes linéaires de l'espace de rayons et un système de connexes (1,1) ayant en commun un faisceau d'éléments. Dans un cas particulier remarquable, on est conduit à la transformation suivante entre les éléments du connexe et ceux de l'espace de rayons :

$$\begin{aligned} p_{23} &= x_2 v_3, & p_{14} &= -x_1 v_2,\\ p_{31} &= x_3 v_2, & p_{24} &= x_2 v_1,\\ p_{12} &= -x_2 v_2, & p_{34} &= x_3 v_1 - x_1 v_3. \end{aligned}$$

---

[1] Voir *Bulletin*, $IX_2$, p. 176.

Enfin il applique sa représentation à l'étude d'un système de connexes (1,1) ayant un faisceau commun, en déduisant les propriétés de ce système de celles des complexes linéaires correspondants. Par exemple, au moyen du groupe de six connexes deux à deux en involution, il fait ressortir la relation qui passe entre le groupe de six complexes linéaires deux à deux en involution, et l'hexagramme de Pascal.

*Lazzeri* (Dr *G.*). — Nouveaux théorèmes sur l'hexagramme de Pascal. (481-500).

*Da Schio* (*A.*). — Sur l'almanach météorologique italien. (577-582).

*Fambri* (*P.*) — Sur les fonctions continues qui, dans un intervalle donné, n'admettent pas de dérivée. (823-831).

L'auteur expose quelques considérations géométriques qui peuvent servir à se rendre compte du théorème suivant de M. Dini :

« Soient $u_1(X)$, $u_2(X)$, ..., $u_n(X)$, ... des fonctions finies et continues, admettant chacune une dérivée dans un intervalle $(a, b)$, et telles que la série $\Sigma u'_n(X)$ soit convergente dans ce même intervalle, et représente une fonction finie et continue. Supposons de plus que chacune des fonctions $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$, ... ait des oscillations dans $(a, b)$, et que leur nombre augmente indéfiniment avec $n$. Dans cette hypothèse, la fonction $\Sigma u_n(X)$ n'aura pas de dérivée en aucun point de l'intervalle $(a, b)$. »

*Favaro* (*A.*). — Les écrits inédits de Leonardo da Vinci suivant les dernières études. (905-964).

*Lorenzoni* (*G.*). — Démonstration des formules de précession et nutation. (1025-1092, 2 pl.).

*Emilio* (*R. d'*). — Les axoïdes en Statique, en Cinématique. Note sur la théorie des dynames (Theory of screws). (1135-1154).

*Naccari* (*G.*). — Sur la formule qui exprime la marche d'un chronomètre, avec application numérique au chronomètre Frodsham, n° 3545. (1199-1249).

*Emilio* (*R. d'*). — Les surfaces réglées d'une congruence linéaire. (1265-1275), (1911-1915).

Nous citerons le théorème suivant analogue à celui de Pascal, et qui se rapporte aux surfaces réglées

$$a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2 + 2g\lambda + 2f\mu + c = 0$$

($\lambda$ et $\mu$ sont les distances respectives de deux points fixes des directrices aux points de rencontre de ces droites avec les rayons de la congruence) :

« Si l'on prend sur une de ces surfaces six droites en un certain ordre, ces droites prises deux à deux consécutivement déterminent six paraboloïdes. Les trois couples de paraboloïdes opposés se coupent suivant trois droites situées sur un même paraboloïde. »

*Castelnuovo* (*G.*). — Sur les angles de deux espaces contenus dans l'espace de $n$ dimensions. (1331).

*Abetti* (*A.*). — Observations astronomiques faites à l'observatoire de Padoue avec l'équatorial Dembowski, en automne de 1884. (1427-1438).

*Ricci* (*G.*). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta^2 u = f$. (1439-1444).

*Brambilla* (*A.*). — Recherches analytiques sur les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre. (1471).

La quadrique, enveloppée par les plans qui coupent une $C^4$ gauche et rationnelle en des points formant un rapport équianharmonique, est tangente à $C^4$ aux points de contact de ses plans stationnaires.

*Bucchia* (*G.*). — Proposition d'une règle exacte pour déterminer la forme et les dimensions nécessaires à la stabilité durable des chaussées de terre, destinées à retenir de hautes crues de grands fleuves. (1707-1738).

*Cassani* (*P.*). — La projection stéréoscopique. (1835-1848, 1 pl.).

*Abetti* (*A.*). — Résultats des observations faites à Padoue sur la comète Wolf, 1884, III, les 26 et 27 septembre 1884. (1849-1850).

*Bordiga* (*G.-A.*). — Correspondance de polarité dans les espaces supérieurs. (2097-2105).

---

A chaque volume est annexé le *Bulletin météorologique de l'observatoire du Séminaire patriarcal de Venise*, par M. l'abbé Tono. Ce Bulletin a une pagination spéciale en commun avec la liste des publications.

Tome IV; 1885-86.

*Bucchia* (*G.*). — Recherche sur l'utilité réelle des bassins de rassemblement des eaux portées par les conduits d'écoulement avant de les faire déboucher dans la mer. (17-43).

*Bernardi* (*E.*). — Considérations sur les soupapes de sûreté. (91-124, 1 pl.).

*Bordiga* (*G.-A.*). — Sur les complexes et les systèmes linéaires de rayons dans les espaces supérieurs, et sur les courbes normales engendrées par eux. (163-189).

*Abetti* (*A.*). — Observations astronomiques des comètes *Fabry* et *Barnard*, faites à Padoue avec l'équatorial Dembowski, en décembre 1885, tout de suite après leur découverte. (191-194).

*Cassani* (*P.*). — Recherches géométriques dans les espaces supérieurs. (227-241).

Ces recherches se rapportent aux faisceaux, cônes, réseaux, quadriques et correspondances dans les espaces supérieurs. Le troisième et dernier paragraphe est dédié aux correspondances de deux gerbes.

*Abetti* (*A.*). — Observations astronomiques de la nouvelle comète Brooks (2) et des comètes Fabry et Barnard, faites à Padoue avec l'équatorial Dembowski, en janvier 1886. (267-273).

*Favaro* (*A.*). — Sur quelques nouvelles études sur la vie et les œuvres de G. Galilei. (355-361).

*Chicchi* (*P.*). — Sur la manière d'obtenir la résistance uniforme dans les arcs élastiques posés sur des charnières. (409-424, 1 pl.).

*Bordiga* (*G.-A.*). — Étude générale sur la quartique normale. (503-525).

Génération de la quartique. Construction de la quartique. Projection de la quartique sur l'espace ordinaire et sur le plan. La surface réglée normale passant par $C_4$. Diverses espèces de quartiques. Propriétés projectives des quartiques. Correspondance et représentation sur l'espace ordinaire.

*Garbieri* (*G.*). — Sur les faisceaux et les systèmes (Schiere) de surfaces. Propriétés des faisceaux et systèmes de surfaces du second ordre exposées par le calcul symbolique. (943-994).

*Bordiga* (*G.*). — Sur la représentation plane de la surface réglée normale. (1085-1092).

*Garbieri* (*G.*). — Sur les surfaces polaires covariantes, et sur leurs invariants simultanés. (1149-1166).

Mémoire faisant suite au précédent du même auteur.

*Castelnuovo* (*G.*). — Étude sur l'involution générale dans les courbes rationnelles au moyen de leur courbe normale de l'espace à $n$ dimensions. (1167-1199).

L'auteur définit l'involution générale d'une manière purement géométrique comme il suit :

Dans l'espace $R_n$ soient donnés une courbe normale $C^n$ et un espace $R_{n-k-1}$; les $\infty^k$ espaces de $n-1$ dimensions passant par $R_{n-k-1}$ déterminent sur $C^n$ un nombre $\infty^k$ de groupes de $n$ points. Ces groupes forment une *involution* d'ordre $n$ et d'espèce $k$.

*Gazzaniga* (*P.*). — Sur les résidus d'ordres quelconques par rapport à des modules premiers. (1271-1279).

*Abetti* (*A.*). — Tables pour réduire le lever et le coucher de la Lune des éphémérides de Berlin aux horizons de latitudes entre 36° et 48°. (1281-1292).

*Da Schio* (*A.*). — Sur un astrolabe septentrional des Arabes appartenant à M. Lucien Toschi de Imola (*Lettre illustrative*). (1347-1352).

*Bordiga* (*G.*). — Sur quelques surfaces du cinquième et du sixième ordre qui se déduisent de l'espace de six dimensions. (1461-1501).

*Da Schio* (*A.*). — La météorologie vicentine en juillet 1886. (1535-1546, 4 pl.).

*Castelnuovo* (*G.*). — Étude sur la théorie de l'involution dans le plan. (1559-1594).

L'auteur étudie d'abord les involutions dont les groupes sont déterminés par un de leurs éléments, et montre que la théorie de ces involutions est liée à celle

des systèmes de courbes par rapport auxquelles un point a une même première polaire; puis il s'occupe des involutions dont les groupes sont déterminés par deux de leurs points, et des courbes par rapport auxquelles un point a une même seconde polaire. Enfin il existe quelques résultats sur les courbes par rapport auxquelles la polaire mixte de deux points est une courbe fixe.

Appendice au tome IV.

*Martini* (*T.*). — Sur la vitesse du son dans les liquides. (3-87).

---

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE [1].

Tome XIV; 1888.

*Schouten* (*G.*). — Un point M, qui se meut avec une vitesse initiale donnée perpendiculaire au rayon vecteur initial OM, se trouve sous l'action de deux forces $ar^{-m}$ et $br^{\pm n}$, qui passent par le centre fixe O. On demande un examen complet du mouvement, quand $m$ et $n$ sont deux nombres entiers positifs (suite) [2]. (1-77).

IX. La force $ar^{-3}+br^{-7}$. X. La force $ar^{-3}+br^{-5}$. XI. La force $ar^{-3}+br^{-4}$. XII. La force $ar^{-3}+br$. XIII. La force $ar^{-3}+br^{3}$. XIV. La force $ar^{-3}+br^{5}$. XV. La force $ar^{-4}+br^{-5}$. XVI. La force $ar^{-5}+br^{-7}$. XVII. La force $ar^{-5}+br$. XVIII. La force $ar^{-7}+br$.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur un problème de trigonométrie sphérique. (78-94).

L'auteur examine s'il est possible que trois triangles sphériques à bases et angles opposés donnés $(a, A)$, $(a_1, A_1)$, $(a_2, A_2)$ ont leurs autres côtés $(\theta_1, \theta_2)$, $(\theta_2, \theta)$, $(\theta, \theta_1)$ égaux deux à deux.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur des couples de cercles dans le plan ou sur la sphère, ou des couples d'ellipses coaxiales dans le plan, qui admettent des polygones inscrits dans l'un et circonscrits à l'autre. (95-116 et 125-192, 1 pl.).

---

(1) Voir *Bulletin*, $XII_2$, p. 26.
(2) Voir *Bulletin*, $XII_2$, p. 30.

Après avoir donné l'histoire du problème (Euler, Fuss, Poncelet, Steiner, Jacobi, Richelot, Unferdinger, Stoll), l'auteur montre que la relation entre les rayons des deux cercles et la distance de leurs centres peut s'obtenir dans la plupart des cas au moyen de considérations géométriques très simples.

*Vries* (*J. de*). — Sur les quartiques planes à deux points doubles. (193-200).

*Stolp* (*C.*). — Une formule de la Géométrie analytique. (201-208).

La formule en question est

$$(l^2+m^2+n^2)\delta\theta^2=(m\,\delta n-n\,\delta\mu)^2+(n\,\delta l-l\,\delta n)^2+(l\,\delta m-m\,\delta l)^2.$$

*Bibliographie*. — Cours de Mathématiques spéciales, par M. G. de Longchamps.

Tome XV; 1889.

*Landré* (*Corn.-L.*). — Rente viagère en termes et continuellement. (1-15).

*Landré* (*Corn.-L.*). — Sur la correction de séries de nombres au moyen des différences secondes. (15-22).

*Landré* (*Corn.-L.*). — Sur l'influence des chances de vie et du montant de la rente au tarif et à la réserve des assurances à vie. (22-36).

*Kluyver* (*J.-C.*). — Sur la relation invariante entre deux coniques dont l'une est inscrite dans un polygone inscrit dans l'autre. (37-56).

La plus grande partie de ce Mémoire a paru en français dans l'*Annuaire de l'Association française* (Congrès de Toulouse, 1887, p. 133-141).

*Eecen* (*A.*). — Si d'un système plan de forces, qui agissent sur des points donnés et qui peuvent être réduites à une résultante, on fait tourner chaque force, dans le même sens, du même angle autour de son point d'application, on fait tourner la résultante autour d'un point fixe. Examinez complètement la position de ce point dans le cas de forces données s'appliquant aux sommets d'un polygone [1]. (57-66, 1 fig.).

---

[1] Sujet de prix proposé par la Société (nº 11, 1887).

Solution générale. 1. Les forces sont parallèles. 2. Les forces sont égales. 3. Le polygone est inscriptible. 4. Les forces agissent dans la direction des côtés. 5. Les forces agissent dans la direction des côtés, et le polygone est régulier. 6. Le polygone est un carré.

*Eecen* (*A.*) — Examen du mouvement d'un plan, dont deux droites restent tangentes à deux cercles fixes. (67-99, 1 pl.).

L'auteur démontre qu'un cercle du plan mobile roule sur un cercle du plan fixe (mouvement hypocycloïdique). Un point quelconque du plan mobile décrit un limaçon. Une droite quelconque du plan mobile enveloppe un cercle. Les points du plan mobile qui coïncident successivement avec un point donné du plan fixe se trouvent sur une ellipse.

Ensuite l'auteur détermine la vitesse d'un point quelconque, la tangente de la trajectoire (au moyen de la méthode de Roberval), l'accélération du point, le rayon de courbure de la trajectoire, le centre de courbure et la manière dont le nombre des points d'inflexion de la trajectoire dépend de la position du point, etc.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Encore les points racines dérivés (suite) (¹). (100-164).

L'auteur démontre le théorème : « Si les points racines d'une équation sont les sommets d'un polygone ordinaire ou en forme d'étoile inscrit dans une conique et circonscrite à une autre, et que les nombres de multiplicité de chaque couple de sommets successifs soient entre eux comme les segments adjacents du côté qui les réunit mesurés jusqu'au point de contact, le groupe des points racines de l'équation dérivée se compose des points racines de l'équation primitive, chacun de ces points pris avec un nombre de multiplicité égal au nombre primitif moins un, et des foyers des coniques qui touchent les côtés ou les diagonales du même ordre du polygone, pourvu qu'on y ajoute le point d'intersection commun des diagonales principales dans les cas d'un polygone dont le nombre des côtés est pair. »

Dans un post-scriptum, l'auteur démontre le théorème suivant plus général : « Les points racines de l'équation dérivée d'une équation à $n$ points racines de degrés de multiplicité donnés s'obtiennent en diminuant chacun de ces degrés de multiplicité d'une unité, et en ajoutant à ce système les $n-1$ foyers réels de la courbe de la classe $n-1$, qui touche chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés du $n$-angle complet des points racines donnés dans le point racine dérivé de ses deux bouts, c'est-à-dire au point qui divise ce côté en raison des degrés de multiplicité des deux points racines qu'il réunit. »

*Prange* (*A.-J.-A.*). — Sur le problème de trouver les centres et les rayons des cercles qui touchent trois cercles donnés. (165-187, 2 fig.).

---

(¹) Voir *Bulletin*, $IX_2$, p. 1, et $XII_2$, p. 27.

*Schouten* (Dr *G.*). — Un tore ou cerceau roule sur un plan horizontal. Trouver la trajectoire du centre du cerceau et la position de ce corps après un laps de temps, quand on donne l'inclinaison initiale et la vitesse initiale du cerceau, et que l'on suppose que le mouvement ne soit pas incommodé ni par le frottement roulant, ni par la résistance de l'air, le frottement de glissement ayant d'ailleurs précisément la faculté d'empêcher le déplacement du point de contact (¹). (188-232, 1 pl.).

*Chapitre I.* Déductions des premières intégrales. — *Chapitre II.* Propriétés générales du roulement exact d'un solide de révolution sur un plan horizontal. La courbe de l'énergie d'inclinaison, ses ordonnées minimales et maximales. Le mouvement conique. L'énergie de balancement. Le mouvement conique stabile infiniment peu troublé. — *Chapitre III.* Le mouvement d'un corps lenticulaire qui admet une circonférence de cercle, dont le centre est en même temps le centre de gravité du corps. Le mouvement conique. Le mouvement conique troublé. — *Premier cas.* L'énergie est moindre que celle du roulement uniforme en position verticale. [($a$) le mouvement conique infiniment peu troublé. ($b$) Le mouvement conique considérablement troublé.] — *Deuxième cas.* L'énergie est égale à celle du roulement uniforme en position verticale. Le corps s'approche asymptotiquement à la position verticale. — *Troisième cas.* L'énergie est plus grande que celle du roulement uniforme en position verticale. Le mouvement conique. A. Le mouvement conique troublé. B. La révolution stabile autour d'un diamètre vertical troublée.

## Tome XVI, 1889.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur des carrés magiques pairs. (1-31).

*Ekama* (*H.*). — Les courbes cycloïdales sphériques. (32-57, 1 pl.).

1. L'épi- et l'hypocycloïde. 2. La cycloïde sphérique. 3. Le cercle normal. 4. Cas particuliers. 5. Longueur d'un arc de cycloïde sphérique. 6. Évaluation de l'aire comprise entre un arc de cycloïde sphérique et le cercle fixe. 7. L'épi- et l'hypocycloïde allongées et raccourcies. 8. Les cycloïdes sphériques allongées et raccourcies.

*Ekama* (*H.*). — Les courbes planes décrites par des points du plan d'une conique qui roule sur une courbe plane donnée. (58-115, 1 pl.).

Formules générales :

A. La courbe roulante est une ellipse :

I. L'ellipse roule sur une droite : 1. Point de la périphérie. 2. Point d'un axe. 3. Extrémité d'un axe. 4. Foyer. 5. Centre.

---

(¹) Sujet de prix proposé par la Société (n° 3, 1887).

II. L'ellipse roule sur une circonférence : 1. Point d'un axe. 2. Foyer. 3. Centre.

III. L'ellipse roule sur une ellipse congruente, et ces deux courbes se touchent en des éléments homologues.

B. La courbe roulante est une hyperbole :

I. L'hyperbole roule sur une droite : 1. Point de la périphérie. 2. Point de l'axe transverse. 3. Sommet. 4. Foyer. 5. Centre. 6. Point de l'axe imaginaire.

II. L'hyperbole roule sur une hyperbole congruente, et ces deux courbes se touchent en des éléments homologues.

C. La courbe roulante est une parabole :

I. La parabole roule sur une droite : 1. Foyer. 2. Point de la périphérie.

II. La parabole roule sur une circonférence.

III. La parabole roule sur une parabole congruente, et ces deux courbes se touchent en des éléments homologues.

Post-scriptum.

*Coelingh* (*D.*). — Deux transformations par cercles. (116-159, 1 pl.).

A. Inversion de points : *a.* Définitions, idées fondamentales. *b.* Points radicaux, axes radiaux. Systèmes et faisceaux de cercles. *c.* Angles de deux cercles qui se coupent. Inversion de systèmes et faisceaux de cercles. *d.* Rapport anharmonique.

B. Inversion de tangentes : *a.* Définitions, idées fondamentales. *b.* Axes et points de similitude. Systèmes et faisceaux de cercles. *c.* Longueur des tangentes de deux cercles. Inversion de systèmes et faisceaux de cercles. *d.* Rapport anharmonique.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur des couples de cercles dans le plan ou sur la sphère, ou des couples d'ellipses coaxiales dans le plan qui admettent des polygones inscrits dans l'un et circonscrits à l'autre (suite) [1]. (160-178).

L'auteur développe les résultats qu'il a obtenus auparavant. Il indique des relations entre ses formules et les formules de M. Kluyver [2], qu'il simplifie. Enfin il termine en relevant les recherches de M. Moutard et de M. G. Loria.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur la construction d'un triangle dont on connaît la longueur des trois bissectrices. (179-199).

L'auteur exprime le rayon du cercle inscrit en fonction des trois longueurs données, ce qui mène à une équation du seizième degré. Au moyen de cas particuliers, il démontre que toutes les seize racines de cette équation ne sauraient donner de solutions du problème. *Premier cas :* Les trois longueurs sont

---

(1) *Voir* plus haut, p. 164.

(2) *Voir* plus haut, p. 165.






égales. *Deuxième cas :* Deux des trois longueurs sont égales. *Troisième cas :* Les trois longueurs sont à peu près égales, et l'on néglige les puissances des différences.

*Mantel* (*W.*). — Sur le nombre des solutions communes d'équations algébriques. (203-208).

Démonstration du théorème de Bézout.

*Van Laar* (*J.-J.*). — Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné. Détermination d'une limite inférieure. (209-214).

*Paraira* (*M.-C.*). — Le calcul de la réserve pour les contrats d'assurances à vie. (215-224).

---

ARCHIVES NÉERLANDAISES des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par M. J. Boscha [1].

Tome XXII; 1888.

*Van Geer* (*P.*). — La conique dans l'espace [2]. (58-90).

*Engelmann* (*Th.-W.*). — Le rhéostat à vis. (145-157, 5 grav.).

*Schouten* (*G.*). — Règle générale pour la forme de la trajectoire et la durée du mouvement central [3]. (158-209).

*Dojes* (*P.-H.*). — Sur le rôle du coefficient de transport dans une équation du courant électrique. (299-309).

*Julius* (*W.-H.*). — Recherches bolométriques dans le spectre infra-rouge. (310-383, 3 pl.).

*Description des appareils.* — *a.* Le bolomètre. *b.* Les résistances compensatrices. *c.* Le galvanomètre. *d.* La pile et le courant primaire. *e.* Le spectromètre. *f.* Les préparations de sel gemme. *g.* Aperçu de l'installation des instruments.

---

(1) Voir *Bulletin*, $XII_2$, 30.
(2) Voir *Bulletin*, $XII_2$, 29.
(3) Voir *Bulletin*, $XII_2$, 41.

*Observations.* — *a.* Remarques générales sur les observations. *b.* Étude des spectres calorifiques de quelques flammes. (1. La flamme de Bunsen et les flammes de l'hydrogène et de l'oxyde de carbone. 2. La flamme éclairante ordinaire du gaz. 3. Les flammes du sulfure de carbone, de la vapeur de soufre et de l'hydrogène sulfuré. 4. Hydrogène brûlant en présence du chlore et de la vapeur de brome. 5. La flamme du cyanogène et la flamme de l'oxyde de carbone dans l'oxygène. 6. La flamme de l'hydrogène phosphoré.) *c.* Quelques mots sur la nature de la chaleur émise par les corps solides, et sur le pouvoir absorbant électif de l'eau.

Remarques générales sur les résultats de ces expériences.

*Schouten* (*G.*). — Élucidation graphique de la règle générale pour la forme de la trajectoire et les propriétés du mouvement central. (392-421, grav.).

I. Introduction. II. La courbe potentielle et la droite aréolaire. III. Propriétés des trajectoires du mouvement central. IV. Applications.

*Korteweg* (*D.-J.*). — Notes sur Constantijn Huygens considéré comme amateur des sciences exactes, et sur ses relations avec Descartes. (422-466).

L'auteur résume son étude dans les mots suivants : Nous croyons que Constantijn Huygens ne saurait être rangé parmi les hommes spécialement aptes aux recherches originales. Aucun fait n'autorise à affirmer de lui, comme on peut hardiment le faire, par exemple, de Johann de Witt et du bourgmestre amsterdammois Hudde, que le labeur et les soucis de leur emploi ont seuls mis obstacle au plein développement de grandes dispositions pour les sciences exactes ou naturelles. Ce qui est indéniable, par contre, c'est le vif intérêt que lui inspiraient les travaux des autres, et la pénétration qu'il apportait à s'assimiler leurs idées. D'un regard attentif et vigilant il suivait le progrès qui, de son temps, s'accusait dans l'étude de la nature, et, pour venir en aide à ceux qui y prenaient une part active, aucune peine ne lui coûtait. C'était, pour terminer par un mot de lui-même, un homme *amoureux de l'anatomie des choses*.

L'étude est suivie par deux annexes, dont la première donne l'état de la correspondance, aujourd'hui connue, entre Constantijn Huygens et Descartes, tandis que la seconde s'occupe de la participation de Descartes à deux écrits parus sous le nom de Wassenaer.

## Tome XXIII; 1889.

*Julius* (*V.-A.*). — Sur le mouvement vibratoire d'une sphère liquide déformée. (72-81).

L'auteur démontre la symétrie de la déformation admise par M. Rayleigh.

*Engelmann* (*Th.-W.*). — Le microspectromètre (82-92, 1 pl.).

*Vries (J. de)*. — Involutions quadruples sur les courbes biquadratiques. (93-114).

I. — 1. L'involution $I_4$ sur la courbe $K_4$ engendrée par un faisceau de coniques. Les douze points de coïncidence. L'involution corésiduelle $I'_4$. L'enveloppe d'involution commune $K^6$. 2. Cette enveloppe est de l'ordre 24; ses trois tangentes doubles. 3. L'involution $I_3$ des tangentes de $K^6$. Le lieu $N_6$ des sommets accessoires des quadrangles complets, dont les quadruples de $I_4$ sont les sommets. 4. Deux involutions $I_4$, déterminées sur une $K_4$ par des faisceaux de coniques, ont six couples communs. 5. Détermination d'une $I_4$ par un quadruple, un triple et un couple, ou trois couples.

II. — 6. L'influence d'un point double de $K_4$. 7. Le cas d'un point double δ de $K_4$ commun à tous les quadruples. 8. Réprocité qui se présente dans le cas de deux involutions cubiques $I_3$ et $I'_3$. 9. Cas plus particulier. 10. Deux involutions colocales $I_3$ et $I_4$ admettent quatre couples communs. 11. Une $I_3$ particulière.

III. — 12. L'involution fondamentale ($F_4$) et son enveloppe d'involution $K^3$, son lieu $N_3$ des sommets accessoires, etc. 13. Le cas d'une $K_4$ à point double. 14. L'involution fondamentale ($F_3$). 15. Le cas d'une $K_4$ à point de rebroussement. 16. Le cas d'une $K_3$ à deux points doubles.

IV. — 17. Le faisceau de courbes ($K_p$) dont $4p-4$ points de base sont situés sur $K_4$. Le cas particulier $p=3$. 18. Le lieu L des couples communs à des quadruples engendrés par ($K_p$), et les quadruples centraux alignés avec un point donné. Toutes les involutions quadruples générées par des faisceaux de courbes admettent une enveloppe d'involution $K^6$. 19. Ces involutions plus générales ont aussi douze points de coïncidence. Le système symétrique $(p, p')_3$ des tangentes de $K^6$. 20. Ce système $(p, p')_3$ a vingt-quatre points de ramification. 21. L'enveloppe $K^6$ est de l'ordre 24. 22. Indépendance de $I_4$ de la position des points de base en dehors de $K_4$.

V. — 23. Involution $I_s$ sur $K_n$ générée par un faisceau ($K_p$) à $np-s$ points de base sur $K_n$. L'enveloppe d'involution est de la classe $\frac{1}{2}(n-1)(2s-n)+d$. 24. Les involutions $I_s$ déterminées par des faisceaux sur une courbe du genre $g$ ont $2(g+s-1)$ points de coïncidence. 25. Le système correspondant $(p, p)$. 26. Le nombre des tangentes doubles de l'enveloppe d'involution. 27. Deux involutions $I_s$ et $I_t$ sur $K_n$ admettent un nombre de

$$(s-1)(t-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

couples communs. Deux involutions $I_s$ et $I_t$ sur une courbe de genre $g$ ont $(s-1)(t-1)-g$ couples communs. 28. Une $I_t^2$ engendrée par un réseau sur une courbe du genre $g$ possède $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)-g$ couples neutres.

*Lorentz (H.-A.)*. — Sur la théorie des phénomènes thermo-électriques. (115-150).

L'auteur apporte quelques modifications à la théorie qu'il a développée il y a quelques années (¹), parce qu'une des objections faites par M. Budde lui semble parfaitement fondée. Ensuite, il répond à d'autres remarques de MM Budde et Duhem. Et enfin il s'occupe des deux Mémoires de MM. Lorberg et Parker.

*Vries* (*J. de*). — Une distribution du champ ponctuel en groupes involutifs. (355-366).

A $\frac{1}{2}n(n-3)-2$ points fixes $b$ d'un plan l'auteur joint un point quelconque $\beta$ du même plan. Ces $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ points déterminent un faisceau de courbes d'ordre $n$, qui admet $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points de base nouveaux mobiles avec $\beta$. Les groupes, qui se composent du point choisi $\beta$ et des $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points de base nouveaux, ont le caractère involutif. L'étude de ces groupes $(\beta)$ fait le sujet de ce Mémoire.

D'abord l'auteur s'occupe des points de coïncidence $\gamma$, des groupes de coïncidence $(\gamma)$, des points de ramification $\varphi$. Il trouve que le lieu des points de coïncidence est une courbe $C_{3(n-1)}$, la courbe de Jacobi du réseau $((K_n))$ des courbes $K_n$ qui passent par les $\frac{1}{2}n(n+3)-2$ points fixes $b$.

Si un des points $\beta$ du groupe $(\beta)$ parcourt une droite L, les autres points de ce groupe décrivent une courbe M de l'ordre $n^2-1$ qui passe $n$ fois par chacun des points $b$. Si L passe par un des points $b$, la courbe du réseau, qui a un point double en ce point $b$, se sépare du lieu; si L contient deux points $b$, les deux courbes $K_n$ correspondantes se séparent du lieu. Si un des points $\beta$ du groupe $(\beta)$ parcourt une courbe de l'ordre $m$ qui passe $h_i$ fois par le point $b_i$, les autres points de ce groupe décrivent une courbe de l'ordre $m(n^2-1)-n\Sigma h$ qui passe $mn-\Sigma h_i-h_i$ fois par $b_i$. De ce résultat plus général, l'auteur ne mentionne qu'un seul cas, que $\beta$ parcourt la courbe de Jacobi; dans ce cas les autres points $\beta$ décrivent la courbe de ramification.

Ensuite l'auteur s'occupe de l'involution des groupes de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points $\beta$, qui correspondent aux points $\beta$ d'une droite L. Cette involution sur la courbe correspondante M possède $2(n^2-1)(n-3)$ points doubles; l'enveloppe d'involution est de la classe $\frac{1}{2}(n^2-1)(n-2)(n-3)$. Ces résultats s'obtiennent à l'aide d'un nouveau lieu, celui des couples de points d'un même groupe en ligne droite avec un point donné $a$. Ce lieu est une courbe N de l'ordre

$$\frac{3}{2}(n-1)(n-2),$$

qui passe $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ fois par $a$ et $n-2$ fois par chacun des points $b$. A son tour l'ordre de cette courbe s'obtient à l'aide du nombre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

(¹) Voir *Bulletin*, $XII_2$, 33.

des couples neutres de l'involution $I_n^2$ déterminée sur L par le réseau ((K)), qui sont complétés aux $n^2-1$ points communs à L et M par les $3(n-1)$ points d'intersection de L et de la courbe de Jacobi.

Enfin l'auteur examine deux cas particuliers : celui de $n$ points $b$ en ligne droite ou, plus généralement, $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ points $b$ sur une courbe d'ordre $p$, et celui où plusieurs points $b$ se sont réunis en un seul.

---

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam (3e série). In-8 (1).

Tome IV; 1888.

*Van der Stok* (*J.-P.*). — Sur l'influence de la Lune sur le mouvement de l'aiguille de déclinaison. (16-38).

*Bierens de Haan* (*D.*). — Glanure sur les matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas.

Glanure sur les matériaux I-XVII, t. Ier, 1878. (65-67).
Glanure sur les matériaux XVIII-XXX, t. II, 1887. (68-78, 1 pl.).
Liste des biographies insérées dans les deux tomes. (79-81).
Liste des livres décrits ou cités dans le tome II. (82-96).

*Oudemans* (*J.-A.-C.*). — Communication par rapport à la vérification nouvelle d'un système de poids destiné à l'étalonnage à Batavia, etc. (suite) (2). (97-108).

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Sur la solution graphique d'un système d'équations linéaires. (196-252, 1 pl.).

*Korteweg* (*D.-J.*). — Notes sur Constantijn Huygens considéré comme amateur des Sciences exactes, et sur ses relations avec Descartes. (253-283) (3).

*Vries* (*J. de*). — Des involutions quadruples sur des courbes biquadratiques. (307-326) (4).

---

(1) Voir *Bulletin*, $XII_2$, p. 37.
(2) Voir *Bulletin*, $XII_2$, 41.
(3) *Voir* plus haut, p. 170.
(4) *Voir* plus haut, p. 171.

Correspondance entre M. J.-A.-C. Oudemans et feu M. Stamkart. (448-461).

Tome V; 1889.

*Schouten* (*G.*). — Élucidation graphique de la règle générale pour déterminer la forme de la trajectoire et les propriétés du mouvement central (14-43, avec grav.) [1].

*Schoute* (*P.-H.*). — Le complexe linéaire et la congruence (1,1). (66-99, 1 pl.).

*Introduction.* — I. Le complexe linéaire. II. La congruence (1,1). III. Système de complexes linéaires.

*Vries* (*J. de*). — Sur les configurations planes. (105-120).

L'auteur donne la définition des configurations planes, et la nomenclature adoptée par MM. Kantor, Schoenflies, Ameseder, etc. Son point de départ est la configuration représentée par le symbole ($12_4$, $16_3$), formée par les douze centres de similitude de quatre cercles. Il démontre que cette configuration se compose de trois quadruples dans chacun desquels chaque triple est le résidu du quatrième point. Réciproquement chaque configuration ($12_4$, $16_3$) composée de trois quadruples de cette description correspond à un système de quatre cercles de forme déterminée. L'auteur développe plusieurs propriétés remarquables de cette configuration qui se rapportent à des quadrangles et des quadrilatères complets. Ensuite il s'occupe de la configuration ($15_4$, $20_3$), de la configuration conjuguée ($12_4$, $16_3$) et de la configuration ($24_3$, $18_4$). Par les seize sommets de quatre des quadruples de cette configuration passe une quartique. Par les douze sommets d'une configuration régulière ($12_4$, $16_3$) passe une cubique, etc., etc.

*Julius* (*V.-A.*). — Sur le mouvement vibratoire d'une sphère liquide déformée (139-148) [2].

*Oudemans* (*J.-A.-C.*). — Examen de la condition que dans le micromètre à image double d'Airy la valeur d'une révolution de la vis soit indépendante de l'accommodation de l'œil. (149-155, 1 pl.).

*Vries* (*J. de*). — De la configuration harmonique ($24_3$, $18_4$). (210-219).

La configuration ($24_3$, $18_4$) en question se compose de deux configurations

---

(1) *Voir* plus haut, p. 169.
(2) *Voir* plus haut, p. 170.

conjuguées ($12_4$, $16_3$) à diagonales communes. Parce que chacune de ses dix-huit droites contient quatre points harmoniques, l'auteur l'appelle la configuration harmonique. Elle contient trente-deux diagonales D par trois points, et soixante-douze diagonales T par deux points.

En chaque point les six diagonales T sont séparées harmoniquement des trois droites par ce point par les six couples qu'on peut former avec les quatre diagonales D. Les diagonales T déterminent sur les diagonales D quatre-vingt-seize points $h$ qui forment des quadruples harmoniques avec les triples de points situés sur les diagonales D. Chaque diagonale T contient quatre points $h$; chaque point $h$ se trouve sur trois diagonales T; les quatre-vingt-seize points $h$ et les soixante-douze diagonales T forment une configuration ($96_3$, $72_4$). Les points de la configuration harmonique forment trente-deux configurations ($12_4$, $16_3$), chacune desquelles contient neuf droites et sept diagonales D de la configuration harmonique, etc., etc.

*Dojes* (*P.-H.*). — Sur quelques formules qui se rapportent à des variations de composition des solutions causées par des changements de pression et de température. (226-249).

*Introduction.* — 1. Deux liquides partiellement miscibles. 2. Corps solides et gaz. 3. Congélation de solutions de sels. 4. Cryohydrates.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — La figure qui se rapporte à la solution graphique d'un système d'équations linéaires considérée comme configuration. (267-288).

L'auteur démontre que le cas de deux équations correspond au quadrilatère complet ou la configuration ($6_2$, $4_3$), que le cas de trois équations correspond à la configuration ($20_3$, $15_4$), que le cas de quatre équations correspond à la configuration ($70_4$, $56_4$), qu'en général le cas de $n$ équations correspond à la configuration $\left[\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right]$, .... Ces configurations ont été étudiées par M. Kantor. (*Sitzungsberichte von Wien*, t. LXXX, p. 715-723.)

*Schouten* (*G.*). — Propriétés générales du roulement exact d'un corps de révolution sur un plan horizontal appliquées au mouvement d'un corps de révolution autour d'un point fixe de son axe. (292-335, 1 pl.).

*Introduction.* — I. Les premières intégrales du mouvement. II. Propriétés générales du roulement exact d'un corps de révolution sur un plan horizontal. III. Le mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe. *Premier cas* : $\lambda = \mu$. 1. $\lambda = \mu = \gamma \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$. 2. $\lambda = \mu \gtrless \gamma$. *Deuxième cas* : $\lambda + \mu = 0$. *Troisième cas* : $\lambda^2 \neq \mu^2$, ....

*Grimois* (*C.-H.-C.*). — L'énergie du condensateur sphérique. (349-357).

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Quelques formules pour le calcul des coefficients de Bernoulli, et ceux de la série pour tang $\frac{x}{2}$. (358-397).

*Cardinaal* (*J.*). — Théorie géométrique des surfaces gauches du quatrième ordre. (447-488, 1 Tableau).

L'auteur engendre la surface quartique à l'aide de deux faisceaux projectifs de quadriques. Il indique huit cas où l'élément mobile de l'intersection des quadriques correspondantes des deux faisceaux ponctuels ou tangentiels se compose de lignes droites, ce qui le mène aux quatre groupes de surfaces gauches du quatrième ordre suivants :

*Premier groupe.* — Les courbes de base des deux faisceaux sont deux quadrilatères à un couple de côtés opposés communs. Ces deux faisceaux sont à la fois des faisceaux ponctuels et des faisceaux tangentiels.

*Deuxième groupe.* — Les courbes de base se composent d'une cubique gauche commune, chacune d'elles complétée par une corde de cette cubique. Dans ce cas les deux faisceaux sont encore à la fois des faisceaux ponctuels et tangentiels.

*Troisième groupe.* — Un des faisceaux ponctuels est une involution de couples de plans, et la courbe de base de l'autre faisceau se compose de l'axe de cette involution et d'une cubique gauche dont cet axe est une corde.

*Quatrième groupe.* — Un des faisceaux tangentiels est une involution de couples de points, et la surface développable de base de l'autre se compose du support de cette involution et d'une surface développable cubique dont ce support est « une droite dans deux plans. »

Le cas de deux involutions de couples de plans ou de points ressort au premier groupe qui contient trois espèces de surfaces d'après ce que les côtés opposés communs des deux quadrilatères sont réels, imaginaires conjugués ou situés à une distance infiniment petite l'un de l'autre. Le deuxième groupe contient cinq espèces qui diffèrent par l'ordre et la disposition de la courbe double et du « bitangent torse ». Et chacun des deux autres groupes se compose de quatre espèces différentes.

Le tableau contient la nomenclature des espèces différentes d'après MM. Cremona, Cayley, Salmon et Rohn.

Tome VI; 1890.

*Vries* (*J. de*). — Sur les configurations planes polyédrales. (8-38).

Si l'on coupe un $n$-angle complet dans l'espace par un plan, on obtient $\binom{n}{2}$ points d'intersection avec les arêtes, et $\binom{n}{3}$ droites d'intersection avec les

faces. Ces éléments forment une configuration régulière $\left\{\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_{3}\right\} = \pi_n$, que l'auteur appelle une configuration polyédrale. L'étude de cette configuration forme le sujet de ce Mémoire.

*Vries* (*J. de*). — Sur un groupe de configurations planes régulières. (45-68).

L'auteur s'occupe de la configuration $\left\{\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right\}$ dont les configurations planes polyédrales et les configurations obtenues par M. Van den Berg [1] sont des cas particuliers.

*Vries* (*J. de*). — Une distribution du champ ponctuel en groupes involutifs. (92-102) [2].

*Bierens de Haan* (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXXI. Quelques lettres de Constantijn Huygens, le père, au P. Marin Mersenne. (103-115). Annotations. (116-118).

*Buys Ballot* (*C.-H.-D.*). — Résultats de la série d'observations météorologiques faites à Utrecht pendant quarante années. (129-159, 6 Tableaux).

*Vries* (*J. de*). — Sur la configuration desmique $9_3$. (171-184).

L'auteur s'occupe de configurations desmiques, de configurations desmiques connexes, de configurations autoconnexes, etc. Ces résultats s'alignent à ceux de MM. Kantor, Martinetti, Schœnflies, etc.

*Cardinaal* (*J.*). — La construction des surfaces courbes au moyen de sections planes. (198-215).

Ce Mémoire est une suite d'un Mémoire précédent [3]. L'auteur y comble une lacune de celui-là en évaluant le nombre des constantes de chacune des espèces de surfaces gauches quartiques.

D'abord l'auteur détermine la surface générale de l'ordre $n$ à l'aide de sections planes. Il fait voir que cette manière de déterminer exige $n$ sections et un point. La première section plane est déterminée par $\frac{1}{2}n(n+3)$ points, la $p^{\text{ième}}$ par $\frac{1}{2}(n-p+2)(n-p+3)$, ....

---

[1] *Voir* plus haut, p. 175.
[2] *Voir* plus haut, p. 172.
[3] *Voir* plus haut, p. 176.

Ensuite l'auteur s'occupe des simplifications qui se présentent dans la détermination d'une surface gauche. Dans ce cas, le nombre des points qui déterminent une section plane est moindre, chaque surface gauche $n$ ayant une courbe double dont l'ordre n'est pas inférieur à $n-2$. De plus, le nombre des sections à connaître s'abaisse à trois, parce que le mouvement de la droite est guidé par trois directrices. Et quelquefois la construction connue de la surface peut encore réduire davantage ce nombre de sections.

Enfin, l'auteur applique sa théorie aux surfaces gauches du quatrième ordre. Dans ce cas, on n'a qu'à connaître une section unique et les points de la courbe double situés dans un second plan. Cela mène aux nombres de constantes de ces surfaces, et ces résultats s'accordent avec ceux obtenus de M. Salmon par l'Analyse.

*Van der Stok* (Dr *J.-P.*). — L'analyse harmonique des marées dans la mer de Java. (216-225).

*Vries* (*J. de*). — Sur des configurations planes qui se déduisent des groupes d'osculation de la cubique plane. (232-264).

*Introduction.* — I. Groupes d'osculation. II. Groupes pléthoriques. III. Polygones tangentiels. IV. Considérations générales des configurations formées de groupes pléthoriques.

*Van den Berg* (*F.-J.*). — Encore une fois les coefficients de Bernoulli. (265-276) (1).

*Schoute* (*P.-H.*). — Équianharmonie et harmonie de systèmes polaires de formes binaires, etc. (277-298).

Une traduction française de ce travail vient de paraître dans l'*Annuaire de l'Association française* (Congrès de Paris, 1889).

*Oudemans* (*J.-A.-C.*). — Comparaison de deux mètres à bout de verre à températures d'été et d'hiver. (299-334, 1 pl.).

*Vries* (*J. de*). — Sur des configurations planes où chaque point se trouve sur deux droites. (382-407).

L'auteur s'occupe des deux espèces de configurations $\{(2i+1)n_2, 2n_{2i+1}\}$ et $\{in_2, n_{2i}\}$. Il démontre que ces configurations se construisent à l'aide de multilatères complets. En ajoutant à chacune d'elles les points d'intersection des droites de configuration qui sont séparées l'une de l'autre, on obtient $\{n(2n-1)_2, 2n_{2n-1}\}$ et $\{\frac{1}{2}n(n-1)_2, n_{n-1}\}$, c'est-à-dire les multilatères com-

(1) Voir *Bulletin*, $IX_2$, 62.

plets de $2n$ et $n$ côtés. Et les points ajoutés forment, avec les droites des configurations originales, les configurations nouvelles $\{(2n-2i-2)n_2, 2n_{2n-2i-2}\}$ et $\{\frac{1}{2}n(n-1-2i)_2, n_{n-1-2i}\}$. Ces configurations forment ce que l'auteur appelle les configurations *complémentaires* des configurations données. Ainsi, le complément d'une configuration $\{\frac{1}{2}n(n-3)_2, n_{n-3}\}$, c'est un multilatère simple à $n$ côtés, ou il se compose de quelques multilatères simples dont la somme des côtés est $n$. Cela prouve que le nombre des configurations $\{\frac{1}{2}n(n-3)_2, n_{n-3}\}$ est égal au nombre de décompositions de $n$ en groupes, chacun desquels contient trois unités au moins.

Ensuite l'auteur s'occupe de quelques cas particuliers. Configuration $(3n_2, 2n_3)$, ses transformées atrigonique, trigonique et ditrigonique; deux espèces de $(9_2, 6_3)$, cinq espèces de $(12_2, 8_3)$, dix-huit espèces de $(15_2, 10_3)$.

Configuration $(2n_2, n_4)$; le cas $n=5$ (multilatère complet à cinq côtés), une espèce de $(12_2, 6_4)$, deux espèces de $(14_2, 7_4)$, six espèces de $(16_2, 8_4)$, transformation des configurations $(2n_2, n_4)$.

*Schoute* (*P.-H.*). — Les tétraèdres à faces semblables. (462-481, 1 pl.).

1. Il y a deux tétraèdres à faces semblables, le tétraèdre connu à trois couples d'arêtes opposées égales (étudié par MM. Dostor, Lemoine, Chéfik-Bey, Neuberg) et un tétraèdre inconnu aux trois couples d'arêtes opposées $(r, r)$, $(r^2, r^2)$ et $(1, r^3)$ limité par deux triangles $(1, r, r^2)$ et deux triangles $(r, r^2, r^3)$. 2. Ces deux cas sont les seuls. 3. Etude du premier tétraèdre (tétraèdre régulièrement isoscèle). La position des points de contact d'une des faces avec les huit sphères qui touchent les quatre faces. Les figures semblables obtenues par le rabattement des faces. 4. Etude du second tétraèdre (tétraèdre irrégulièrement isoscèle). Les limites de $r$. 5. La position des points de contact d'une des faces avec les huit sphères. 6. Les figures semblables obtenues par le rabattement.

---

MEMORIE DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. In-4°, 4e série.

t. II; 1881 (1).

*Razzaboni* (*C.*). — Sur quelques cas d'écoulement de liquides par des vases communiquants. (135-155).

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur l'emploi des coordonnées obliques dans la détermination de l'ellipsoïde d'inertie. (157-174).

---

(1) Voir *Bulletin*, V$_2$, 180.

L'auteur, après avoir rappelé l'équation et les propriétés de l'ellipsoïde de Chelini, établit l'équation de l'ellipsoïde d'inertie pour le cas où par un choix particulier des directions des axes coordonnés, il est possible de rendre

$$\int yz\,d\mathrm{M} = \int zx\,d\mathrm{M} = \int xy\,d\mathrm{M} = 0.$$

Il ajoute d'autres considérations sur ce sujet et fait l'application des théorèmes démontrés à des cas particuliers.

*Beltrami* (*E.*). — Sur la théorie des fonctions potentielles symétriques. (461-505).

Dans son Mémoire *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi* (*Mem. d. Acc. di Bologna*, 1880) l'auteur a établi par incidence une formule qu'il emploie maintenant pour déterminer la fonction potentielle d'un disque circulaire, dont la densité varie par anneaux concentriques, lorsqu'on connaît les valeurs de cette fonction aux points du disque. Il en déduit aussi d'une manière simple plusieurs autres formules en partie nouvelles, dont il fait diverses applications.

*Boschi* (*P.*). — Quelques propriétés des formes géométriques fondamentales collinéaires, de deuxième et de troisième espèce, ayant des éléments unis. (507-513).

En deux plans collinéaires non superposés, ayant un point uni, les droites joignant les points correspondants s'appuient sur une droite qui est aussi le lieu des centres de perspective pour les séries de points correspondantes passant par le point uni.

L'auteur expose cette propriété et d'autres relatives au cas de deux points unis, et à celui des plans superposés ayant des éléments unis. Enfin il étudie les propriétés analogues en deux espaces collinéaires, et dans les formes corrélatives.

Tome III; 1882.

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur l'ellipsoïde de Culmann. (9-42).

*Pincherle* (*S.*). — Sur quelques développements en série pour des fonctions analytiques. (151-180).

La série

$$\Sigma c_\nu f_\nu(x),$$

les $f_\nu(x)$ étant des fonctions qui procèdent uniformément dans un champ donné, représente une fonction analytique ayant le caractère de fonction rationnelle. Et si les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont régulières dans le même champ donné, et la série $\Sigma\,\varphi_\nu(x)$ est uniformément convergente, la série

$$\Sigma\,\varphi_\nu(x) f_\nu(x)$$

représente aussi une fonction analytique ayant le caractère de fonction rationnelle. L'auteur, après avoir obtenu ces résultats, les applique aux développements

$$\Sigma c_\nu \frac{x^\nu}{1 - a x^\nu}$$

et aux séries de fonctions de Bessel.

Si les $f_\nu(x)$ sont aussi finies dans le voisinage de $x = 0$, toute fonction $F(x)$ régulière autour de ce point peut être développée en série comme il suit :

$$F(x) = \Sigma c_\nu x^\nu f_\nu(x),$$

développement dont l'auteur donne aussi des applications. Enfin M. Pincherle démontre par des considérations arithmétiques qu'une fonction régulière dans le voisinage de $x = 0$ peut être développée en série de la forme $\Sigma c_\nu \frac{x^\nu}{1 - x^\nu}$.

*Beltrami* (*E.*). — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (217-265).

L'auteur montre par des considérations géométriques préliminaires quelques imperfections de la méthode de Mossotti. Puis il établit le principe général de l'équilibre dont il déduit ensuite les équations indéfinies et les équations aux limites en coordonnées curvilignes. Il déduit de ces équations la théorie des tensions superficielles. Suit l'exposition de quelques cas remarquables d'équilibre, l'indication des conditions sous lesquelles on peut des équations générales obtenir celles données par Brioschi, Lecornu et Mossotti, et enfin quelques observations sur la déformation infiniment petite d'une surface flexible et inextensible.

*Razzaboni* (*C.*). — Sur le mouvement de l'eau par des vases discontinus. (267-282).

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur l'ellipsoïde de Culmann en quelques cas particuliers. (283-289).

*Fais* (*A.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, à quatre ou plusieurs variables indépendantes. (427-443).

*Fiorini* (*M.*). — Sur la projection cartographique isogonique. (499-523).

*Boschi* (*P.*). — Détermination des centres de courbure dans les coniques. (579-588).

Application du théorème de Plücker sur trois coniques ayant deux points communs.

*Porchiesi* (*A.*). — Sur les systèmes de coniques passant par deux points fixes. (681-726).

Coordonnées des coniques passant par deux points. Correspondance projective entre les points de l'espace ordinaire et les coniques du système. Représentation des courbes gauches et de leurs développables osculatrices. Propriétés des foyers d'une quartique bicirculaire. Développées des courbes planes.

Tome IV, 1883.

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur les enveloppes nulles de la seconde classe relatives à un système donné de points affectés de coefficients donnés. (123-158).

*Beltrami* (*E.*). — Sur les fonctions associées, et en particulier sur celles de la calotte sphérique. (211-246).

L'auteur reprend l'examen de la fonction potentielle d'un disque symétriquement électrisé, trouvée par lui dans son précédent Mémoire : *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (t. II, 1881), et en donne la fonction associée. Il en déduit par la méthode d'inversion les fonctions associées d'une distribution symétrique sur une calotte sphérique, et enfin il donne quelques transformations des fonctions associées.

*Righi* (*A.*). — Sur les changements de longueur d'onde obtenus par la rotation d'un polariseur, et sur le phénomène des battements produit avec les vibrations lumineuses. (247-286).

*Arzelà* (*C.*). — Sur les produits infinis. (419-439).

Pour que le produit

$$\prod_{1}^{\infty}(1+v_n),$$

où les $v_n$ sont des fonctions d'une variable, ait une propriété donnée, par exemple la convergence uniforme, la dérivabilité, l'intégrabilité, etc., il est nécessaire et suffisant que la série $\sum_{1}^{\infty} v_n$ ait cette même propriété.

*Riccardi* (*P.*). — Notices sur l'histoire de la Géodésie en Italie dès les premières époques jusqu'après la moitié du XIX^e siècle. Seconde Partie, chap. I^er. (441-506).

L'introduction et la première partie sont insérées dans le t. X (1879). Le sujet de ce premier chapitre de la seconde est l'arpentage, la topographie et la géo-

desie pratique dès les premières années du XVII^e siècle jusqu'aux dernières du XVIII^e.

*Fiorini* (*M.*). — Sur la projection cartographique isogonique. (593-610, 1 pl.).

*Razzaboni* (*C.*). — Sur le mouvement linéaire des liquides eu égard à la viscosité, avec l'application à quelques cas d'écoulement. (689-706).

*Saporetti* (*A.*). — Méthode pour trouver promptement les instants du lever et du coucher de la Lune, avec une planche. (789-793).

Tome V; 1884.

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur le mouvement d'un point sur une surface donnée. (211-230).

*Saporetti* (*A.*). — Illustration de la méthode de Gauss pour la détermination de quelques éléments principaux des orbites planétaires (excentricité, paramètre, longitude du périhélie sur l'orbite), et nouvelle méthode de solution. (359-372).

*Retali* (*V.*). — Sur une série particulière de coniques d'indice 2. (373-386).

*Razzaboni* (*C.*). — Sur le mouvement oscillatoire de l'eau en deux vases prismatiques communiquant par un troisième eu égard à la viscosité du liquide. (387-400).

*Porchiesi* (*A.*). — Sur une correspondance entre l'espace non euclidien et le plan euclidien. (421-452).

L'auteur fait correspondre aux points de l'espace non euclidien les cercles du plan euclidien.

*Dainelli* (*U.*). — Sur la vitesse et l'accélération d'un point soumis à l'action d'une force centrale. (511-522).

*Beltrami* (*E.*). — Sur la théorie de l'induction magnétique suivant Poisson. (551-584).

L'auteur établit cette théorie de manière à éviter les objections qu'on a faites

à la méthode de Poisson, qui n'est pas complètement rigoureuse. Les équations de l'induction magnétique sont les suivantes :

$$\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}=0,$$
$$\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}=0,$$
$$\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}=0,$$

U étant la fonction potentielle des forces induisantes, V celle de la distribution cherchée dont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les moments, et $\Psi$ une fonction entière, homogène et du second degré par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dont les coefficients sont des fonctions de $x$, $y$, $z$; la forme de ces fonctions dépend de la nature du corps induit.

*Pincherle* (*S.*). — Notices sur l'histoire de la Géodésie en Italie dès les premières époques jusque après la moitié du XIX^e^ siècle. Seconde Partie, Chap. II. (585-682).

*La topographie, l'arpentage et la géométrie pratique en Italie, depuis les dernières années du* XVIII^e^ *siècle jusqu'à nos jours.* Avec ce Chapitre se termine la deuxième Partie. (*Voir* ci-dessus, t. IV, 1883).

*Pincherle* (*S.*). — Quelques observations sur les ordres d'infini des fonctions. (739-750).

Une des conclusions auxquelles arrive l'auteur est que la représentation des ordres d'infini par des nombres n'est pas possible d'une manière absolue, et qu'il faudrait introduire un nouveau symbole pour l'ordre de chaque nouvelle fonction.

*Boschi* (*P.*). — Sur le nombre de combinaisons d'une classe donnée ayant une somme donnée. (805-818).

Tome VI; 1885-86.

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur la construction géométrique de l'axe central d'un système donné de forces, et sur quelques propriétés des droites qui sont caractéristiques de plans dans le système donné. (83-94, 1 pl.).

La construction de l'axe central est faite à l'aide de constructions planes, en supposant les forces données par leurs projections sur deux plans orthogonaux.

*Pincherle* (*S.*). — Sur les groupes linéaires de fonctions d'une variable. (101-118).

2de Part.



*Retali* (V.). Sur les coniques conjuguées. (189-198).

Propriétés des quatre coniques par rapport auxquelles deux coniques données sont polaires réciproques.

*Pincherle* (*S.*). — Quelques observations générales sur les groupes de fonctions. (205-214).

*Razzaboni* (*C.*). — Sur quelques cas d'écoulements latéraux. (341-362).

*Beltrami* (*E.*). — Sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les théories du potentiel et de l'élasticité. (401-448).

*Saporetti* (*E.*). — Méthode analytique pour la détermination de l'équation du temps. (481-500, 1 pl.).

*Ruffini* (*F.-P.*). — Sur le rapport des rayons de courbure d'une courbe plane à ceux de sa développée. (715-730).

---

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI; in-8°, 6e série [1].

Tome V; 1886-87.

*Abetti* (*A.*). — Observations astronomiques faites à l'observatoire de Padoue avec l'équatorial Dembowski en 1886. (41-51).

*Righi* (*A.*). — Sur les phénomènes qui se produisent par la superposition de deux réticules, et sur quelques applications. (141-199, 1 pl.).

*Abetti* (*A.*). — Continuation des observations astronomiques faites à Padoue en 1886, et Appendice. (209-220).

*Lorenzoni* (*G.*). — Sur l'équation différentielle du mouvement du pendule physique, dont l'axe de suspension se meut restant parallèle à soi-même. (331-375, 1 pl.).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. $XIV_2$, p. 159.

*Ragona* (*D.*). — Études comparatives sur la fréquence des vents en trois lieux de la province de Modène. (443-482).

*Garbieri* (*G.*). — Sur l'élimination des fonctions arbitraires. (831-841).

*Castelnuovo* (*G.*). — Étude sur l'homographie de seconde espèce. (1041-1115).

L'homographie de seconde espèce est une extension de l'homographie ordinaire, déjà étudiée en 1862 par August (*Relatio duploprojectiva*), par Schubert [*Die trilineare Beziehung* (*Math. Ann.*, Bd. XVII)], Le Paige [*Mémoire sur quelques applications de la théorie des fonctions algébriques* (*Mémoires couronnés publiés par l'Académie royale des Sciences de Belgique*, t. XLII, 1879. *Note sur l'homographie du troisième ordre* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3e série, t. V, 1883)], Le Paige et Folie (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XLIII, 1882; XLV, 1884). L'auteur reprend ce sujet en exposant les résultats connus et ceux de ses propres recherches en forme purement géométrique. Le but principal de cette extension de l'homographie est l'application qu'on en peut faire à l'étude des courbes et des surfaces. L'auteur applique ses résultats aux courbes et aux surfaces du troisième ordre.

*Favaro* (*A.*). — Sur la *Bibliotheca mathematica* de Gustave Eneström. Deuxième Communication. (1157-1161).

*Bassani* (*A.*). — Généralisation de la formule de Lagrange. (1163-1170).

*Murer* (*V.*). — Sur la surface du cinquième ordre douée de quartique double de première espèce. (1223-1231).

Exposé, sans démonstrations, de quelques propriétés de cette surface.

*Castelnuovo* (*G.*). — Sur une congruence du troisième ordre et sixième classe de l'espace à quatre dimensions, et sur ses projections dans l'espace ordinaire. (1249-1281).

L'auteur étudie la congruence engendrée par trois formes collinéaires de seconde espèce dans l'espace $R_4$. Les rayons de cette congruence forment une surface du troisième ordre à trois dimensions. Les projections sur l'espace ordinaire donnent aussi des congruences dont l'auteur étudie les propriétés.

*Bordiga* (*G.*). — Sur une certaine surface du septième ordre. (1397-1403).

Tome VI; 1887-88.

*Abetti* (*A.*). — Observations astronomiques faites à Padoue en 1887. (157-169).

*Lazzeri* (*G.*). — Sur les courbes et les développables multiples d'une classe de surfaces algébriques. (171-188).

Les surfaces étudiées par l'auteur sont les surfaces représentables uniponctuellement sur un plan, de manière que leurs sections planes correspondent aux courbes d'un système linéaire déterminé par quatre droites $n$-uples.

*Favaro* (*A.*). — Sur quelques applications de la méthode des équipollences. (205-211).

Compte rendu du Livre de M. Laisant.

*Favaro* (*A.*). — Sur la *Bibliotheca mathematica* de G. Eneström. Troisième Communication. (351-356).

*Castelnuovo* (*G.*). — Sur les congruences du troisième ordre dans l'espace de quatre dimensions. Deuxième Mémoire. (525-579).

Dans ce Mémoire, l'auteur reprend le sujet du précédent, en supposant que les trois formes colinéaires qui engendrent la congruence aient des ternes d'espaces homologues passant par un même plan, ce qui abaisse la classe de la congruence. Il obtient ainsi des congruences du troisième ordre et de la classe cinquième, troisième, deuxième respectivement.

*Lorenzoni* (*G.*). — Éclipse totale de Lune et occultations contemporaines d'étoiles observées à Padoue dans la nuit du 28 janvier 1888. (609-620).

*Turazza* (*D.*). — Introduction à un cours de Statique des systèmes variables. (701-723).

*Bordiga* (*G.*). — Sur les complexes, en général, dans l'espace de quatre dimensions, et, en particulier, sur quelques complexes du premier ordre, leur projection et représentation dans l'espace ordinaire. (919-962).

*Bernardi* (*E.*). — Sur un problème curieux d'Hydrodynamique pratique. (1309-1348, 1 pl.).

*Lorenzoni* (*G.*). — Correction d'échelle et élévation sur la mer

du baromètre de l'Observatoire astronomique de Padoue, et résultats moyens obtenus avec cet instrument de 1868 à 1887. (1367-1395).

*Montesano* (*D.*). — Sur certains groupes fermés de transformations involutives dans le plan et dans l'espace. (1425-1444).

---

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET LETTRES DE MONTPELLIER ([1]).

Années 1885-1886.

*Combescure* (*Ed.*). — Sur le principe des vitesses virtuelles.

La démonstration de Sturm est perfectionnée sur deux points : 1° en ce qui concerne le système auxiliaire de liaisons; 2° en ce qui se rapporte au mode de destruction réciproque des forces. On se borne au cas d'un système à liaisons complètes : le cas général pouvant, comme on le sait, se ramener à celui-là.

*Dautheville.* — Démonstration d'un théorème de M. E. Picard.

Le théorème de M. E. Picard a fait l'objet d'une Note insérée au t. XCII, p. 690, des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Il s'agit d'une décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme dans tout le plan, et continue en tous les points, sauf sur un cercle où la fonction peut avoir une infinité de points singuliers essentiels distribués d'une manière quelconque. M. Dautheville démontre très simplement la convergence du produit des facteurs primaires donnés par M. E. Picard.

*Brocard* (*H.*). — Propriétés d'un groupe de trois paraboles.

Ces paraboles sont tangentes aux deux bissectrices de chaque angle d'un triangle, et aux deux hauteurs correspondant aux côtés qui forment cet angle. Les trois paraboles admettent deux tangentes communes rectangulaires. Ce groupe de trois paraboles a des propriétés qu'on peut rapprocher de celles de deux groupes de trois paraboles liées au même triangle. Ces deux autres groupes sont formés : 1° par les paraboles tangentes à deux côtés du triangle, aux extrémités du troisième; 2° par les paraboles tangentes aux deux bissectrices de chaque angle, et aux perpendiculaires au milieu des côtés qui comprennent cet angle.

*Combescure* (*Ed.*). — Sur quelques théories élémentaires de Calcul intégral.

---

([1]) Voir *Bulletin*, $X_2$, p. 10.

Il s'agit de l'intégration des différentielles totales lorsque les variables indépendantes sont réelles ou imaginaires. Ce Mémoire est très intéressant et montre jusqu'à quel point le regretté Combescure avait le sentiment de l'analyse.

*Brocard* (*H.*). — Remarques sur l'analyse indéterminée du premier degré.

Ces remarques, formant un véritable Mémoire de près de 100 pages, sont des exposés de méthodes particulières, destinées à remplacer avantageusement la méthode du plus grand commun diviseur. Le nombre des applications numériques est considérable. Le travail se termine par l'historique *très complet* de la question d'analyse indéterminée qui fait l'objet des Remarques de M. Brocard. Cet historique, qui fait remonter la question aux temps antiques des Chinois, des Hindous et des Grecs, s'arrête à l'année 1884.

---

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES, SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (¹).

Troisième série, t. V, 1888.

*Sauvage*. — Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. (9-22).

Dans un Mémoire précédent, M. Sauvage a montré que le système

$$(x - x_0)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet, dans le domaine du point $x_0$, où les coefficients $a$ sont supposés holomorphes, un système fondamental de solutions *régulières*, c'est-à-dire de la forme $\Sigma(x - x_0)^r\varphi(x - x_0)$, où $r$ est un nombre quelconque et $\varphi(x - x_0)$ un polynôme entier en $\log(x - x_0)$ dont les coefficients admettent le point $x_0$ comme point ordinaire ou comme pôle.

Il démontre actuellement la réciproque de cette proposition.

L'ensemble des deux Mémoires de M. Sauvage concourt ainsi à l'établissement du théorème suivant :

Étant donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

linéaires, homogènes et à coefficients uniformes dans le domaine du point $x_0$,

(¹) Voir *Bulletin*, $XIV_2$, p. 53.

pour que ce système ait dans ce domaine toutes ses solutions régulières, il faut et il suffit qu'on puisse le ramener à la forme

$$(x-x_0)\frac{dv_i}{dx}=b_{i1}v_1+\ldots+b_{in}v_n \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

par une substitution de la forme $y_i=x^{\rho_i}v_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ où les exposants $\rho_i$ sont des entiers tels que les coefficients $b$ soient holomorphes dans le domaine de $x_0$.

L'auteur termine par quelques considérations sur l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre qu'on obtient en éliminant $n-1$ inconnues $v$ entre les $n$ équations du système ci-dessus.

## *Nazimow.* — Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres. (23-48, 147-176).

Ce Mémoire est une analyse du Traité *Sur les applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres,* que M. Nazimow a publié en langue russe au commencement de 1885. Laissant de côté les Chapitres de cet Ouvrage qui ont pour objet des théories suffisamment connues, l'auteur se borne à résumer les parties de son Livre qui se rapportent à des sujets moins généralement étudiés.

L'auteur a divisé le travail qu'il publie dans les *Annales de l'École Normale* en quatre Chapitres, qui correspondent à quatre Chapitres de son Traité.

Dans le premier Chapitre il développe la première des méthodes par lesquelles Jacobi obtient des théorèmes arithmétiques. Pour obtenir des théorèmes de cette nature, on peut employer de deux manières différentes les séries trigonométriques qui se présentent dans la théorie des fonctions elliptiques. La première manière consiste à prendre ces séries sous leurs formes générales et à en déduire des théorèmes où figurent des fonctions arbitraires; en spécialisant ces fonctions, on obtient autant de théorèmes particuliers. La seconde manière, dont le principe a été indiqué aussi par Jacobi, consiste à déduire des théorèmes particuliers par cette méthode directe que M. Bougaïeff a nommée la méthode des *constantes elliptiques.* Dans ce premier Chapitre, M. Nazimow s'occupe uniquement d'une classe toute spéciale de théorèmes arithmétiques, ceux qui concernent le nombre des solutions de certaines équations indéterminées du second degré, théorèmes identiques ou analogues à ceux dont Liouville a fait connaître un si grand nombre dans les premiers volumes de la seconde série de son journal.

La deuxième Chapitre est consacré à l'exposition de la méthode dont M. Hermite a fait usage pour démontrer les huit formules fondamentales, publiées par M. Kronecker dans le t. LVII du *Journal de Crelle.* C'est encore la méthode de M. Hermite que M. Nazimow applique à la démonstration des formules nouvelles de M. Gierster (*Mathematische Annalen*).

Le troisième Chapitre se rapporte aux théorèmes arithmétiques généraux concernant les fonctions arbitraires. Il s'agit de ces identités qui ont eu lieu entre des sommes contenant des fonctions arbitraires à arguments variables; ces arguments dépendent linéairement des solutions entières de certaines équations indéterminées du second degré. Liouville a publié un grand nombre de ces théorèmes dans les premiers Volumes de la 2e série de son Journal. M. Hermite a indiqué une méthode pour obtenir des théorèmes de cette nature où

interviennent des fonctions à un seul argument (*Journal de Liouville*, 2e série, t. VII).

Enfin, dans le quatrième Chapitre, M. Nazimow démontre une formule due à Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 24) et qui donne le nombre des classes des formes quadratiques binaires proprement primitives qui ont un déterminant donné.

## *Combescure.* — Sur le déplacement tangentiel de deux surfaces rigides. (49-78).

Les coordonnées rectangulaires X, Y, Z d'une surface rigide $\Sigma$, rapportée à trois axes fixes OXYZ, sont supposées des fonctions de deux paramètres indépendants $\alpha$, $\beta$. Les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ d'une autre surface rigide S, liée à des axes mobiles $O_1xyz$, sont supposées aussi fonctions de $\alpha$, $\beta$. Même supposition pour les neuf cosinus directeurs $a$, $a'$, ..., $c''$ du système d'axes fixes par rapport au système d'axes mobiles. La courbe $c_\alpha$ (où $\alpha$ varie seul) de la surface mobile doit être constamment tangente à la courbe $C_\alpha$ de la surface fixe. Même condition pour les courbes $C_\beta$, $c_\beta$. Enfin les éléments correspondants des deux courbes $C_\alpha$, $c_\alpha$ doivent être dans le rapport donné $G(\alpha, \beta)$, et les éléments correspondants de $C_\beta$, $c_\beta$ dans le rapport donné $G_1(\alpha, \beta)$. Si G et $G_1$ sont tous deux égaux à l'unité, les deux surfaces ne font que rouler sans glisser l'une sur l'autre. C'est ce dernier cas, le plus simple et le plus important, qui occupe surtout M. Combescure.

Deux problèmes principaux se posent alors :

1° On regarde $x$, $y$, $z$ comme des fonctions données de $\alpha$, $\beta$ et il s'agit d'en déduire toutes les autres quantités, les six composantes de rotation, les neuf cosinus directeurs, les coordonnées X, Y, Z;

2° On se donne le déplacement angulaire, c'est-à-dire les rotations ou bien les cosinus, et l'on cherche à en déduire $x$, $y$, $z$ et par suite X, Y, Z.

*Premier problème.* — M. Combescure ramène ce problème à l'intégration du système

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-\frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}-\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}+2\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\mu\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}-\mu_1\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\\ &\qquad=(\lambda^2-\mu\mu_1)\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}-\frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right),\end{aligned}\right.$$

avec les deux autres équations analogues, système où les seules inconnues sont les trois indéterminées $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$, de M. Darboux (voir *Théorie des surfaces*).

Ces trois quantités une fois connues, on en déduit les six composantes de rotation par les formules (Darboux)

$$\begin{aligned} p&=\lambda\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial x}{\partial\beta}, & q&=\lambda\frac{\partial y}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial y}{\partial\beta}, & r&=\lambda\frac{\partial z}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial z}{\partial\beta},\\ p_1&=-\lambda\frac{\partial x}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial x}{\partial\alpha}, & q_1&=-\lambda\frac{\partial y}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}, & r_1&=-\lambda\frac{\partial z}{\partial\beta}+\mu_1\frac{\partial z}{\partial\alpha}. \end{aligned}$$

Des rotations on conclut les cosinus directeurs par intégration d'un système

bien connu aux différences totales, puis X, Y, Z par des quadratures. L'auteur montre que l'intégration du système (1) peut être ramenée à celle d'une équation unique du second ordre où les dérivées partielles du second ordre ne figurent que sous forme linéaire.

*Deuxième problème.* — M. Combescure le résout par l'introduction de trois nouvelles indéterminées $\rho$, $\sigma$, $\sigma_1$ définies par les formules

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = p\rho - p_1\sigma, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = q\rho - q_1\sigma, \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = r\rho - r_1\sigma,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -p_1\rho + p_1\sigma, \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -q_1\rho + q\sigma_1, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = -r_1\rho + r\sigma_1,$$

et qui, en conséquence, sont liées à celles de M. Darboux par les relations

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu\mu_1}, \qquad \sigma = \frac{\mu}{\lambda^2 - \mu\mu_1}, \qquad \sigma_1 = \frac{\mu_1}{\lambda^2 - \mu\mu_1},$$

Actuellement, les six composantes de rotation étant données, on en déduira les trois inconnues $\rho$, $\sigma$, $\sigma_1$ par l'intégration du système linéaire

$$(2) \quad p\left(\frac{\partial \rho}{\partial \beta} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \alpha}\right) + p_1\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\right)\rho - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\sigma - \frac{\partial p}{\partial \alpha}\sigma_1 = 0,$$

avec les deux autres équations analogues.

Cette intégration se ramène à celle d'une seule équation linéaire du second ordre. Ayant obtenu $\rho$, $\sigma$, $\sigma_1$, on aura $x$, $y$, $z$ par des quadratures et X, Y, Z par d'autres quadratures.

A chaque solution particulière de l'équation du deuxième ordre dont il a été question correspond un couple de surfaces bien déterminées susceptibles de roulement réciproque l'une sur l'autre. Si l'on connaît deux surfaces particulières $(x, y, z)$, $(X, Y, Z)$ applicables l'une sur l'autre, on pourra en déduire les cosinus directeurs $a$, $b$, ... et par suite les rotations $(p, q, r)$ $(p_1, q_1, r_1)$. On sera donc en mesure de construire le système (2). L'intégration fournira les quantités $\rho$, $\sigma$, $\sigma_1$ qui conduiront à la série complète des couples de surfaces à roulement réciproque répondant au mouvement angulaire donné.

L'auteur fait connaître les formules qui doivent être substituées aux relations (22) quand on introduit des rotations imaginaires.

Il revient, en terminant, sur le cas général du roulement accompagné de glissement. Il étudie le roulement et le glissement d'un plan. Il montre qu'une surface quelconque $(x, y, z)$ étant donnée, la détermination de la surface $(X, Y, Z)$ revient à chercher, par la théorie de l'*application*, toutes les surfaces dont les trois paramètres différentiels $\sum \frac{\partial X^2}{\partial \alpha^2}$, $\sum \frac{\partial X^2}{\partial \beta^2}$, $\sum \frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial \beta}$ ont des valeurs données.

## *Darboux.* — Sur la représentation sphérique des surfaces. (79-96).

M. Darboux démontre un théorème qui permet de déterminer, dans un nombre illimité de cas nouveaux, toutes les surfaces ayant une représentation sphérique donnée.

Si l'on connaît quatre solutions particulières de l'équation aux dérivées par-

tielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = A\frac{\partial z}{\partial\rho} + B\frac{\partial z}{\partial\rho_1} + Cz, \tag{1}$$

où A, B, C sont des fonctions quelconques de $\rho$, $\rho_1$, ces solutions étant liées par une relation homogène du second degré, on pourra toujours, en combinant linéairement ces solutions, ramener cette relation à la forme

$$u^2 + v^2 + w^2 = p^2. \tag{2}$$

Cela posé, les équations

$$x = \frac{u}{p}, \qquad y = \frac{v}{p}, \qquad z = \frac{w}{p}$$

définissent toujours un système orthogonal (A) formé des lignes

$$\rho = C, \qquad \rho_1 = C_1.$$

En outre, si $\theta$ désigne une solution nouvelle quelconque de l'équation (1), le plan

$$uX + vY + wZ + \theta = 0$$

enveloppera, quand $\rho$ et $\rho_1$ prendront toutes les valeurs possibles, une surface dont les lignes de courbure auront pour image sphérique les courbes du système (A).

Si, en particulier, on considère l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = i[f(\alpha + i\beta) - \varphi(\alpha - i\beta)]z, \tag{3}$$

elle admet les quatre solutions

$$u = P_1Q_2 + P_2Q_1 \qquad w = P_1Q_1 - P_2Q_2,$$
$$v = i(P_2Q_1 - P_1Q_2) \qquad p = P_1Q_1 + P_2Q_2,$$

qui satisfont à la relation (2), $P_1$, $P_2$ et $Q_1$, $Q_2$ étant respectivement les intégrales des équations

$$P'' = P[f(\alpha + i\beta) + m],$$
$$Q'' = Q[\varphi(\alpha - i\beta) + m],$$

où $m$ désigne une constante. Si $f$ et $\varphi$ sont imaginaires conjugués et si $Q_1$, $Q_2$ sont respectivement conjugués de $P_1$, $P_2$, ce système qui, comme dit M. Darboux, *correspond* à l'équation linéaire

$$y'' = y[f(x) + m],$$

sera réel et isotherme.

L'application de cette théorie à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = -\frac{m(m+1)}{(\rho - \rho_1)^2}z,$$

qui se ramène à la forme (3), conduit à la conclusion suivante :

On saura trouver toutes les surfaces ayant pour représentation sphérique les

systèmes isothermes correspondant aux trois équations

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\operatorname{sn}^2 x} - h^2\right],$$

$$y'' = y[m(m+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h],$$

dont la dernière est l'équation de Lamé. Les formules d'intégration définissant la surface ne contiendront les fonctions arbitraires sous aucun signe d'intégration définie, tant que $m$ sera entier.

Cette proposition comprend tout ce que l'on sait relativement aux surfaces à lignes de courbures planes, aux surfaces à représentation sphérique elliptique, etc. Elle fournit une infinité de surfaces algébriques à lignes de courbure algébriques.

Voici maintenant comment on peut étendre les résultats précédents à des systèmes isothermes contenant des constantes dont le nombre croîtra indéfiniment :

Toutes les fois qu'on saura résoudre le problème de la représentation sphérique pour les systèmes orthogonaux correspondant à l'équation

$$y'' = yf(x),$$

on saura le résoudre pour les systèmes correspondant à l'équation

$$y'' = y\left[\theta\left(\frac{1}{\theta}\right)'' + m\right],$$

où $\theta$ désigne une solution de l'équation précédente.

D'ailleurs, la dernière équation s'intègre immédiatement par la formule

$$y = u' - u\frac{\theta'}{\theta},$$

dès que l'on connaît l'intégrale générale $u$ de l'équation

$$y'' = y[f(x) + m].$$

La méthode suivie par M. Darboux, dans le cas des systèmes orthogonaux et isothermes, s'applique aux systèmes orthogonaux les plus généraux. Toute surface, en effet, peut être considérée comme l'enveloppe du plan

$$(x+y)\mathrm{X} + (1-xy)\mathrm{Y} + i(1+xy)\mathrm{Z} - \mathrm{P} = 0,$$

où $x$, $y$ sont les variables de M. Bonnet. La représentation sphérique de la surface étant donnée, $x$, $y$ doivent être considérés comme des fonctions données des paramètres $\alpha$, $\beta$. Alors les dérivées partielles $p$, $q$ de P, par rapport à $x$, $y$, s'obtiendront par l'intégration du système

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial p}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \beta} = -\lambda\frac{\partial p}{\partial \beta},$$

$\lambda$ étant fourni par les équations concordantes

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\lambda\frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

L'intégration du système précédent se ramène immédiatement à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 \sqrt{\lambda}}{\partial \alpha \, \partial \beta},$$

et l'étude que M. Moutard a faite des équations de cette forme conduit à la conclusion suivante :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis;

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.

M. Darboux montre, en terminant, le parti que l'on peut tirer pour le problème de la représentation sphérique, et aussi pour la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée, de la considération de l'équation *auxiliaire* d'une équation aux dérivées partielles définissant une fonction $\zeta$ de plusieurs variables indépendantes : cette équation auxiliaire est l'équation linéaire obtenue en remplaçant dans la proposée $z$ par $z + \varepsilon z'$, développant suivant les puissances de $z$ et égalant à zéro le coefficient de $\varepsilon$.

*Kœnigs.* — Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois engendrées par des coniques. (177-192).

Le plan et les quadriques sont les seules surfaces qui puissent contenir deux séries de droites. Dans le même ordre d'idées, on peut se proposer de chercher les surfaces par chaque point desquelles il passe deux ou plusieurs coniques tracées sur ces surfaces.

Il y a lieu de distinguer deux cas : celui où la famille de coniques est *simple*, c'est-à-dire où une seule conique passe par un point de la surface, et celui où cette famille est multiple, c'est-à-dire où, par un point, passent plusieurs coniques de la famille.

1° *Surfaces qui admettent au moins deux familles simples de génératrices du second degré.* — Ce cas se divise en deux autres :

(*a*) La rencontre de deux coniques de systèmes différents n'a lieu qu'en un seul point variable avec ces coniques. Alors, si l'on désigne par $A_1$, $B_1$, $C_1$ trois coniques du premier système, par $A_2$, $B_2$, $C_2$ trois coniques du second, par $p$ un point de $A_1$, par $q$ un point de $A_2$, et si l'on représente par $\lambda$, $\mu$ les rapports anharmoniques suivants :

$$\lambda = (p, \overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 B_2}, \overline{A_1 C_2}),$$
$$\mu = (q, B_2 A_1, A_2 B_1, A_2 C_1),$$

$\overline{A_1 A_2}$ étant le point de rencontre de $A_1$ et de $A_2$, la surface est déterminée en coordonnées homogènes $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ par les équations

$$\rho x_i = f_i(\lambda, \mu) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où $f_i(\lambda, \mu)$ est un polynôme du second degré en $\lambda$ et du second degré en $\mu$.

Cette surface, du huitième ordre, est représentable sur le plan. M. Kœnigs l'appelle *conicoïde*.

($b$) Les coniques des deux systèmes se coupent en deux points variables. Soient $X_1$ une conique du premier système, et $x$, $x'$ ses deux points de rencontre avec une conique $X_2$ du second système. La droite $xx'$ passera par un point fixe $\xi_1$ (pôle d'involution de $X_1$). Les pôles d'involution du premier système sont en général situés sur une droite $D_1$ (axes d'involution). Mais les coniques d'un système peuvent avoir un pôle d'involution fixe, et alors ce point est aussi un pôle d'involution fixe pour les coniques du second système.

Dans le cas de deux axes d'involution, la surface cherchée ne peut être qu'une quadrique.

Dans le cas d'un pôle d'involution unique, la surface est du quatrième ordre et possède une conique double.

M. Kœnigs étend cette théorie aux surfaces engendrées par une famille simple de courbes unicursales. Si, en dehors de cette famille, il existe sur la surface une autre courbe unicursale, la surface est représentable point par point sur le plan.

Si l'on considère deux familles de courbes unicursales ne se coupant qu'en un point variable, les courbes génératrices étant du degré $p$ d'un côté, et du degré $q$ de l'autre, on arrive à cette expression générale d'une surface de degré $2pq$

$$\rho x_i = (a_i \lambda^p + a'_i \lambda^{p-1} + \ldots) \mu_q + (b_i \lambda^p + b'_i \lambda^{p-1} + \ldots) \mu^{q-1} + \ldots$$

2° *Surfaces recouvertes plusieurs fois par une même famille de coniques.* — Si une famille de coniques recouvre $n$ fois la surface, deux quelconques de ces coniques se coupent.

Si la rencontre a lieu en deux points variables, la surface est une quadrique.

Reste le seul cas intéressant, celui où les coniques n'ont qu'un point mobile commun. Lorsque $n$ est égal à 2, les surfaces qui répondent à la question sont généralement des surfaces de Steiner, ou exceptionnellement des cubiques réglées, ou plus exceptionnellement encore des quadriques ou des plans. Elles sont toutes données par les formules

$$\text{(D)} \qquad \rho x_i = \varphi_i(p, q) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où $\varphi_i(p, q)$ est un polynôme du second degré des deux variables $p$ et $q$, ces deux variables étant, l'une la somme, l'autre le produit de deux valeurs, $\lambda$ et $\mu$, du paramètre qui correspond anharmoniquement aux points d'une conique de la famille considérée.

M. Darboux a prouvé que les surfaces (D) sont les seules qui puissent contenir une double infinité de coniques. Ces surfaces rentrent dans le type des conicoïdes de M. Kœnigs.

D'ailleurs, si l'on prend arbitrairement une surface (D) et si l'on considère une développable de la classe $m$ circonscrite à la surface, les plans tangents à cette développable couperont chacun la surface (D), suivant deux coniques; or les coniques ainsi définies engendrent une famille qui recouvre $m$ fois la surface.

De là résulte qu'avec une surface (D) quelconque on peut réaliser le fait d'une surface recouverte autant de fois qu'on voudra par une famille de coniques. Reste à savoir si les surfaces (D) fournissent toutes les solutions du problème. M. Kœnigs se borne pour le moment au cas où la surface est représentable point par point sur le plan. Il trouve effectivement que la solution générale est donnée dans ce cas par une surface (D).

*Guichard.* — Sur les intégrales $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$. (192-210).

M. Guichard étudie les intégrales

$$u = \int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où $G(x)$ représente une fonction holomorphe et $R(x)$ un polynôme du degré $2p+2$.

Il montre que $G(x)$ est décomposable, et cela d'une seule manière, en une somme de la forme

$$G(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p} + \frac{1}{2} R'(x)\varphi(x) + R(x)\varphi'(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des constantes qui peuvent être calculées au moyen de la formule générale

$$\lambda_i = \sum_0^\infty \lambda_{i,n} B_n;$$

les $\lambda_{i,n}$ sont fournis par la relation récurrente

$$\lambda_{i,2p+1+k} A_0 \left[\frac{1}{2}(2p+2)+k\right] + \lambda_{i,2p+k} A_1 \left[\frac{1}{2}(2p+1)+k\right] + \ldots + \lambda_{i,k-1} = 0.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2p+1);$$

les $A_n$ sont les coefficients du polynôme $R(x)$, et les $B_n$ les coefficients de la série de Maclaurin qui représente $G(x)$.

De cette décomposition de $G(x)$ résulte immédiatement celle de l'intégrale $u$ en deux parties : l'une immédiatement intégrable et qui n'a pas de périodes

$$\varphi(x)\sqrt{R(x)};$$

l'autre qui est l'intégrale d'une différentielle algébrique

$$\int \frac{\lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_{2p+1} x^{2p}}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

On peut disposer de la fonction $G(x)$ de façon que les $2p+1$ périodes de cette intégrale aient des valeurs arbitraires.

Après avoir effectué cette réduction, l'auteur s'occupe de la formation des intégrales qui n'ont qu'une période. On peut choisir les $\lambda$ de manière à former $2p+1$ intégrales particulières

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_{2p+1},$$

ayant une période égale à $2\pi$. La forme générale des intégrales jouissant de la même propriété sera

$$v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_{2p+1} v_{2p+1},$$

$m_1, m_2, \ldots, m_{2p+1}$ étant des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

La connaissance de ces intégrales à une seule période conduit à la solution de ce problème : « Trouver toutes les fonctions uniformes d'un point de la courbe $y^2 = R(x)$, qui n'ont que des points singuliers à l'infini et qui ne s'annulent jamais. »

Un premier type de pareilles fonctions est donné par la formule

$$\pi = e^{\varphi + y\psi},$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions entières; un autre type particulier a pour expression

$$\pi_i = e^{\sqrt{-1}\,\nu_i},$$

sauf dans le cas exceptionnel où l'intégrale $\nu_i$ devient infinie comme un logarithme. M. Guichard établit que toutes les fonctions cherchées s'obtiennent en multipliant ou divisant les fonctions du type $\pi$ par les fonctions du type $\pi_i$.

La résolution de ce problème établit une différence entre les fonctions uniformes sur un plan et les fonctions uniformes sur une sphère de Riemann. Dans le premier cas, une fonction qui a un seul point singulier et pas de zéros a son logarithme uniforme. Il n'en est pas de même dans le second cas.

A ce problème se rattache directement la question suivante : « Trouver tous les couples de fonctions entières X et Y qui satisfont à l'équation

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0;$$

autrement dit, trouver toutes les transformations entières d'un cercle en une courbe algébrique. »

Pour certaines courbes particulières, il peut se faire que X et Y soient des polynômes; les modules de périodicité des intégrales de première et de troisième espèce satisfont à des relations qui sont indiquées par M. Guichard.

Enfin les intégrales qui ont deux périodes $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$ sont comprises dans la formule

$$\nu = \sum_{1}^{2p+1} (m_i \alpha + n_i \beta)\, \nu_i.$$

Elles permettent de trouver les transformations uniformes de la courbe

$$Y^2 = (1 - X^2)(1 - k^2 X^2).$$

## *Appell.* — Sur les équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_m(x, y)$. (211-218).

L'auteur indique une équation différentielle linéaire avec second membre, dont les coefficients sont composés avec des fonctions $\Theta$ et leurs dérivées et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions $\Theta$ et de la fonction $\chi_m(x, y)$, qui joue un rôle fondamental dans la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples.

Si l'on prend d'abord la fonction $\chi_1(a, z)$ définie par la série

$$\chi_1(a, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K} - n(n-1)\frac{\pi K'}{K}} \cot \frac{\pi}{2K}(a - z - 2niK'),$$

l'équation qu'a en vue M. Appell est

$$\frac{du}{dx} - u\left[\frac{H_1'(z)}{H_1(z)} + \frac{\pi i}{z-K}\right] = H'^2(o)\,\frac{e^{\frac{\pi i}{2K}(z-a)}\,H_1(2z-a)}{H_1(z)\,H^2(z-a)}.$$

Elle a pour intégrale générale

$$u = \chi_1(a,z) + e^{\frac{\pi z i}{2K}}\,H_1(z),$$

λ désignant une constante arbitraire.

Si l'on passe maintenant à la fonction $\chi_m(a, z)$ définie par la série

$$\chi_m(a,z) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K} - mn(n-1)\pi\frac{K'}{K}} \cot\frac{\pi}{2K}(a - z - 2niK'),$$

et que l'on introduise la fonction entière

$$g_\nu(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=-\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K} - \left[mn(n-1) + 2n\nu\pi\frac{K'}{K}\right]},$$

on pourra au moyen de ces fonctions intégrer l'équation

$$\begin{vmatrix} u & \frac{du}{dz} & \cdots & \frac{d^m u}{dz^m} \\ g_0(z) & \frac{dg_0(z)}{dz} & \cdots & \frac{d^m g_0(z)}{dz^m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ g_{m-1}(z) & \frac{dg_{m-1}(z)}{dz} & \cdots & \frac{d^m g_{m-1}(z)}{dz^m} \end{vmatrix} = Be^{\frac{m\pi z i}{2K}(\overline{m+1}z - a)}\,\frac{H[\overline{m+1}z - a - mK]}{H^{m+1}(a-z)},$$

où B désigne une constante. L'intégrale générale est

$$u = \chi_m(a,z) + \lambda_0 g_0(z) + \ldots + \lambda_{m-1} g_{m-1}(z),$$

$\lambda_0$, $\lambda_1$, …, $\lambda_{m-1}$ étant les $m$ constantes arbitraires.

*Stouff.* — Sur la transformation des fonctions fuchsiennes (219-326).

Le travail de M. Stouff a son point de départ dans les Mémoires de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Il se divise en deux Parties, précédées d'une introduction dans laquelle l'auteur rend compte de certaines définitions et propositions empruntées à la Géométrie non euclidienne.

La première Partie débute par l'établissement d'une formule de correspondance entre deux surfaces de Riemann S et T, respectivement de genre $p$ et $q$, sur lesquelles on fait les deux hypothèses que voici :

1° Entre les points de ces deux surfaces il existe une correspondance analytique, c'est-à-dire laissant les angles inaltérés, de telle sorte qu'à un point M de S répondent $m$ points de T et à un point N de T $n$ points de S.

2° Les points N cessent d'être fonctions uniformes du point M lorsque M vient coïncider avec un nombre fini de points de S, $A_1, A_2, \ldots, A_h$

Alors, lorsque M vient successivement en $A_1, A_2, \ldots, A_h$, il y a sur S $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ points N qui se réunissent en un seul; et inversement sur T il y a $k$ points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ pour lesquels $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ points M se réunissent.

Cela posé, on a entre toutes ces quantités la relation

$$\begin{aligned}&(2p-2)m+(\mu_1-1)+(\mu_2-1)+\ldots+(\mu_h-1)\\ =\ &(2q-2)n+(\nu_1-1)+(\nu_2-1)+\ldots+(\nu_k-1).\end{aligned}$$

Telle est la formule que M. Stouff se proposait d'établir et dont il donne l'interprétation dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

Deux problèmes se présentent :

1° Déterminer les sous-groupes d'un groupe fuchsien. On obtient les polygones générateurs des sous-groupes en réunissant plusieurs polygones du réseau du groupe primitif et en conjuguant convenablement les côtés restés libres.

2° Étant donné un groupe fuchsien G qui dépend des paramètres variables, pour quelles valeurs de ces paramètres est-il contenu dans un autre groupe Γ? Il est intéressant de chercher quand cette circonstance se présente, parce que ces groupes particuliers sont plus simples que les autres et que le calcul des équations fuchsiennes correspondantes peut même se faire algébriquement dans certains cas.

Or, soient $p$ le genre du groupe G; $\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\alpha_n}$ les sommes d'angles des cycles; $\pi$ le genre du groupe Γ; $\frac{2\pi}{\mu_1}, \frac{2\pi}{\mu_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\mu_\rho}$ les sommes d'angles des cycles; la condition pour que G soit contenu dans Γ est

$$2p-2+n-\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}-\ldots-\frac{1}{\alpha_n}=N\left(2\pi-2+l-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_l}\right),$$

N étant un entier. Cette formule, malgré la différence de forme, n'est autre que la formule de correspondance indiquée ci-dessus.

M. Stouff fait diverses applications de cette formule, puis il passe à l'étude des sous-groupes distingués, et ensuite à celle des substitutions directes et inverses. Ces deux questions, outre l'intérêt qu'elles offrent par elles-mêmes, conduisent à des résultats fort utiles quand on étudie les opérations qui transforment un polygone en un polygone équivalent, c'est-à-dire engendrant le même groupe fuchsien.

La deuxième Partie du Mémoire commence par des théorèmes généraux établissant une liaison entre cette Partie et la précédente. Elle se continue et se termine par des applications de ces théorèmes aux genres 2 et 3.

## *Riemann* (*J.*). — Le problème de Dirichlet. (327-410).

L'objet principal de ce travail est de développer la solution du problème de Dirichlet que M. Schwarz a esquissée à grands traits dans les *Monatsberichte* de 1870.

M. Riemann a divisé son travail en quatre Parties.

Dans la première, il s'occupe des fonctions *harmoniques* dans une aire S et continues sur son contour. On entend par là, comme on sait, une fonction $u(x, y)$ uniforme et continue à l'*intérieur* de l'aire S, admettant des dérivées partielles des deux premiers ordres uniformes et continues, et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème de Dirichlet *classique* consiste à déterminer une fonction harmonique par la succession de ses valeurs tout le long du contour, ces valeurs étant supposées fonctions continues de l'arc du contour. Ce problème est intimement lié à la théorie de la représentation conforme, dont l'auteur établit les principes fondamentaux avec toute la précision possible. Mais le problème de Dirichlet est susceptible d'une généralisation importante : les valeurs données sur le contour peuvent éprouver en certains points *singuliers* des discontinuités connues, sans toutefois croître indéfiniment dans le voisinage de ces points. M. Riemann ramène ce problème, que M. Schwarz, d'ailleurs, ne s'est pas posé, au problème classique. Appelant $a$ l'affixe d'un point singulier A, $\alpha$ l'angle (généralement égal à $\pi$) des deux tangentes aux deux branches du contour issues de A, $\delta$ la discontinuité que la fonction cherchée U éprouve en A, $u$ le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $\log(z-a)$, $w(x, y)$ une fonction harmonique continue sur le contour qui prend aux points non singuliers du contour les mêmes valeurs que U (fonction que l'on sait déterminer par hypothèse si, comme on l'admet, elle a des valeurs déterminées aux points singuliers), la fonction U aura pour expression

$$U = w(x, y) + \frac{\delta_0}{\alpha_0} u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0} u'_0 + \frac{\delta''_0}{\alpha''_0} u''_0 + \ldots.$$

Cette formule suppose que l'aire S est simplement connexe, ou du moins, si elle ne l'est pas, qu'il n'existe pas de points singuliers sur les contours intérieurs. Dans le cas contraire, on rendra l'aire S simplement connexe au moyen de coupures. On choisira, à l'intérieur d'un des contours intérieurs $L_i$ doué des points singuliers $a_i$, $a'_i$, $a''_i$, ..., un point $b_i$, et l'on formera le coefficient $v_i$ de $\sqrt{-1}$ dans $\log(z-b_i)$. Cela posé, l'expression de la fonction cherchée sera

$$U = w(x, y) + \frac{\delta_0}{\alpha_0} u_0 + \frac{\delta'_0}{\alpha'_0} u'_0 + \ldots + \sum \left\{ \frac{\delta_i}{\alpha_i}(u_i - v_i) + \frac{\delta'_i}{\alpha'_i}(u'_i - v'_i) + \ldots \right\},$$

le signe $\Sigma$ s'appliquant à tous les contours intérieurs.

La deuxième Partie du travail de M. Riemann est consacrée exclusivement à la discussion du Mémoire de M. Schläfli sur la représentation conforme. M. Schläfli a essayé de résoudre directement le problème de la représentation conforme d'un polygone sur un demi-plan : partant de la formule déjà trouvée par M. Schwarz et par M. Christoffel, il cherche à y déterminer les constantes de manière à obtenir la représentation demandée. Les calculs de M. Schläfli ne démontrent pas d'une manière suffisante la possibilité de cette représentation ; en cherchant à les compléter, M. Riemann s'est trouvé arrêté par une difficulté sérieuse. Néanmoins, ils ne sont pas dépourvus d'intérêt; car, si l'on admet cette possibilité, qui n'est plus douteuse après les théories générales de M. Schwarz, la difficulté disparaît, et l'on se trouve en possession d'un pro-

cédé pratique pour déterminer les constantes. Aussi M. Riemann a-t-il jugé utile d'exposer la méthode de M. Schläfli, ainsi que les remarques qu'elle lui a suggérées.

Dans la troisième Partie, l'auteur commence par définir les arcs réguliers de lignes analytiques et il en étudie les propriétés les plus importantes. Il expose ensuite la méthode de combinaison de M. Schwarz qui permet, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet séparément pour deux aires empiétant l'une sur l'autre, de le résoudre pour la partie commune. M. Schwarz avait ajouté cette condition que les contours des deux aires devaient être formés de lignes analytiques. M. Riemann montre que l'on peut s'affranchir de cette restriction, puis il se sert du procédé alterné pour résoudre le problème de Dirichlet dans le cas très étendu d'une aire limitée par des arcs réguliers de lignes analytiques.

L'auteur résume, dans la quatrième Partie de son Mémoire, les travaux récents de M. Harnack (*Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, 1887). Il expose, en la simplifiant, la méthode par laquelle ce géomètre construit, pour une aire quelconque, la fonction de Green. Il indique ensuite très sobrement, et en se bornant à faire ressortir la suite générale des idées, comment, en s'appuyant sur ce premier résultat, M. Harnack résout le problème de Dirichlet dans toute sa généralité et démontre en outre que le problème généralisé ne peut avoir qu'une solution.

## *Petot.* — Sur une extension du théorème de Pascal à la géométrie de l'espace. (Supplément, 3-65).

Quand on se propose d'étendre le théorème de Pascal à la géométrie de l'espace, on est tenté d'abord de chercher une propriété générale de dix points d'une quadrique analogue à la relation constante qui existe entre six points d'une conique. Ce serait faire fausse route, comme l'a montré M. Serret; car la propriété en question n'aurait pas pour la construction des quadriques les mêmes conséquences que le théorème de Pascal pour celle des courbes du second ordre.

Ces considérations ont conduit M. Petot à rechercher, au lieu de la relation entre dix points d'une quadrique, l'expression géométrique de la relation qui existe entre trois droites non concourantes et huit points appartenant à une même surface du troisième ordre. Toute droite, qui s'appuie sur deux droites données de la surface, ne rencontre plus cette surface qu'en un point; la relation cherchée devra, pour être comparable au théorème de Pascal, fournir une détermination géométrique du troisième point n'exigeant que l'emploi de la règle.

L'auteur expose, dans l'introduction de son Mémoire, les inductions qui l'ont guidé. Dans le théorème de Pascal, on fait correspondre à un point décrivant une conique, soit une droite enveloppant un point, soit un point décrivant une droite. De même, on peut faire correspondre linéairement à un point M qui se déplace sur une surface cubique $S_3$ un certain élément $\omega$ engendrant une forme géométrique $\Sigma$. Lorsque M décrit une droite L s'appuyant sur deux des droites données pour déterminer $S_3$, l'élément correspondant $\omega$ engendre une deuxième forme $\sigma$. La détermination de la troisième trace de L sur $S_3$ sera ramenée à celle de l'élément $\omega$ commun aux deux formes $\Sigma$ et $\sigma$.

Après divers essais, M. Petot s'est trouvé amené à choisir pour $\omega$ une

droite, pour Σ un complexe du premier ordre et pour σ un faisceau du premier ordre.

Le premier problème à résoudre était alors le suivant : Trouver la relation homographique à établir entre un point M et une droite ω de l'espace, pour que, M décrivant une droite quelconque qui s'appuie sur deux droites données de la surface, ω engendre un faisceau du premier ordre. Après avoir obtenu ce mode de correspondance, M. Petot a cherché le lieu de M quand ω appartient à un complexe du premier ordre : ce lieu est une surface du troisième ordre, se dédoublant, dans un cas particulier, en un plan et une quadrique. La situation, sur $S_3$, de huit points et de trois droites non concourantes (et, en particulier, la situation de dix points sur une quadrique) se trouve dès lors réduite à dépendre de la situation, sur un même complexe du premier ordre, de six droites déduites linéairement des points considérés.

D'ailleurs, le même mode de correspondance donne les propriétés de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre et de huit points associés, et, plus généralement, les propriétés analogues relatives à la courbe gauche du sixième ordre et au groupe de droites et de points associés. On obtient, comme conclusion, pour les courbes gauches, cinq droites appartenant à une même congruence du premier ordre; pour les groupes d'éléments associés, quatre droites appartenant à un même système de génératrices d'un hyperboloïde.

Ces différents théorèmes ont pour la construction des surfaces cubiques et quadriques les mêmes conséquences pratiques que celui de Pascal pour les coniques.

---

## BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

### Tome XVI, 1888.

*Kœnigs.* — Lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner. (15-18).

Ce lieu est une autre surface de Steiner.

*Issaly* (l'abbé). — Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites. (19-81).

Par une voie nouvelle et très simple, l'auteur fait dériver les propriétés des surfaces et des lignes qu'on y peut tracer de celles des congruences de droites. Il est remarquable que, dans tous les calculs relatifs au sujet traité par l'auteur, cette méthode dispense de faire intervenir les paramètres différentiels E, F, G de Gauss.

M. l'abbé Issaly prend pour coordonnées une double série de courbes fonctions du temps ne se coupant entre elles qu'aux infiniment petits du second ordre près. De tels réseaux peuvent néanmoins, par la variation arbitraire du

(¹) Voir *Bulletin*, $XIII_2$, p. 197.

rapport de leurs arcs infinitésimaux, engendrer des lignes ou trajectoires de toute nature.

Après avoir établi trois catégories de formules fondamentales d'une grande généralité, l'auteur étudie en détail les courbures de divers ordres de ces trajectoires. En s'annulant, les plus simples de ces courbures produisent les lignes remarquables qu'il appelle par analogie *géodésiques, asymptotiques,* en attribuant à ces dénominations un sens plus large que s'il s'agissait des lignes de même nom situées sur une surface.

Après une exposition sommaire des principales propriétés de ces lignes, l'auteur étudie les propriétés des pinceaux de droites, qu'il fait dépendre de théorèmes très généraux, non encore signalés.

Les résultats obtenus par M. Kummer dans sa première *Theorie générale de droites* découlent très directement des formules de M. l'abbé Issaly.

## *Perrin.* — Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes. (82-100).

M. Hilbert a établi que tout covariant ou invariant d'une forme binaire, écrite avec une seule variable non homogène, peut s'exprimer en fonction de cette forme et de ses dérivées unilatérales (c'est-à-dire prises par rapport à cette variable unique), et que réciproquement toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales est un invariant ou un covariant de la forme, pourvu qu'elle satisfasse à une certaine équation différentielle.

Les péninvariants, tant des formes binaires que des formes à un nombre quelconque de variables et des systèmes de formes, jouissent, comme le montre M. Perrin, de propriétés tout à fait semblables.

L'auteur met à profit ces propriétés pour la démonstration d'un théorème relatif à l'intégration sous forme parabolique des équations différentielles où la variable ne figure pas implicitement :

Si une pareille équation

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

admet l'intégrale générale

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n,$$

la relation qui lie les $n+1$ arbitraires est

$$F(A_0, A_1, 2!\,A_2, 3!\,A_3, \ldots, n!\,A_n) = 0.$$

Réciproquement, si dans la forme binaire générale d'ordre $n$, écrite avec une seule variable non homogène, on suppose donnée *une* relation entre les coefficients et qu'on forme l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre à laquelle satisfait la forme après élimination de tous ses coefficients, la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ne contienne pas explicitement la variable est que la relation donnée entre les coefficients se réduise à une relation entre des péninvariants ou invariants de la forme.

Outre les covariants, invariants et péninvariants, il existe encore d'autres fonctions des coefficients et de la variable d'une forme binaire qui présentent

ce caractère d'être identiques à une fonction de la forme et de ses dérivées unilatérales, sans que la variable apparaisse explicitement : ce sont les *semi-covariants*, définis comme satisfaisant à l'une seulement des deux équations qui vérifient les covariants.

Tous les résultats obtenus dans cet ordre d'idées par M. Perrin sont contenus dans l'énoncé suivant :

Toute formation (invariant, covariant, péninvariant, semi-covariant) déduite d'une forme binaire d'ordre $n$, et qui possède le caractère d'invariance par rapport à l'une $x_1$ des deux variables, est identique à une fonction de la forme et de ses dérivées successives par rapport à cette variable seule, divisée par une certaine puissance de la seconde variable $x_2$. Cette fonction satisfait à la condition

$$\frac{d^{r+1}}{d\theta^{r+1}} = 0, \tag{1}$$

$\frac{d^r}{d\theta^r}$ représentant le résultat de l'opération

$$f_1 \frac{\partial}{\partial f} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial f^{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{d\theta}$$

répétée $r$ fois sur la forme $f$ et ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \ldots$ et $r$ étant l'ordre de la formation considérée. On l'obtient en remplaçant simplement $a_p$, coefficient de $x_2^p$ dans la forme binaire, par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$ dans le coefficient du dernier terme de la formation considérée.

Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales (par rapport à la variable $x_1$), si elle satisfait à la condition (1), est identique (à une certaine puissance près de $x_2$) à une formation d'ordre $r$ possédant le caractère d'invariance par rapport à $x_1$.

## *Stieltjes.* — Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. (100-113).

Soient $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, $k(u)$ quatre fonctions réelles de la variable $u$, finies et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, et admettant des dérivées troisièmes qui ne sont plus nécessairement continues.

Si $x, y, z, t$ sont quatre nombres inégaux

$$x < y < z < t$$

et si $\Lambda$ désigne le rapport $\frac{D}{\Delta}$ des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix},$$

le rapport $\Lambda$ n'est pas plus grand que $\frac{M}{1!\,2!\,3!}$ et pas plus petit que $\frac{m}{1!\,2!\,3!}$.

M désignant la plus grande et $m$ la plus petite valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'(u') & g'(u') & h'(u') & k'(u') \\ f''(u'') & g''(u'') & h''(u'') & k''(u'') \\ f'''(u''') & g'''(u''') & h'''(u''') & k'''(u''') \end{vmatrix}$$

sous les conditions

$$u = x, \qquad u \leq u' \leq y, \qquad u' \leq u'' \leq z, \qquad u'' \leq u''' \leq t.$$

Si l'on suppose en outre les dérivées troisièmes $f'''$, $g'''$, $h'''$, $k'''$ continues et qu'on fasse tendre $x$, $y$, $z$, $t$ vers une même limite $a$, il vient

$$\lim A = \frac{1}{1!\,2!\,3!} \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

M. Stieltjes montre que cette expression subsiste dans le cas bien plus général où l'on n'admet l'existence des dérivées troisièmes que pour l'unique valeur $u = a$, pourvu que $a$ ne soit jamais en dehors de l'intervalle $x$, $t$.

*Pellet.* — Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné à l'aide de la règle et du compas. (113-119).

*Bioche.* — Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches. (119-124).

On sait que, si la ligne de striction d'une surface gauche est ligne de courbure et si le paramètre de distribution des plans tangents est constant, le système des lignes de courbure auquel appartient la ligne de striction divise les génératrices en segments de longueur constante, et l'autre système détermine sur les génératrices des divisions homographiques.

M. Bioche fait voir que ces surfaces sont les seules dont les lignes de courbure divisent les génératrices en segments égaux et plus généralement en segments homographiques.

Il démontre que toute surface gauche qui n'est pas une surface de binormales ou un conoïde droit peut être appliquée sur une surface gauche dont la ligne de striction est ligne de courbure; ce problème n'a qu'une solution.

*Delannoy.* — Sur la durée du jeu. (124-128).

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun $n$ francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne 1 franc au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsqu'un des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité P pour que le jeu se termine juste à la fin d'une partie de rang assigné $\mu$?

Si l'on pose $\mu + n = 2p$, $\mu - n = 2q$, que l'on désigne par $\lambda n$ le plus grand multiple de $n$ contenu dans $q$ et qu'on représente, suivant l'usage, par C un

nombre de combinaisons, on a

$$\mathrm{P} = \frac{n}{2^{\mu-1}}\left[\frac{1}{p}\,\mathrm{C}_{\mu-1}^{q} - \frac{3}{p+n}\,\mathrm{C}_{\mu-1}^{q-n} + \ldots + (-1)^{\lambda}\,\frac{(2\lambda+1)}{p+\lambda n}\,\mathrm{C}_{\mu-1}^{q-\lambda n}\right].$$

Cette formule, que M. Delannoy obtient par l'emploi de l'échiquier, diffère de la solution du même problème proposée par M. Rouché (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de janvier 1888, p. 253).

## *Catalan.* — Propositions et questions diverses. (128-129).

M. Catalan indique cette expression nouvelle des polynômes de Legendre :

$$\mathrm{X}_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^n\varphi\,(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Il donne ensuite l'énoncé de divers théorèmes *empiriques* d'Arithmétique.

## *Réveille.* — Sur un théorème de Géométrie cinématique. (130-132).

## *Jamet.* — Sur le genre des courbes planes triangulaires. (132-135).

M. Halphen a signalé une catégorie de courbes planes dont il est facile de déterminer le genre. Leur équation en coordonnées polaires est

$$r^k = \cos k\theta,$$

$k$ désignant un nombre commensurable, positif ou négatif.

Ces courbes, comme le fait voir M. Jamet, peuvent s'obtenir en transformant homographiquement les *courbes triangulaires* de M. de la Gournerie, qui sont représentées en coordonnées homogènes par l'équation

$$\mathrm{X}^h + \mathrm{Y}^h + \mathrm{Z}^h = 0,$$

où $h$ est un nombre commensurable, positif ou négatif.

Toute courbe triangulaire correspond point par point à une autre triangulaire dépourvue de points multiples, et dont l'exposant $h$ est égal au numérateur de l'exposant de la courbe donnée.

On déduit de là que toute triangulaire d'exposant $\pm\frac{p}{q}$ est du genre

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

## *Fabry.* — Réductibilité des équations différentielles linéaires. (135-142).

Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable indépendante, l'auteur cherche dans quel cas il existe une équation d'ordre moindre et de même forme dont toutes les intégrales vérifient l'équation proposée, et il enseigne,

quand cette réduction est possible, à calculer les coefficients de la nouvelle équation.

*De Presle.* — Au sujet du développement de $\cot z$ en série de fractions. (143-144).

*Williot.* — Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli. (144-149).

*Rouché.* — Observations en réponse à une Note de M. Delannoy. (149-150).

*Laisant.* — Remarques arithmétiques sur les nombres composés. (150-155).

Soit un nombre entier N décomposé en ses facteurs premiers

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda};$$

si l'on cherche de combien de manières ce nombre peut être décomposé en $k$ facteurs, en regardant comme différentes les décompositions qui diffèrent par l'ordre des facteurs, on trouve

$$n_k(N) = (1+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\alpha}{k-1}\right)\ldots(1+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda}{k-1}\right).$$

Après avoir établi cette formule, M. Laisant expose un mode de figuration des nombres qui met en relief d'une façon saisissante la formation de leurs diviseurs, et qui permet de former immédiatement le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

*Weill.* — Sur une propriété des courbes algébriques. (155-156).

Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe de degré $m$ et à une courbe variable de degré quelconque dont l'équation contient un paramètre variable au degré $k$ décrit une courbe unicursale de degré $mk$, qui a pour directions asymptotiques multiples d'ordre $k$ les directions asymptotiques de la courbe fixe.

*De Presle.* — Dérivées successives d'une puissance entière d'une fonction d'une variable, dérivées successives d'une fonction de fonction et application à la détermination des nombres de Bernoulli. (157-162).

*Lemoine.* — Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction. (162-172).

Si l'on désigne par $R_1$ l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point donné; par $R_2$ l'opération du tracé de la droite; par $C_1$ l'opé-

ration qui consiste à mettre la pointe du compas en un point donné; par $C_2$ le tracé du cercle en tout ou en partie, on peut se demander quel est, au point de vue graphique, le système le plus simple de coordonnées, c'est-à-dire quel est le moyen le plus simple de déterminer un point par construction.

En coordonnées cartésiennes obliques, le nombre des opérations à faire est

$$2R_1 + R_2 + 11C_1 + 5C_2 = 19;$$

en coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2 = 16;$$

en coordonnées trilinéaires,

$$34R_1 + 17R_2 + 13C_1 + 7C_2 = 71;$$

en coordonnées bipolaires,

$$6C_1 + 2C_2 = 8.$$

Ce dernier système est le plus simple de tous.

M. Lemoine indique la généralisation suivante des coordonnées cartésiennes. On rapporte un point quelconque M du plan à trois points fixes A, B, C. On prolonge la droite AM jusqu'à sa rencontre X avec CB, la droite BM, jusqu'à sa rencontre Y avec CA; CX, CY sont les deux coordonnées de M.

*Laisant.* — Note sur un système de courbes planes. (172-175).

*Laisant.* — Sur la numération factorielle, application aux permutations. (176-183).

*D'Ocagne.* — Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire. (183-187).

M. d'Ocagne a montré antérieurement que l'expression

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{da^p}$$

est un péninvariant de la forme binaire représentée symboliquement par $(x+ay)^n$, et que les $(n-1)$ péninvariants $\varphi$ correspondant à $p = 2, 3, \ldots, n$ constituent un système de péninvariants principaux de cette forme. On doit donc pouvoir passer du système $(\varphi)$ au système $(v)$ des péninvariants principaux ordinaires définis par les formules

$$\begin{aligned} v_{2p} &= a_0 a_{2p} - 2p a_1 a_{2p-1} \\ &\quad + \frac{2p(2p-1)}{1.2} a_2 a_{2p-2} - \ldots \pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p} a_p^2, \\ v_{2p+1} &= a_0 \frac{dv_{2p}}{da} - 2a_1 v_{2p}, \end{aligned}$$

et réciproquement.

C'est ce qu'a fait M. Cesaro pour les indices pairs. M. d'Ocagne fait connaître actuellement les formules générales qui correspondent au cas des indices impairs, savoir

$$\nu_{2p+1} = \frac{d\nu_{2p}}{d\varphi},$$

$$\varphi_{2p+1} = \frac{d\varphi_{2p}}{d\nu}.$$

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI. In-4°, 4e série, Rendiconti [1].

T. IV, 1888; Ire Partie, 1er semestre.

*Tacchini* (*P.*). — Sur les phénomènes de la chromosphère solaire observés à l'Observatoire royal du Collège romain dans le quatrième trimestre de 1887. (3-4).

*Tacchini* (*P.*). — Observations de taches et de facules solaires faites à l'Observatoire royal du Collège romain dans le quatrième trimestre de 1887. (4).

*Cesaro* (*E.*). — Sur les concepts de limite et de continuité (12-17).

*Cesaro* (*E.*). — Formules relatives au mouvement d'un point. (18-19).

*Viola* (*C.*). — Sur les plaques minces anisotropes colorées dans la lumière polarisée parallèle. (19-27).

*Garibaldi* (*P.-M.*). — Les protubérances solaires dans leurs rapports avec les variations de l'aimant de déclinaison diurne. (27-31).

*Pincherle* (*S.*). — Sur certaines intégrales définies. (100-104).

*Tacchini* (*P.*). — Sur la distribution des protubérances à la surface du Soleil pendant 1887. (104-105).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. $XIII_2$, p. 167.

*Tacchini* (*P.*). — Sur l'éclipse de Lune du 28 janvier 1888. (105-106).

*Millosevich* (*E.*). — Observations de la petite planète (264) Libussa (106-107).

*Volterra* (*V.*). — Sur une extension de la théorie de Riemann sur les fonctions de variables complexes. Note II (107-115), Note III (196-202).

L'auteur établit la théorie des caractéristiques relative aux fonctions liées entre elles dans le sens de Riemann. Dans la Note III il établit la théorie des opérations de dérivation et d'intégration relative à ces fonctions.

*Cesaro* (*E.*). — Sur la comparaison des séries divergentes. (115-118).

*Pascal* (*E.*). — Sur un théorème fondamental dans la théorie du calcul symbolique des formes $n$-aires (119-124).

*Maschke* (*H.*). — La résolution de l'équation du sixième degré. (181-182).

L'équation générale du sixième degré peut être mise sous la forme

$$y^6 + \alpha y^4 + \beta y^3 + \frac{\alpha^2}{4} y^2 + \gamma y + \delta = 0;$$

les racines sont

$$y_1 = \varphi + 6(-\psi_2 - \psi_3 - \psi_4),$$
$$y_2 = \varphi + 6(-\psi_2 + \psi_3 + \psi_4),$$
$$y_3 = \varphi + 6(+\psi_2 - \psi_3 + \psi_4),$$
$$y_4 = \varphi + 6(+\psi_2 + \psi_3 - \psi_4),$$
$$y_5 = -2\varphi - 24 z_1 z_2 z_3 z_4,$$
$$y_6 = -2\varphi + 24 z_1 z_2 z_3 z_4,$$

où

$$\varphi = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4,$$
$$\psi_2 = z_1^2 z_2^2 + z_3^2 z_4^2,$$
$$\psi_3 = z_1^2 z_3^2 + z_4^2 z_2^2,$$
$$\psi_4 = z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2,$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\theta_5, \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\theta_2, \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\theta_1, \qquad z_4 = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\theta_4,$$

les $\theta$ étant calculés avec les integrales normales hyperelliptiques appartenant à une forme binaire du sixième ordre dont les invariants ont les valeurs sui-

vantes :

$$A = \frac{1}{3.5.2^4}\,\frac{\beta^2 - 4\delta}{2\gamma - \alpha\beta},$$

$$B^* = -\frac{1}{2.3^2.5}\,\alpha, \qquad C^* = -\frac{1}{4.3^2.5}\,\beta,$$

$$\Delta = \frac{2^2}{3^3}(2\gamma - \alpha\beta).$$

*Brioschi* (*F.*). — Observations sur la Communication précédente. (183-184).

*Tacchini* (*P.*). — Sur la distribution en latitude des éruptions, taches et facules solaires pendant 1887. (184-185).

*Paladini* (*B.*). — Sur le mouvement de rotation que prend dans le vide ou dans un fluide incompressible un corps soumis à des forces de potentiel $H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$.

*Ricci* (*G.*). — Sur la classification des formes différentielles quadratiques. (203-207).

*Montesano* (*D.*). — Sur les transformations involutives de l'espace qui déterminent un complexe linéaire de rayons. Note I (207-215), Note II (277-285).

*Brioschi* (*F.*). — La forme normale des équations du sixième ordre (301-305), Note II (485-488).

*Favero* (*G.-B.*). — Sur une étude récente sur la gravité.

L'auteur fait de justes critiques au procédé et aux résultats du Professeur J.-W. Haüssler qui, dans un article publié dans le *Repertorium der Physik*, 1886, vol. XXII, p. 501, croyait démontrer que la gravité est une conséquence nécessaire de la rotation terrestre.

*Bianchi* (*L.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles de Cayley dans la théorie des surfaces. (442-445).

Si l'équation

$$ds^2 = e\,dx^2 + g\,dy^2$$

définit l'élément linéaire d'une surface S, peut-elle ou non admettre des solutions indépendantes des flexions de cette surface? Cette question est identique avec cette autre.

Un système normal de cercles orthogonaux à S peut-il rester normal après une flexion de S?

L'auteur démontre que les seules surfaces pour lesquelles a lieu cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de rotation.

*Bianchi* (*L.*). — Sur une classe de transformations en soi-même de l'équation aux dérivées partielles

$$z^2 \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} + z \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{1 + p^2 + q^2} = \text{const.}$$

(445-452).

*Cesaro* (*E.*). — Sur les lois asymptotiques des nombres. (452-457).

*Cesaro* (*E.*). — Sur les systèmes de nombres entiers. (457-462).

*Millosevich* (*E.*). — Observation de la planète (275) et de la comète Sawerthal. (504-505).

*Millosevich* (*E.*). — Éléments elliptiques de (264) Libussa d'après deux oppositions (1886-87 et 1888). (405-507).

*Padova* (*E.*). — Une nouvelle application des fonctions elliptiques à la Mécanique. (507-509).

Le cas étudié par l'auteur est celui d'une sphère ayant le centre de gravité dans le centre et les moments principaux d'inertie égaux et qui roule sur un plan horizontal avec une vitesse initiale donnée et soumise à une force verticale constante appliquée à un de ses points.

*Pittarelli* (*G.*). — Sur les formes appartenant à l'octaèdre. (509-513).

*Montesano* (*D.*). — Sur les réciprocités birationnelles nulles dans l'espace. (583-590).

*Govi* (*M.*). — Nouvelle méthode pour construire et calculer le lieu, la situation et la grandeur des images données par les lentilles ou par les systèmes optiques complexes. (655-660).

*Tacchini* (*P.*). — Sur les observations magnétiques faites par l'Office central de Météorologie de Rome. (689-690).

*Pincherle* (*S.*). — Sur les fonctions hypergéométriques généralisées. (694-700). Note II (792-799).

*Pittarelli* (*G.*). — Sur la transformation de la différentielle elliptique faite par la représentation typique des formes binaires du troisième et quatrième degré. (703-705).

*Cerruti* (*V.*). — Sur la déformation d'un corps élastique isotrope pour certaines conditions spéciales aux limites. (785-792).

2e semestre.

*Betti* (*E.*). — Sur l'entropie d'un système newtonien en mouvement stable. (113-115), Note II (195-198).

L'auteur démontre le théorème suivant :

« Les variations du mouvement d'un système newtonien en mouvement stable ne changent pas le rapport entre le cube de la distance moyenne et le produit de la masse pour le carré du temps périodique moyen »,

et il en déduit que :

« L'entropie du système est égale au logarithme du produit de la masse par la distance moyenne. »

Dans la Note II, l'auteur démontre que le théorème de Clausius est applicable aux systèmes newtoniens en mouvement stable.

*Cesaro* (*E.*). — Sur une distribution de signes (133-138).

Dans toute série simplement convergente les termes positifs sont aussi fréquents que les termes négatifs, si leurs valeurs absolues décroissent toujours.

*Bianchi* (*L.*). — Sur les surfaces fuchsiennes. (161-165).

L'auteur appelle *surfaces fuchsiennes* les surfaces intégrales de l'équation

$$(1-q^2)\,r + 2pqs + (1-p^2)\,t = 0.$$

Il réduit le problème à représenter conformément sur le semi-plan un polygone plan, dont les côtés sont des arcs de cercle ayant les centres en ligne droite. Les formules qui donnent les coordonnées d'un point de la portion de surface limitée à un contour polygonal rectiligne sont

$$x = \mathrm{R}\int_{\omega_0}^{\omega}(1-\omega^2)\,\mathrm{F}(\omega)\,d\omega,$$

$$y = \mathrm{R}\int_{\omega_0}^{\omega}2\omega\,\mathrm{F}(\omega)\,d\omega,$$

$$z = \mathrm{R}\int_{\omega_0}^{\omega}(1+\omega^2)\,\mathrm{F}(\omega)\,d\omega,$$

et la surface est constituée de polygones courbes limités par des traits rectilignes.

Chaque surface fuchsienne se transforme en soi-même par un groupe de collinéations de l'espace, holoédriquement isomorphe au groupe fuchsien. Toute substitution du groupe échange entre eux les polygones courbes qui constituent la surface. L'auteur démontre aussi qu'il existe effectivement des classes de urfaces fuchsiennes.

*Battaglini* (*G.*). — Sur les points sextatiques d'une courbe quelconque. (238-246).

La méthode suivie par l'auteur est fondée sur la théorie des *réciprocants* de Sylvester.

*Tacchini* (*P.*). — Sur les observations des taches, facules et protubérances solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain dans le deuxième trimestre de 1888. (275-276).

*Tacchini* (*P.*). — Sur la distribution en latitude des phénomènes solaires observés à l'observatoire royal du Collège romain dans le deuxième trimestre de 1888. (276-277).

*Millosevich* (*E.*). — Sur la nouvelle comète Barnard, 30 octobre. (278).

*Brioschi* (*F.*). — Les équations différentielles pour les périodes des fonctions hyperelliptiques de deux variables. (341-347). Note II (429-436).

*Tacchini* (*P.*). — Sur les observations des taches, facules et protubérances solaires faites à l'observatoire royal du Collège romain dans le troisième trimestre de 1888. (349-350).

*Volterra* (*V.*). — Sur les fonctions analytiques polydromes. (355-361).

L'auteur démontre les cinq théorèmes suivants :

« I. Étant donnée une fonction analytique quelconque, prolongée d'après la méthode de Weierstrass, on pourra choisir un ensemble dénombrable de domaines de monodromie connexes entre eux, tels que tout point analytique où la fonction se comporte monodromiquement soit contenu à l'intérieur d'un de ces domaines, et que tout point régulier de diramation soit au contour de quelques-uns d'entre eux.

» II. On peut choisir un ensemble dénombrable de cercles de convergence connexes entre eux, tels que tout point analytique, où la fonction se comporte régulièrement, soit à l'intérieur d'un au moins d'entre eux.

» III. A chaque point du plan complexe correspond un système dénombrable de points analytiques coïncidents en ce point, ou n'en correspond aucun.

» IV. En chaque partie du plan complexe, où l'on peut prolonger la fonction, existent des points tels que, en tous les points analytiques qui leur correspondent, la fonction se comporte régulièrement.

» V. Les points réguliers de diramation forment un ensemble dénombrable. »

*Padova* (*E.*). — Sur la théorie des coordonnées curvilignes. Note I (369-376), Note II (454-458).

*Cesaro* (*E.*). — Mouvements rigides et déformations thermiques dans les espaces courbes. (376-384).

*Tonelli* (*A.*). — Sur une certaine équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre. (384-388).

*Ricco* (*A.*). — Sur l'image déformée du Soleil réfléchi dans la mer, et sur sa dépendance de la sphéricité de la Terre. (450-454).

*Tonelli* (*A.*). — Sur une certaine équation aux dérivées partielles du troisième ordre. (458-461). S. R.

---

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome XCIX; 1886 [1].

*Minkowski* (*Hermann*). — Sur les formes quadratiques positives. (1-9).

A. Le genre d'une forme $f = \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$ se compose de toutes les formes $g$ qui ont le même module d'inertie que $f$ et qui sont congrus à $f$ suivant un module quelconque N.

B. Une forme $g$ appartient au genre d'une forme $f$ sous la condition exclusive de posséder le même indice J et le même déterminant $\Delta$ que $f$, et encore d'être congrue à $f$ suivant le module $2\Delta$.

Ces définitions servent de base aux recherches de M. Minkowski qui ont pour but de développer plusieurs formules simples pour la *mesure* d'un genre quelconque de formes quadratiques positives à $n$ variables. Soient $f(\mathrm{N})$ et D certains invariants du genre $f$, $c$ une constante : alors la mesure M du genre

(1) Voir *Bulletin*, $\mathrm{XIV}_2$, p. 27.

s'exprime par le produit

$$M = c\sqrt{D}\frac{1}{f(2)}\frac{1}{f(3)}\frac{1}{f(5)}\frac{1}{f(7)}\cdots,$$

qu'il faut étendre à tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, .... En terminant, l'auteur développe encore quelques conditions nouvelles pour les formes réduites de M. Hermite dans les cas de $n = 4$ et $n = 5$.

*Königsberger* (*Léo*). — Sur les propriétés des intégrales représentables par des quadratures de fonctions algébriques et appartenant à des équations linéaires non homogènes. (10-87).

L'auteur se propose d'étudier la forme des intégrales d'équations différentielles linéaires non homogènes qui se prêtent à être représentées comme fonctions algébriques de logarithmes et d'intégrales abéliennes, les logarithmandes et les limites d'intégration étant des fonctions algébriques de la variable indépendante. Le Mémoire est donc destiné à développer plus amplement la théorie générale des théorèmes établis, pour quelques cas spéciaux et sous certaines restrictions, dans le Livre de M. Königsberger intitulé : *Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen* (voir *Bulletin* [2], $\text{VII}_1$, p. 5-14), et qui y figurent comme généralisations des propositions connues d'Abel.

Les résultats de la première Partie du travail se résument par le théorème, p. 62 et 63 :

Si une équation différentielle linéaire et non homogène

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Y_2\frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \ldots + Y_m z = y$$

(où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, y$ sont des fonctions algébriques de $x$) possède une intégrale composée algébriquement de $x$ et de logarithmes de fonctions algébriques de $x$, cette intégrale pourra se mettre sous la forme

$$z_1 = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \ldots + u_\rho \log v_\rho,$$

à moins que l'équation différentielle réduite ne possède une intégrale composée algébriquement de $x$ et des logarithmes de branches des logarithmandes algébriques. Les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ sont des intégrales particulières algébriques de l'équation différentielle réduite; de plus, elles satisfont à des équations algébriques irréductibles (les coefficients de l'équation différentielle étant adjoints), de telle sorte qu'il existe, autour de chacun de leurs points de ramification, entre $\rho + 1$ éléments d'un cycle, une relation homogène et linéaire

$$c_\alpha u_\alpha + c'_\alpha u'_\alpha + c''_\alpha u''_\alpha + \ldots + c_\alpha^{(\rho)} u_\alpha^{(\rho)} = 0,$$

où $c_\alpha, c'_\alpha, c''_\alpha, \ldots, c_\alpha^{(\rho)}$ sont des nombres entiers. Les quantités $v_1, v_2, \ldots, v_\rho$ peuvent être exprimées comme fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ et des coefficients de l'équation différentielle.

Dans la seconde Partie du Mémoire on trouve des propositions analogues concernant la relation la plus générale entre des intégrales abéliennes.

*Thomé* (*L.-W.*). — Remarque sur le Mémoire de M. Grünfeld

contenu dans le Tome XCVIII de ce Journal : *Pour la théorie des équations différentielles linéaires*. (88).

*Runge* (*C.*). — Sur la décomposition en facteurs irréductibles, des fonctions entières à coefficients entiers. (89 97).

Dans le § 4 de sa *Festschrift* (voir *Bulletin* [2], $VIII_1$, p. 145) M. Kronecker a signalé une méthode dont on peut se servir pour décider sur l'irréductibilité d'une fonction entière d'une variable, à coefficients entiers. Cette méthode, qui se complique par le nombre énorme des systèmes de valeurs à considérer, subit déjà des simplifications quand on profite de plusieurs observations de M. Kronecker, communiquées à ses élèves dans son *Cours d'Algèbre*. En y ajoutant encore quelques corollaires, M. Runge réussit à la perfectionner à un tel point que ce procédé puisse être mis très avantageusement en usage.

*Schoute* (*P.-H.*). — Remarque sur le Mémoire de M. O. Hermes : *Sur une certaine courbe du troisième degré*. (98-109).

Nous avons rendu compte du Mémoire de M. Hermes dans le *Bulletin* [2], $XII_2$, p. 123. L'énoncé du problème se trouve déjà dans un Mémoire de Steiner de 1852 (*Journal de Crelle*, 45, p. 375, et *Œuvres de Steiner*, t. II, p. 487).

« Soient AB et CD deux segments droits d'un même plan, donnés dans une position fixe quelconque; le lieu du point d'où AB et CD se présentent sous le même angle visuel (ou bien sous des angles supplémentaires) se compose de deux courbes du troisième degré. Ces deux courbes passent par les quatre extrémités des deux segments et par le point de rencontre des deux droites; de plus, elles ont en commun les deux points d'où les deux segments se voient sous un angle droit. Les deux autres points communs aux deux courbes sont imaginaires et appartiennent à la droite à l'infini. La proposition comprend beaucoup de cas spéciaux dont quelques-uns sont très intéressants et qui se présentent quand on fait des suppositions spéciales sur la position et la grandeur des segments. »

Le problème général, qui se trouve être en liaison intime avec la théorie des courbes du troisième ordre, a été l'objet de plusieurs travaux synthétiques, entre autres de M. Küpper et de M. Schoute. L'auteur cite en particulier :

C. Pelz, *Ueber das Problem der Glanzpunkte* (*Comptes rendus de l'Ac. de Vienne*, LXIV, p. 730; 1864).

H. Schroeter, *Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungs art der allgemeinen Curve dritter Ordnung* [*Math. Ann.*, V, p. 50, voir *Bulletin* [1], VIII, p. 79].

*Hesse* (*Otto*). — Sur les substitutions linéaires et homogènes par lesquelles la somme des carrés de quatre variables se transforme en somme des carrés des quatre variables substituées. (110-127). (Communiqué par M. F. Caspary comme travail posthume de Hesse.)

On a étudié, à différentes reprises, les propriétés des substitutions linéaires

et homogènes par lesquelles la somme des carrés de $n$ variables se transforme en somme des carrés des $n$ variables substituées. Dans les cas de $n = 2$ et $n = 3$ où ces substitutions servent à effectuer les transformations des coordonnées dans le plan et dans l'espace, il s'agit non seulement d'étudier les propriétés générales des substitutions linéaires et homogènes, mais encore et en premier lieu d'approfondir celles qui sont propres à chaque cas individuel. Une discussion semblable pour $n = 4$, qui n'a pas été achevée jusqu'à présent, conduit à la résolution du problème fondamental de la théorie des surfaces de second ordre : « Trouver le huitième point d'intersection de trois surfaces du second ordre quand on s'en donne sept. » Le théorème qui résume les recherches de Hesse s'énonce comme suit (p. 125) :

« Considérons six points quelconques d'entre les huit points d'intersection de trois surfaces de second ordre comme les sommets d'un hexagone gauche U ; menons par le septième point d'intersection des trois surfaces les trois droites qui rencontrent chacun des trois couples de côtés opposés de l'hexagone ; prenons les six points de rencontre, dans le même ordre que les côtés de l'hexagone U, comme les sommets d'un hexagone gauche $V_1$ inscrit à l'hexagone U ; construisons tout de même un autre hexagone $V_2$ à l'aide du huitième point d'intersection : alors les deux hexagones $V_1$ et $V_2$ seront situés sur un même hyperboloïde H. »

*Caspary* (*F.*). — Pour la construction du huitième point d'intersection de trois surfaces du second ordre. (128-130).

Tandis que Hesse s'était contenté d'indiquer le chemin qu'il fallait prendre pour résoudre le problème en question, M. Caspary achève la construction et trouve le point cherché comme intersection de trois plans.

*Schroeter* (*H.*). — Construction du huitième point d'intersection de trois surfaces de second ordre dont on se donne sept points quelconques et indépendants l'un de l'autre. (131-140).

M. Schröter revient à la première solution de Hesse, insérée au t. 20 du *Journal de Crelle,* pour la simplifier, de telle sorte qu'il est aisé d'achever la construction. Ce procédé a l'avantage d'opérer presque exclusivement dans un même plan.

Dans des notes, MM. Caspary et Schröter donnent la bibliographie de ce problème, où l'on rencontre les noms de Lamé, Hesse, von Staudt, H. Müller, R. Sturm, P. Serret, Picquet, Reye, Zeuthen, Schröter.

*Perott* (*J.*). — Démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre. (141-146).

« Telle est la fécondité des idées disséminées dans la mémorable Thèse du grand géomètre (Gauss), qu'en les recueillant avec soin, on parvient facilement à reconstituer une autre démonstration du théorème fondamental, différente de la première de Gauss. »

La démonstration de l'auteur repose sur l'hypothèse de continuité géométrique et de l'existence d'un maximum d'une fonction algébrique.

*Gundelfinger* (*S.*). — Pour la théorie des substitutions orthogonales. (147-153).

Si deux fonctions quelconques entières et homogènes $\varphi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\psi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ se transforment par une substitution

$$\xi_k = a_k^0 x_0 + a_k^1 x_1 + \ldots + a_n^k x_n$$

en $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et $\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, on aura en même temps

$$\sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} = \sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_k},$$

$$\sum_k\sum_\lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_k\,\partial\xi_\lambda}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_k\,\partial\xi_\lambda} = \sum_k\sum_\lambda \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k\,\partial x_\lambda}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\,\partial x_\lambda}, \qquad \ldots,$$

pour des sommations triples, quadruples, etc. Application à la théorie des coordonnées curvilignes.

*Stahl* (*Wilhelm*). — Sur un certain genre de courbes gauches. (154-160).

Ces courbes gauches ont la propriété d'être placées sur une première surface du second ordre et de posséder des plans osculateurs qui touchent une autre surface de seconde classe. Elles donnent lieu à une suite de courbes qui sont alternativement collinéaires, c'est-à-dire que la première, troisième, cinquième, etc., sont collinéaires entre elles, de même que la deuxième, quatrième, sixième, etc. La courbe gauche du quatrième ordre et de seconde espèce en donne un bel exemple.

*Franke*. — Sur certaines lignes dans le triangle. (161-164).

*Hurwitz* (*Adolf*). — Sur le nombre des classes de formes quadratiques à déterminant négatif. (165-168).

Extrait d'une lettre adressée à M. Kronecker. L'auteur a obtenu plusieurs relations nouvelles en combinant deux formules empruntées à la théorie des fonctions thêta avec les relations plus anciennes découvertes par M. Kronecker.

*Segre* (*Corrado*). — Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires. (169-172).

En représentant par $k$ et $k'$ les paramètres principaux de deux complexes linéaires $c$ et $c'$, par $x$ et $x'$ leurs axes et par $\Delta$ et $\varphi$ la distance et l'angle de ces axes, M. Klein a nommé *moment mutuel* de $c$ et $c'$ l'expression

$$(k + k')\cos\varphi - \Delta\sin\varphi.$$

On peut donner à ce moment une forme plus simple en introduisant la considération de l'*angle* de $c$, $c'$ dans le sens de M. Cayley, en prenant pour absolu de l'espace de complexes linéaires la variété quadratique des complexes spé-

égaux : car il existe alors la relation

$$2\sqrt{kk'}\cos(cc') = (k+k')\cos\varphi - \Delta\sin\varphi.$$

M. Segre a démontré cette formule dans un Mémoire publié dans le t. XIX des *Atti di Torino;* il expose maintenant une nouvelle démonstration synthétique fort simple.

*Wolfskehl* (*Paul*). — Démonstration que l'unité fait le second facteur du nombre des classes pour les nombres formés des onzième et treizième racines d'unité. (173-178).

*Von Lilienthal.* — Sur les surfaces minima représentables par des intégrales elliptiques. (179-194).

L'auteur établit l'existence de deux faisceaux de surfaces minima qu'il avait déjà signalés dans un Mémoire inséré au t. XCIII du même Journal (*Bulletin* [2], $IX_2$, p. 47). Nommons les fonctions U, V, W dont les parties réelles représentent les coordonnées des surfaces minima considérées *fonctions génératrices :* ces fonctions ne contiennent pour le premier faisceau que des intégrales elliptiques de troisième et de première espèce, pour l'autre faisceau que des intégrales de deuxième et de première espèce. En introduisant des restrictions convenables, on reconnaît que ces surfaces minima appartiennent à la classe de celles qui possèdent une courbe plane comme ligne géodésique ou à celles qui en possèdent une sur leurs surfaces applicables d'Ossian Bonnet.

*Schoenflies* (*A.*). — Sur les surfaces de second degré qui sont engendrées par deux gerbes équiangles et réciproques de rayons. (195-204).

Imaginons une gerbe S de plans et une gerbe $S_1$ de rayons réciproques, de telle sorte que deux plans $\alpha$ et $\beta$ de S font entre eux le même angle que les rayons correspondants $a_1$ et $b_1$ de $S_1$ : alors le lieu des points de rencontre des éléments correspondants de S et $S_1$ est une surface quadrique de révolution; cependant il est remarquable qu'on ne parvienne ainsi qu'aux surfaces engendrées par la rotation d'une conique autour de l'axe mineur, c'est-à-dire à l'ellipsoïde aplati, à l'hyperboloïde à une nappe dont l'axe réel est plus grand que l'axe conjugué, et à l'hyperboloïde à deux nappes dont l'axe conjugué est plus grand que l'axe réel.

*Reye* (*Th.*). — Sur les complexes et congruences quadratiques de sphères, leurs cercles et leurs cyclides. (205-224).

Dans son Livre : *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelnsysteme* (Leipzig, 1879, p. 89) M. Reye a exposé les idées fondamentales sur lesquelles reposent ses nouvelles recherches. Il explique le but de son travail dans ces mots :

« Le complexe quadratique Π de toutes les sphères indéfiniment petites est intimement lié à la théorie de normales dans la géométrie de sphères. Car

deux sphères (ou systèmes linéaires de sphères) sont normales l'une à l'autre, quand elles sont conjuguées par rapport au complexe Π de sphères nulles; un buisson de sphères (*Kugelngebüsch*) ou complexe linéaire de sphères est donc, par rapport à Π, polaire de sa sphère orthogonale, et celle-ci est le lieu des sphères nulles du buisson et normale à toutes ses sphères. »

Mais c'est aussi pour les problèmes de contact de la géométrie de sphères que le complexe Π de sphères nulles se montre de la dernière importance, ce qu'on reconnaît déjà par la proposition : « Deux sphères ne se touchent que lorsque le faisceau de sphères qui les joint contient deux sphères nulles coïncidentes, ou bien touche le complexe Π. » A l'aide du complexe Π nous parvenons au complexe de toutes les sphères qui touchent une cyclide quelconque, aux congruences de sphères osculatrices de cette surface ou bien tangentes en deux de ses points, et enfin aux faisceaux de sphères triponctuellement osculatrices. En outre, on fera voir comment le problème des cercles et droites touchant doublement une cyclide peut être complètement résolu au moyen du complexe Π. Mais, avant tout, on s'attachera à étudier les faisceaux de sphères et de cercles que contiennent des complexes et des congruences quadratiques de sphères, et à en rechercher la position mutuelle et la distribution dans l'espace.

§ 1. Complexes, congruences et faisceaux quadratiques de sphères. § 2. Les cercles d'un complexe quadratique de sphères. § 3. Complexes quadratiques concycliques et confocaux de sphères et les cercles et cyclides qu'ils contiennent. § 4. Le complexe des sphères touchantes et la congruence des sphères de courbure d'une cyclide.

*Picquet* (*H.*). — Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré. (225-232).

Dans un article inséré au t. LXXIII du même Journal [voir *Bulletin* [1], III, p. 244], l'auteur s'était proposé de résoudre linéairement les trois problèmes :

« 1° Construire par points la surface du second degré déterminée par neuf points distincts; 2° Construire par points la biquadratique gauche qui passe par huit points distincts; 3° Construire le huitième point d'intersection de trois surfaces du second degré dont on connaît les sept autres points communs. »

Il prouve maintenant que ses constructions sont en effet linéaires (contrairement à une Note de Borchardt), et, en donnant les détails de l'achèvement, il signale quelques simplifications.

*Schroeter* (*H.*). — Remarque sur la Note de M. Franke à Dessau : *Sur certaines lignes dans le triangle* (p. 161 du même Tome). (233-235).

Les propositions de M. Franke avaient été déjà publiées par M. Schroeter, dans le Mémoire : *Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks* (t. LVIII, p. 219 du même Journal), et elles ne sont que des cas spéciaux d'un théorème beaucoup plus général qu'on y trouve énoncé.

*Wiltheiss* (*Ed.*). — Sur les équations différentielles partielles

entre les dérivées des fonctions thêta hyperelliptiques suivant les paramètres et les arguments. (226-257).

Dans la théorie des fonctions elliptiques on a l'équation différentielle partielle

$$4q\frac{\partial_\lambda \mathfrak{S}(x)}{\partial q}+\frac{\partial_\lambda^2 \mathfrak{S}(x)}{\partial x^2}=0 \qquad (\lambda=0,1,2,3),$$

d'après les notations de Jacobi, ou bien

$$12g_3\frac{\partial\,\sigma u}{\partial g_2}+\frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\,\sigma u}{\partial g_3}=\frac{1}{12}g_2u^2\sigma u+\frac{\partial^2\,\sigma u}{\partial u^2},$$

d'après les notations de M. Weierstrass.

M. Wiltheiss déduit les formules analogues pour les fonctions thêta hyperelliptiques dans la forme introduite par M. Weierstrass. Les équations différentielles qu'il obtient sont une autre forme des relations établies par Riemann (*Œuvres*, p. 131)

$$4\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial a_{\mu\mu}}=\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial v_\mu^2}, \qquad 2\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial a_{\mu\mu'}}=\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial v_\mu\,\partial v_{\mu'}}.$$

(Voir aussi Forsyth, *Transactions of the Royal Society*, t. 185, III.)

*Rados* (*Gustav*). — Pour la théorie des congruences de degré supérieur. (258-260).

Démonstration de deux théorèmes de M. J. König.

*Busche* (*E.*). — Démonstration arithmétique de la loi de réciprocité pour les restes biquadratiques. (261-274).

M. Kronecker a déterminé le symbole $\left(\frac{n}{m}\right)$ de Legendre en l'associant au signe de certains produits (voir *Bulletin* [2], $\text{XII}_2$, p. 13). M. Busche s'aide de la représentation géométrique des nombres de Jacobi et applique le raisonnement de M. Kronecker au symbole $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$ de Jacobi pour développer une relation entre $\left(\left(\frac{n}{m+2\lambda n}\right)\right)$ et $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$, où $n$ et $m$ sont deux nombres complexes dont $m$ impair. Des spécialisations convenables l'amènent alors aisément aux différents cas de la loi de réciprocité. L'auteur croit que sa démonstration s'approche de celle que Gauss avait en vue en ébauchant le *Nachlass* I, parce que Gauss n'y a pas cherché une expression calculatoire du décident.

*Frobenius* (*G.*). — Sur les relations entre les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe plane de quatrième ordre. (275-314).

L'auteur fait une comparaison des résultats connus jusqu'à présent et de la portée des développements analytiques et synthétiques; en y suppléant par des considérations nouvelles et particulières, il établit un ensemble bien ordonné

et facile à saisir d'un coup d'œil, et il fait voir que les recherches qu'on a entreprises en divers sens, correspondent à autant de parties de la théorie des fonctions abéliennes du genre 3.

Les centres des cônes compris dans une gerbe de surfaces de second ordre passant par sept points de l'espace (et par conséquent aussi par un huitième) remplissent une courbe gauche $C_6$ de sixième ordre du genre 3. Interprétons les paramètres de la gerbe comme coordonnées d'un point dans un plan : les points correspondants aux centres des cônes parcourront une courbe générale de quatrième ordre $F_4$, qui se trouve ainsi mise en correspondance uniforme avec les points de $C_6$ (théorie de Hesse relative à une $F_4$ et à ses tangentes doubles). Cette relation purement analytique entre les théories de l'espace et du plan se réalise par la Géométrie pure quand on remplace la figure de l'espace par celle qui lui correspond en vertu du principe de dualité, c'est-à-dire par un tissu de surfaces de seconde classe (touchant sept plans, et par suite encore un huitième) et qu'on le coupe par un plan P quelconque (théorie de R. Sturm). Faisons coïncider le plan sécant avec l'un des huit plans fondamentaux du tissu : il naîtra tout d'un coup la figure (d'Aronhold) du tissu de courbes de troisième classe qui touchent sept droites, à savoir les traces des autres sept plans fondamentaux. Une huitième droite quelconque de P déterminera un faisceau de courbes de troisième classe qui ont une neuvième tangente en commun. A toute courbe K du tissu Aronhold fait correspondre une droite T comme lieu des *sommets* des *derniers* couples de tangentes touchant les courbes K. Or M. Godt (voir CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons de Géométrie*), observant que chaque point du plan n'est le sommet que d'un seul couple de ces tangentes, a établi une correspondance uniforme entre les derniers couples de tangentes et leurs sommets, d'où il a tiré une simplification importante des recherches de M. Aronhold. M. Frobenius montre qu'une simplification analogue s'applique à la méthode de Hesse-Sturm quand on a recours au lemme : en général une surface de seconde classe est complètement déterminée, si l'on s'en donne sept plans tangents et le point de contact de l'un d'eux. Le détail des recherches exige un ample usage et une combinaison habile d'une foule de formules qu'il n'est pas possible de transcrire.

§ 1. Développement géométrique des relations entre les vingt-huit tangentes doubles. § 2. Sur le dernier couple de tangentes dont un point donné quelconque fait le sommet. § 3. Tout point est le sommet d'un dernier couple de tangentes. § 4. Représentation analytique des vingt-huit tangentes doubles au moyen de sept d'entre elles. § 5. Le déterminant de trois tangentes doubles azygétiques. § 6. Le déterminant de trois tangentes doubles syzygétiques. § 7. Le tissu de surfaces de seconde classe. § 8. Les fonctions radicales de deuxième et troisième ordre. § 9. Détermination d'une section conique par cinq de ses tangentes. § 10. Seconde définition des fonctions radicales.

*Genocchi* (*Angelo*). — Sur les nombres de Bernoulli. (315-316).

Extrait d'une lettre à M. Kronecker contenant une réclamation de priorité. Voir le compte rendu sur un article de M. Lipschitz, *Bulletin* [2], $XI_2$, p. 69.

*Sturm* (*R.*). — Sur le huitième point d'intersection de trois surfaces de second ordre. (317-319).

Extrait d'une lettre à M. Schroeter :

« Votre article sur le huitième point d'intersection de trois surfaces de second ordre (p. 131) m'a engagé à revenir à mes recherches antérieures sur ce sujet et à en tirer, moi aussi, une construction du point mentionné. Sans doute il vous intéressera d'apprendre que, tout en partant de considérations différentes, je suis parvenu précisément à la même construction que vous. »

*Zeuthen* (*H.-G.*). — Constructions du huitième point commun aux surfaces du second ordre, qui passent par sept points donnés. (320-323).

Réimpression du résumé en français, joint à la Note de l'auteur, publié en danois dans le *Bulletin de l'Académie danoise de* 1880, où M. Zeuthen avait donné une déduction directe et indépendante pour cette construction. Maintenant il la fait précéder de quelques observations littéraires et y ajoute une simplification des opérations.

*Hermite* (*Ch.*). — Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. (324-328).

Extrait d'une lettre à M. Fuchs. Pour donner une idée des questions résolues, soit $f(\mathrm{M}) = 4\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)}$ la somme se rapportant à tous les diviseurs de M. On aura comme valeur asymptotique

$$f(1)+f(5)+f(9)+\ldots+f(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\mathrm{M}\pi,$$

relation qui se déduit de la formule empruntée à la théorie des transcendantes elliptiques

$$\frac{2k\mathrm{K}}{\pi} = \Sigma f(\mathrm{M})\sqrt{q^{\mathrm{M}}}.$$

Le même procédé permet de tirer de l'équation

$$\sum \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1-q^n} = \Sigma \mathrm{F}(\mathrm{N})\,q^{\mathrm{N}}$$

la valeur asymptotique de la somme

$$\mathrm{F}(1)+\mathrm{F}(2)+\mathrm{F}(3)+\ldots+\mathrm{F}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\mathrm{N}\log\mathrm{N} + \left(\mathrm{C}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{N},$$

en désignant par C la constante d'Euler. On trouve encore deux autres sommes de même nature.

*Kronecker* (*L.*). — Sur quelques applications des systèmes des modules à des questions algébriques élémentaires. (329-371).

Dans la première Section du Mémoire intitulé : *Remarques préalables sur les congruences suivant des systèmes de modules,* l'auteur montre que l'intro-

duction des *systèmes de modules* fait une extension naturelle de la notion gaussienne de congruence, et qu'il est non seulement utile, mais même nécessaire de procéder ainsi, en partant de la théorie des nombres, au traitement arithmétique des fonctions à coefficients entiers, de variables indéterminées. L'auteur expose la notion de systèmes de modules *contenant* d'autres et explique comment des systèmes de module à un nombre infini de variables peuvent être remplacés par d'autres à un nombre fini de variables. Après avoir rappelé les significations de *degré* et de *rang* (voir sa *Festschrift*), il définit les systèmes *premiers* de modules ou *formes premières* comme les systèmes ou formes qui ne sont pas seulement non décomposables, mais encore qui ne contiennent pas d'autres systèmes de modules ou de formes de même degré. C'est pour ces systèmes qu'on a le théorème :

« Un produit ne peut être congru à zéro, à moins qu'un de ses facteurs ne le soit en même temps. »

Les autres Sections sont vouées à l'étude de plusieurs questions algébriques et servent à montrer quelle est l'importance de la théorie des systèmes de modules : les méthodes deviennent plus lucides, les résultats de l'investigation mathématique se mettent sous une forme plus précise et plus générale : c'est ce qui résulte de ces exemples bien intéressants en eux-mêmes.

La seconde Section s'occupe de congruences linéaires pour des systèmes premiers de modules. Citons le théorème, p. 343 :

« Par un système de congruences

$$\sum_{k=1}^{k=t} V_{ik}^{(1)} X_k \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ M, M', M'', \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, t),$$

où $V_{ik}^{(1)}$, M, M', M'', ... dénotent des grandeurs quelconques d'un domaine naturel de rationalité, et les dernières forment un système premier de modules, la variété $t'$-uple des grandeurs X est restreinte à une variété exactement $(t'-r)$-uple, si $r$ désigne le rang du système $V_{ik}^{(1)}$ par rapport au système de modules (M, M', M'', ...). »

La troisième Section expose la représentation du plus grand diviseur commun de deux fonctions entières de $x$ pour un système premier de modules quelconques du domaine de leurs coefficients, et, dans la quatrième Section, on trouve la résolution d'un système spécial de congruences.

ACTA MATHEMATICA.

Tome X; 1887 (¹).

*Hacks.* — Sur les sommes des parties entières des valeurs de certaines fonctions. (1-52).

Le Mémoire de M. Hacks se rapporte à des évaluations de sommes, telles que

$$\varphi(\mu)\mathrm{E}[f(\mu)] + \varphi(\mu+1)\mathrm{E}[f(\mu+1)] + \varphi(\mu+2)\mathrm{E}[f(\mu+2)] + \ldots + \varphi(s)\mathrm{E}[f(s)] + \ldots + \varphi(p)\mathrm{E}[f(p)],$$

où E désigne la partie entière de la quantité entre crochets, où $\varphi(s)$ est une fonction quelconque de $s$, et $f(s)$ une fonction croissante, ou une fonction décroissante de la variable. A ces deux cas correspondent deux divisions du Mémoire. Celui-ci contient la généralisation de beaucoup de résultats, en particulier de la célèbre identité

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left[\frac{p}{q}s\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\left[\frac{q}{p}s\right] = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2},$$

d'où Gauss a déduit la troisième de ses démonstrations de la loi de réciprocité.

*Stern.* — Sur la valeur de quelques séries qui dépendent de la fonction $\mathrm{E}(x)$. (53-56).

Outre cette fonction, M. Stern introduit aussi la fonction

$$\mathrm{E}_2[x] = \frac{\mathrm{E}[x]\,\mathrm{E}[x+1]}{1.2},$$

qu'a considérée M. Hermite.

Signalons, par exemple, les relations

$$\sum_{r=1}^{m-1} \mathrm{E}\left[x - \frac{r}{m}\right] = \mathrm{E}[m(x-1)] - \mathrm{E}[x-1],$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m-r)\,\mathrm{E}_2\left[x + \frac{r}{m}\right] + \sum_{r=1}^{m-1} (m-r)\,\mathrm{E}_2\left[x - \frac{r}{m}\right] = \mathrm{E}_2[mx] - m\,\mathrm{E}_2[x].$$

dont la dernière est due à M. Hermite. La méthode de déduction est élémentaire. (Voir *Acta*, t. V, p. 315; t. VIII, p. 93.)

(¹) Voir *Bulletin*, XIV₂, p. 122.

*Schwering.* — Sur certains nombres complexes trinômes. (57-86).

L'auteur étudie les normes de nombres complexes de la forme

$$x + \alpha - \alpha^{\nu+1},$$

où $\alpha$ est une racine imaginaire de l'équation

$$\alpha^{\lambda} - 1 = 0,$$

et où $\nu$ est un des nombres $1, 2, 3, \ldots, \lambda - 2$. Ces recherches se relient à celles de M. Kronecker sur les équations abéliennes (*Journal de Crelle*, t. 93, p. 338, etc.).

*Lerch.* — Un théorème de la théorie des séries. (87-88).

Un cas très particulier de la proposition de M. Lerch est le suivant : La fonction

$$f(x) = \Sigma x^{1.2.3\ldots n}$$

n'existe qu'à l'intérieur du cercle de rayon un; car, si l'on s'approche du cercle de convergence le long d'un rayon faisant avec l'axe des quantités réelles un angle commensurable avec $\pi$, $|f(x)|$ augmente indéfiniment.

*Kobb* (*Gustaf*). — Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. (89-102).

Un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface de révolution

$$f(y^2 + z^2, x) = 0$$

est soumis à l'action de forces admettant un potentiel

$$U = R(y^2 + z^2, x);$$

la relation donnée $f = 0$ étant supposée algébrique, et la fonction U rationnelle, on est ramené à des quadratures abéliennes. L'auteur de ce travail s'est proposé de rechercher des conditions *nécessaires* pour que ces intégrales se réduisent à des intégrales elliptiques, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Il arrive à cette conclusion qu'il ne peut en être ainsi que si la relation $f(r^2, x) = 0$, considérée comme une équation entre $x$ et $r^2$, est de genre zéro.

Dans le courant de son Mémoire, M. Kobb est amené à traiter la question suivante : Étant donnée une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ de genre $\rho$, quel est le genre $\rho'$ de la relation entre $x$ et $z$, $f(x, z^2) = 0$? Si $\lambda$ désigne le nombre total des systèmes circulaires de la forme

$$y = a x^{\frac{\mu}{\nu}} \left[ 1 + p\left( x^{\frac{1}{\nu}} \right) \right],$$

où $\mu$ est un nombre impair, on déduit aisément, de la formule générale de Riemann, la relation

$$2\rho' = 4\rho + \lambda - 2.$$

L'auteur essaye ensuite de prouver qu'on ne peut avoir $\rho' = 1$ que si $\rho = 0$, $\lambda = 4$. Ce théorème est inexact si la relation entre $x$ et $z$ se décompose. Que l'on prenne, par exemple, la relation

$$y^4 - (x^2 - 1)^2 = 0,$$

qui est du premier genre; si l'on y remplace $y$ par $z^2$, elle se dédouble en deux relations distinctes

$$z^2 \pm x^2 - 1 = 0,$$

qui sont également du premier genre. Les conclusions de l'auteur ne peuvent évidemment être admises que sous le bénéfice de l'observation précédente.

## *Bohling.* — Sur le rôle du principe des forces vives dans les questions de stabilité des systèmes dynamiques. (109-130).

L'un des principaux cas examinés par M. Bohling est le cas d'un point attiré suivant la loi de Newton par deux points, dont l'un est fixe et l'autre décrit autour de celui-là un cercle, d'un mouvement uniforme. Tout se passe dans un plan. On a alors une intégrale (signalée par Jacobi) de la forme

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - n^2 r^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\rho} + h = 0,$$

où $r$, $\rho$ sont les distances du point attiré aux deux points attirants.

Cette équation permet, dans une certaine mesure, de discuter la stabilité du mouvement du point mobile à peu près comme l'intégrale des forces vives dans le cas du mouvement d'un point attiré par un centre fixe. Enfin, l'auteur applique des considérations de la même nature à la question de l'existence de la libration en longitude pour une planète.

## *Lipschitz.* — Sur la théorie des surfaces (131-136).

L'auteur rappelle d'abord les formules qu'il a publiées dans plusieurs Mémoires des *Sitzungsberichte der Berliner Akademie* (1882 et 1883) relatifs à la théorie des surfaces. Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface non développable, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les cosinus directeurs de la normale

$$\xi = \cos\theta, \qquad \eta = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \zeta = \sin\theta\sin\varphi,$$

$\rho_1$, $\rho_2$ les rayons de courbure principaux, $\sigma$ l'angle que fait la projection de l'axe des $x$ sur le plan tangent avec la direction correspondant au rayon de courbure principal $\rho_1$. Pour une surface donnée, $\rho_1$, $\rho_2$, $\sigma$ sont trois fonctions des deux variables indépendantes $\theta$ et $\varphi$ vérifiant la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial[\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\varphi} \\ &\quad + i\cos\theta[\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma}] = i\,\frac{\partial[\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\theta}. \end{aligned} \right.$$

Inversement, si trois fonctions $\rho_1$, $\rho_2$, $\sigma$ vérifient cette relation, il leur correspond une surface dont on obtiendra les coordonnées par des quadratures.

On peut satisfaire à l'équation de condition (1) en supposant que $\rho_1 - \rho_2$ est

constant et que $\sigma$ est fonction de la seule variable $\theta$. On trouve ainsi qu'il faut prendre

$$\cos 2\sigma \sin^2\theta = \sqrt{F(\cos\theta)},$$

où

$$F(\cos\theta) = \sin^4\theta - (L + M\cos\theta)^2,$$

L et M étant deux constantes arbitraires,

$$\rho_1 + \rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)\left[\int \frac{d(\cos 2\sigma \sin^2\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{\sin^2\theta} + M\varphi\right].$$

La surface correspondante est représentée par les équations

$$x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\,[(2P + M\varphi)\cos\theta - 2Q + L\varphi],$$

$$y = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left[(2P + M\varphi)\sin\theta\cos\varphi - \frac{L\cos\theta + M}{\sin\theta}\sin\varphi\right],$$

$$z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left[(2P + M\varphi)\sin\theta\sin\varphi + \frac{L\cos\theta + M}{\sin\theta}\cos\varphi\right],$$

où

$$P = \int \frac{\sqrt{F(\cos\theta)}}{\sin^3\theta}\cos\theta\,d\theta, \qquad Q = \int \frac{\sqrt{F(\cos\theta)}\,d\theta}{\sin^3\theta}.$$

Si l'on suppose $L = M = 0$, la surface est de révolution.

*Lipschitz.* — Démonstration d'un théorème de la théorie des substitutions. (137-144).

Il s'agit de la condition pour qu'une substitution

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

répétée $\mu$ fois, engendre la substitution identique.

*Dobriner.* — Sur les surfaces minima qui admettent un système de lignes de courbures sphériques. (145-152).

L'auteur montre comment on parvient à ces surfaces en utilisant les résultats de son Mémoire antérieur (*Acta,* t. IX) sur les surfaces à courbure constante, ainsi que les formules de M. Weierstrass relatives aux surfaces minima.

*Pincherle.* — Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies. (153-182).

Ce travail a pour objet d'esquisser quelques points de la théorie des expressions propres à représenter des fonctions analytiques et données sous forme d'intégrales définies. L'auteur se borne aux expressions de la forme

$$\int A(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne quelconque du plan $y$; il considère l'expression ci-dessus comme un algorithme appliqué au *sujet* variable $\varphi(y)$ et dont les propriétés essentielles dépendent de la fonction $A(x, y)$. Ces pro-

priétés sont de deux sortes, formelles et effectives, et elles sont traitées séparément dans les deux Parties du Mémoire.

Dans la première Partie, M. Pincherle précise d'abord les hypothèses qu'il fait sur les fonctions $A(x, y)$ et $\varphi(y)$: $A(x, y)$ est une fonction analytique régulière lorsque $y$ se déplace sur la ligne d'intégration $l$ et que $x$ reste compris dans un certain domaine connexe $T_r$ du plan des $x$; enfin, $\varphi(y)$ est une fonction analytique continue le long de $l$. Dans ces conditions, à toute fonction $\varphi(y)$ correspond une fonction $f(x)$ régulière dans $T_r$ représentée par l'intégrale définie

$$f(x) = \int_l A(x, y)\,\varphi(y)\,dy;$$

la dépendance entre les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(y)$ peut être représentée par la notation abrégée

$$f = A(\varphi),$$

et l'étude de cette nature d'opérations fonctionnelles conduit l'auteur à se poser la question suivante : Existe-t-il une autre fonction $B(y, t)$ et une ligne d'intégration $\lambda$, telles que l'on puisse conclure de la relation écrite plus haut

$$\varphi = \int_\lambda B(y, t)\,f(t)\,dt,$$

et, si elle existe, comment peut-on l'obtenir?

Ce problème, d'une si haute généralité, est ramené par lui à la recherche d'une intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles dépendant de fonctions arbitraires et devant satisfaire en outre à certaines conditions aux limites.

Dans la seconde Partie de son travail, M. Pincherle étudie les propriétés de la fonction

$$f(x) = \int A(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

lorsque le contour d'intégration se réduit à une circonférence, en particularisant convenablement les fonctions $A(x, y)$ et $\varphi(y)$.

*Staude (Otto)*. — Sur un système de coordonnées transcendantes. (183-200).

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'un point, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ses coordonnées elliptiques; on passe du premier système au second par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\\ y &= \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}},\\ z &= \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}},\end{aligned}\right.$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ et les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ satisfaisant aux conditions

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha.$$

L'auteur indique trois méthodes permettant d'exprimer les radicaux qui figurent dans les formules (1) par des fonctions uniformes de trois paramètres $u_1$, $u_2$, $u_3$. Dans la première, on prend pour $u_1$, $u_2$, $u_3$ les sommes de trois intégrales de seconde espèce relatives à la relation de genre 2

$$v^2 = r(\rho) = (\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho)(\mu_0 - \rho)(\lambda_0 - \rho);$$

en appliquant les résultats de Clebsch et Gordan relatifs au problème de l'inversion généralisé (*Theorie der Abelschen Functionen*, p. 150), M. Staude obtient des expressions de $x$, $y$, $z$ où figurent des fonctions $\Theta$ des deux variables $u_1$ et $u_2$, et où $u_3$ entre linéairement. Si l'on attribue à $u_1$ et $u_2$ des valeurs constantes $a_1$ et $a_2$, le point $x$, $y$, $z$ décrit une tangente commune aux deux surfaces du second degré $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$. On retrouve aisément les formules de Jacobi relatives au mouvement d'un point matériel libre en coordonnées elliptiques et les formules de M. Weierstrass donnant les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

Dans le deuxième système, on prend pour $u_1$, $u_2$, $u_3$ les sommes de trois intégrales de troisième espèce relatives à la courbe

$$v^2 = r(\rho) = -(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho)(\mu_0 - \rho)(\lambda_0 - \rho)(\lambda_1 - \rho);$$

parmi les résultats qui se déduisent des formules obtenues, je citerai les formules donnant le mouvement d'un point matériel sur un ellipsoïde, attiré par le centre proportionnellement à la distance.

Dans le troisième système, $u_1$, $u_2$, $u_3$ sont les sommes de trois intégrales de première espèce relatives à la courbe de genre 3

$$v^2 = r(\rho) = (\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho)(\mu_0 - \rho)(\lambda_0 - \rho)(\lambda_1 - \rho)(\lambda_2 - \rho);$$

$x, y, z$ sont données par des quotients de deux fonctions $\Theta$ d'indices différents des trois variables $u_1$, $u_2$, $u_3$ et prennent des valeurs réelles lorsque les arguments $u_1$, $u_2$, $u_3$ sont eux-mêmes réels.

Si l'on pose

$$u_1 = a_1, \qquad u_2 = b_1, \qquad u_3 = c + gt,$$

les formules obtenues représentent la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action de forces pour lesquelles il existe un potentiel

$$U = -\frac{1}{2} g^2 [L(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)].$$

Les sept quantités $a, b, c, \lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \lambda_2$, qui doivent vérifier la relation

$$\lambda_0 + \mu_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = L,$$

peuvent être considérées comme les six constantes d'intégration. L'auteur donne en terminant les conditions que doivent remplir ces constantes pour que le mouvement soit périodique.

*Lecornu.* — Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. (200-280).

La première Partie de ce Mémoire contient d'abord l'exposition d'une mé-

thode synthétique pour former l'équation générale des surfaces possédant une certaine symétrie. Si $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ sont les équations de trois surfaces possédant la symétrie demandée, il est clair que toute surface représentée par une équation de la forme

$$\varphi(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0$$

jouira de la même symétrie; de plus, et c'est là le point essentiel de la méthode, l'équation générale précédente sera l'équation générale des surfaces cherchées pourvu que *le produit des degrés des surfaces* $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ *soit égal à l'ordre du groupe qui correspond à la loi de symétrie.* Si donc on peut trouver trois éléments simples L, M, N satisfaisant à la condition précédente, on aura immédiatement l'équation générale demandée. Dans le cas de la symétrie polyédrique, ces éléments simples s'obtiennent sans difficulté; on a d'abord l'élément $\mathrm{L} = x^2 + y^2 + z^2$ fourni par la sphère : les deux autres s'obtiennent en prenant pour chaque polyèdre les deux systèmes de plans les plus simples possédant la symétrie de ce polyèdre.

L'auteur indique ensuite quelques propriétés générales des surfaces *élémentaires* ou *linéaires,* c'est-à-dire dont l'équation ne contient qu'un ou deux des éléments simples, y compris l'élément sphérique, et des courbes qu'il appelle *sphérosymétriques,* qui résultent de l'intersection des surfaces élémentaires avec les sphères centrales.

Dans les trois autres Parties de son travail, M. Lecornu examine séparément les trois types de symétrie.

Pour la symétrie tétraèdrique, on peut prendre comme éléments simples

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad v = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \qquad w = xyz,$$

de sorte que l'équation générale des surfaces ayant les mêmes plans de symétrie que le tétraèdre régulier est de la forme

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2,\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\ xyz) = 0;$$

parmi ces surfaces, il y a lieu de distinguer les surfaces binaires

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2,\ xyz) = 0,$$

engendrées par des sphérosymétriques du sixième ordre, surfaces qui coupent orthogonalement tous les cônes du second ordre circonscrits aux axes ternaires. Les plus simples sont les cubiques représentées par l'équation

$$xyz + \mathrm{A}(x^2 + y^2 + z^2) + \mathrm{B} = 0,$$

qui dépendent de deux paramètres. La disposition des 27 droites de la surface, l'intersection avec des sphères concentriques sont étudiées en détail; chemin faisant, on rencontre quelques surfaces remarquables déjà étudiées, telles que la surface simple $xyz =$ const., la surface réciproque de la surface de Steiner et la surface tétraédrale symétrique qui a pour équation

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0;$$

à propos de cette dernière surface, l'auteur donne un procédé élégant pour déterminer les lignes asymptotiques des surfaces tétraèdrales

$$t^m + u^m + v^m + w^m = 0.$$

Ces lignes sont algébriques, toutes les fois que $m$ est commensurable.

Dans le cas de la symétrie cuboctaédrique, on peut prendre pour éléments simples

$$\mathrm{L} = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \mathrm{M} = x^4 + y^4 + z^4, \qquad \mathrm{N} = x^2 y^2 z^2;$$

les surfaces binaires $\varphi(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = 0$ sont encore les trajectoires orthogonales des cônes ayant pour équation

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = 0,$$

où $a + b + c = 0$. Les surfaces les plus simples admettant les neuf plans de symétrie d'un cube sont par conséquent, après la sphère, les surfaces du quatrième ordre

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \mathrm{A}(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2\mathrm{B}(x^2 + y^2 + z^2) + \mathrm{C} = 0.$$

Parmi les nombreuses questions que l'on peut se proposer sur ces surfaces, l'auteur étudie en détail les suivantes : génération par des biquadratiques gauches, disposition des plans tritangents, recherche de celles de ces surfaces qui ont des nœuds ou qui contiennent des droites.

La détermination des surfaces qui admettent les mêmes plans de symétrie que l'icosaèdre régulier s'effectue sans difficulté en appliquant la méthode générale exposée dans la première Partie. Si, par le centre de l'icosaèdre, on mène des plans parallèles aux faces de ce solide, on forme évidemment un système de 10 plans admettant la symétrie demandée; il en est encore de même si l'on mène des plans parallèles aux faces du dodécaèdre, ce qui donne un système de six plans possédant la même propriété. Si $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ sont les équations de ces deux systèmes de plans, on peut prendre pour éléments simples $\mathrm{L} = x^2 + y^2 + z^2$, M, N; le produit des degrés de ces trois surfaces est, en effet, égal à 120, ce qui est précisément le nombre des points qui se déduisent d'un point quelconque de l'espace par la loi de symétrie. L'équation générale des surfaces demandées est donc

$$\varphi(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0;$$

les surfaces les plus simples, abstraction faite de la sphère, sont les surfaces du sixième ordre

$$\mathrm{N} + \mathrm{A}(x^2 + y^2 + z^2)^3 + \mathrm{B}(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \mathrm{C}(x^2 + y^2 + z^2) + \mathrm{D} = 0.$$

M. Lecornu détermine complètement les surfaces de cette famille qui ont des nœuds ou qui contiennent des droites. Parmi les surfaces obtenues, il y a lieu de citer particulièrement des surfaces passant par les arêtes de l'icosaèdre ou du dodécaèdre.

## *Humbert* (*G.*). — Sur les intégrales algébriques des différentielles algébriques. (281-298).

Soient $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique, $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle de $x$ et de $y$; *dans quels cas l'intégrale* $\mathrm{I} = \int \varphi(x, y)\,dx$ *est-elle une fonction algébrique de* $x$?

Abel a montré que, si l'intégrale I est une fonction algébrique de $x$, elle

s'exprime rationnellement en $x$ et $y$. Un grand nombre de géomètres, entre autres Liouville et Zeuthen, ont donné des méthodes permettant de reconnaître par des calculs algébriques s'il en est ainsi et de trouver la valeur de l'intégrale. M. Humbert se place, dans son Mémoire, à un tout autre point de vue. Il part des conditions données par Briot et Bouquet pour que l'intégrale

$$I = \int \varphi(x, y)\, dx$$

soit algébrique. Ces conditions sont de deux sortes; il faut et il suffit : 1° que l'intégrale I n'ait pas de cycle polaire; 2° que ses périodes soient nulles. Les premières conditions peuvent toujours se vérifier sans difficulté; mais, sauf des cas simples, il n'en est pas de même des secondes. Ce sont ces conditions que M. Humbert s'est proposé de transformer. La méthode suivie repose sur l'emploi des fonctions fuchsiennes; si la relation proposée est de genre $p$, il résulte des travaux de M. Poincaré que $x$ et $y$ peuvent être exprimées par des fonctions fuchsiennes d'une variable $t$, le polygone générateur $R_0$ du groupe ayant $4p$ côtés, tels que les côtés opposés sont conjugués deux à deux. La question proposée est alors ramenée à celle-ci : Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale

$$I = \int \Theta(t)\, dt$$

soit une fonction fuchsienne, $\Theta(t)$ étant une fonction thêtafuchsienne du premier degré, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\Theta\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) = \Theta(t)\,(ct+d)^2,$$

en désignant par $\left(t, \dfrac{at+b}{ct+d}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien.

On voit d'abord que tous les résidus de $\Theta(t)$ à l'intérieur du polygone $R_0$ doivent être nuls; ces conditions sont équivalentes aux premières conditions de Briot et Bouquet. Soit, d'autre part, $\theta(t)$ une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré un; l'intégrale $\int_{R_0} I(t)\,\theta(t)$ prise le long du contour de $R_0$ aura tous ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires, si $I(t)$ est une fonction fuchsienne, de sorte que la somme des résidus de $I(t)\,\theta(t)$ à l'intérieur de $R_0$ devra être nulle. Comme il existe $p$ fonctions thêtafuchsiennes holomorphes de degré un, on obtient ainsi $p$ conditions nouvelles; ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes, mais il est aisé de démontrer que, si elles sont remplies, on peut mettre $I(t)$ sous la forme

$$I(t) = F(t) + \lambda_1 G_1(t) + \ldots + \lambda_p G_p(t),$$

où $F(t)$ désigne une fonction fuchsienne, $\lambda_i$ une constante et où l'on a posé

$$G_i(t) = \int \theta_i(t)\, dt.$$

Il suffira donc d'exprimer que l'on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0;$$

l'auteur considère, à cet effet, $p$ fonctions thêtafuchsiennes du premier degré $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_p(t)$ n'ayant chacune à l'intérieur du polygone $R$ qu'un pôle

double, les $p$ pôles doubles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant pris arbitrairement. En exprimant que les $p$ intégrales

$$\int_{B_0} I(t)\,\zeta_i(t)\,dt$$

sont nulles, on est conduit aux $p$ équations

$$\lambda_1\theta_1(\beta_i) + \ldots + \lambda_p\theta_p(\beta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

qui n'admettent pas d'autres solutions que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0,$$

si l'on choisit les $p$ quantités arbitraires $\beta_i$ de façon à ne pas annuler le déterminant de ces $p$ équations.

En revenant aux variables primitives $x, y$, M. Humbert énonce le théorème suivant, qui est la conclusion de son travail :

« Soient $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de genre $p$ ; $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de $x$ et de $y$ ; $G_1, G_2, \ldots, G_p$, $p$ intégrales abéliennes de première espèce distinctes; $H_1, H_2, \ldots, H_p$, $p$ intégrales de deuxième espèce appartenant à la courbe $f = 0$. Pour que l'intégrale $\int \varphi(x, y)\,dx$ se réduise à une fonction rationnelle de $x$ et de $y$, il faut et il suffit :

» 1° Que cette intégrale n'ait pas de période polaire;

» 2° Que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales

$$\int \varphi(x, y)\,G_i(x)\,dx$$

soit nulle;

» 3° Que la somme des périodes polaires de chacune des intégrales

$$\int \varphi(x, y)\,H_i(x)\,dx$$

soit nulle. »

Une Note du Rédacteur nous apprend que les résultats de M. Humbert avaient déjà été obtenus depuis longtemps par M. Weierstrass comme corollaire du théorème sur la réduction d'intégrales abéliennes à une somme d'intégrales normales des trois espèces. D'ailleurs, on s'aperçoit aisément que les fonctions fuchsiennes ne jouent qu'un rôle secondaire dans le Mémoire de M. Humbert, et que leur emploi ne constitue au fond qu'un changement de notations. Ce qui caractérise, en effet, cette méthode, c'est qu'au lieu de considérer la surface T de Riemann et d'intégrer le long des coupures qui la transforment en une surface simplement connexe, on commence par appliquer cette surface sur un polygone fuchsien et l'on intègre ensuite le long du contour de ce polygone.

*Stieltjes* (*T.-J.*). — Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$.

Table des valeurs de $S_k$ avec 32 décimales, jusqu'à $k = 70$.

*Weingarten*. — Sur la théorie des potentiels de surface. (303-309).

Note relative à la façon dont se comportent les dérivées secondes du potentiel

d'une masse solide sur un point quand on s'approche de la surface qui limite cette masse, soit en venant de l'intérieur, soit en venant de l'extérieur.

*Poincaré* (*H.*). — Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. (310-312).

Réponse à un article de M. Thomé, intitulé : *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen,* publié dans le tome 101 du *Journal de Crelle.*

*Kœnigs* (*G.*). — Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. (313-338).

Soit une surface ($u$) dépendant de $n+1$ paramètres arbitraires

$$z = \varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = \varphi(x, y \mid u);$$

la condition pour que cette surface touche la surface infiniment voisine s'exprime par l'évanouissement d'une certaine forme des différentielles

$$\mathrm{M}(u \mid du) = 0.$$

De même, si l'on considère une courbe gauche dépendant de $n+1$ paramètres, il existe une forme des différentielles qui, égalée à zéro, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe rencontre la courbe infiniment voisine. Cette forme $\mathrm{M}(u \mid du)$, dont l'évanouissement exprime la condition de contact dans le cas des surfaces et la condition de rencontre dans le cas des courbes, peut être appelée *forme fondamentale* pour le système d'éléments considérés. L'objet principal du Mémoire de M. Kœnigs est l'étude des deux problèmes suivants, qu'il résout complètement :

« 1° Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes une forme de différentielles peut-elle être la forme fondamentale considérée? Construire le type général de ces formes.

» 2° Sachant qu'une forme $\mathrm{M}(u \mid du)$ peut jouer le rôle de forme fondamentale, trouver tous les systèmes d'éléments qui l'admettent en effet pour forme fondamentale. »

Considérons d'abord une surface

$$z = \varphi(x, y \mid u);$$

la forme fondamentale $\mathrm{M}(u \mid du)$ est le résultat de l'élimination de $x$ et $y$ entre les trois équations

$$\boxed{\varphi, du} = 0, \qquad \boxed{p, du} = 0, \qquad \boxed{q, du} = 0,$$

où l'on pose, pour abréger,

$$\boxed{\theta, t} = \frac{d\theta}{du_1} t_1 + \frac{d\theta}{du_2} t_2 + \ldots + \frac{d\theta}{du_{n+1}} t_{n+1};$$

si, dans cette forme, on remplace $du$ par $t$ et qu'on y regarde les $u_i$ comme

des constantes données, on a une relation homogène entre $(n+1)$ variables, $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ qu'on peut regarder comme l'équation d'une surface dans un espace à $n$ dimensions. Si l'on convient d'employer le langage de la Géométrie à $n$ dimensions, les propriétés caractéristiques de la forme $M(u \mid t)$ se présentent de la manière la plus nette. En effet, l'équation $M(u, t) = 0$ résulte évidemment de l'élimination de $x$ et $y$ entre les trois équations

$$\boxed{\varphi, t} = 0, \qquad \boxed{p, t} = 0, \qquad \boxed{q, t} = 0,$$

dont la première

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} t_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}} t_{n+1} = 0$$

représente un espace linéaire à $n-1$ dimensions $E^1_{n-1}$ ou plan, dépendant de deux paramètres variables $x$ et $y$. Il suit de là que :

« Dans l'espace à $n$ dimensions dont les $t$ sont les coordonnées ponctuelles, l'équation $M(u \mid t) = 0$, où les $u$ sont regardés comme constants, représente une surface $E_{n-1,2}$, dont les plans tangents sont seulement deux fois indéterminés. »

Si le plan tangent à cette surface a pour équation

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 + \ldots + T_{n+1} t_{n+1} = 0,$$

les T, ne dépendant que de deux variables, devront vérifier un système de $n-2$ relations homogènes

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0,$$

de sorte que *la forme* $M(u \mid t)$ *possède un système adjoint de* $n-2$ *formes.* Si $n+1 = 4$, les propriétés précédentes ne constituent aucune singularité, mais il n'en est plus de même si $n+1 > 4$; les formes fondamentales $M(u \mid du)$ ne peuvent être prises que parmi celles qui possèdent un système adjoint de $n-2$ formes simultanées.

Ce caractère purement algébrique n'est pas suffisant pour définir la forme $M(u \mid du)$; mais nous savons que l'équation du plan tangent à la surface $M(u \mid t) = 0$ peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} t_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}} t_{n+1} = 0.$$

Par conséquent, *le système des* $n-2$ *équations*

$$(E) \quad \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0, \quad \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$$

*doit admettre une intégrale* $\varphi(x, y \mid u) - z$ *contenant trois constantes arbitraires* $x, y, z$ *dont l'une* $z$ *est nécessairement additive.*

Inversement, si ces conditions sont remplies, la forme $M(u \mid du)$ est la forme fondamentale pour le système de surfaces $z - \varphi(x, y \mid u) = 0$, et la première question posée par M. Kœnigs se trouve ainsi complètement résolue. On voit en même temps que la recherche des systèmes de surfaces admettant la forme fondamentale $M(u \mid du)$ est ramenée à la recherche des intégrales

complètes du système (E). Si l'on part d'une première intégrale complète supposée connue, l'intégrale générale s'obtiendra par le procédé usité dans la théorie des équations aux dérivées partielles, et la discussion de ce système conduit l'auteur à la conclusion suivante :

« Si deux éléments surfaces donnent lieu à la même forme fondamentale, on peut passer de l'un à l'autre par une transformation de contact. »

Il résulte aussi de cette recherche que, si la fonction $\theta(u)$ vérifie les équations (E) soit identiquement, soit en vertu de la relation $\theta(u) = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces $(u)$ qui la vérifient touchent une courbe ou une surface fixe ou bien passent par un point fixe.

Le cas où l'élément est une courbe se ramène immédiatement au cas où l'élément est une surface par une transformation de contact et les conclusions précédentes s'appliquent encore. Si l'on appelle *formes équivalentes* les formes qui se transforment les unes dans les autres par un changement de variables, et si l'on convient de dire que les systèmes d'éléments transformables les uns dans les autres par des transformations de contact forment un groupe, ***deux systèmes d'éléments qui donnent lieu à deux formes fondamentales équivalentes appartiennent à un même groupe.***

Ainsi, quand on prend pour forme fondamentale la sphère ou la droite, on sait qu'on peut ramener la forme fondamentale à la forme

$$du_1^2 - du_2^2 + du_3^2 - du_4^2;$$

il doit donc exister une transformation de contact qui change la sphère en droite. Cette transformation est, comme on sait, une des belles découvertes de M. Sophus Lie.

Il suit de là que le cas d'un élément courbe ne diffère pas essentiellement du cas d'un élément surface. Cependant un système de surfaces ne peut pas, en général, se transformer en un système de courbes par une transformation de contact. M. Kœnigs est ainsi conduit à diviser les formes fondamentales en deux classes, les formes de la seconde classe pouvant seules convenir à un système de courbes. Les formes de cette classe se distinguent par deux caractères :

1° Un caractère algébrique; la surface $E^{\alpha}_{n-1}$ est le lieu d'un espace linéaire $E^{\alpha}_{n-2}$ et tout plan mené par l'un de ces espaces générateurs touche la surface en tous les points d'un espace linéaire à trois dimensions.

2° Un caractère transcendant; les équations (E) forment un système complet *semi-linéaire,* c'est-à-dire admettent une solution de la forme

$$\varphi(\alpha \mid u) + \beta\psi(\alpha \mid u) = \gamma,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois constantes. Les courbes

$$x = \varphi(z \mid u), \qquad y = \psi(z \mid u),$$

prises pour éléments, donnent la forme fondamentale $M(u \mid du)$.

Les derniers paragraphes du Mémoire sont consacrés à l'étude des cas où quelques-unes des équations du système adjoint sont linéaires, et du cas où la forme fondamentale est quadratique. On arrive, en particulier, à cette conclusion intéressante que les systèmes d'éléments qui donnent lieu à une forme quadratique ne peuvent contenir plus de quatre paramètres.

*Stenberg* (*E.-A.*). — Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé. (339-348).

Étude du cas spécial où l'équation de Lamé admet pour intégrales des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, appartenant à la catégorie particulière signalée par M. Mittag-Leffler. La méthode générale donnée par M. Hermite exige alors quelques modifications.

---

## COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CVII; 1888 (¹).

*Perrin.* — Sur les *criteria* des divers groupes de solutions multiples communes à deux équations. (22-24).

En s'appuyant sur le théorème général qu'il a établi dans sa précédente Communication, l'auteur calcule les *criteria* qui permettent de reconnaître si deux polynômes ont un, deux, trois ou quatre facteurs linéaires communs (ces facteurs pouvant ne pas entrer au même degré dans la composition de ces deux polynômes).

*Saint-Loup.* — Sur la représentation graphique des diviseurs des nombres. (24-26).

*Jensen.* — Observations sur une Communication récente de M. Cesaro. (81-82).

*Lemoine.* — De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. (169-171).

*Bertrand.* — Note sur le tir à la cible. (205-207).

Dans une Note précédente, M. Bertrand a indiqué l'équation des ellipses de même probabilité dans une série de tirs dont le résultat est connu. L'équation des ellipses étant

$$k^2x^2 + 2\lambda xy + k'^2y^2 = \text{H},$$

il a donné, dans une seconde Note, neuf valeurs de la constante H, telles que la probabilité pour que la balle se place dans la plus petite des ellipses correspondantes, ou en dehors de la plus grande, ou entre deux ellipses consécutives, soit toujours $\frac{1}{10}$. M. Bertrand a pu appliquer les formules aux résultats

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIV₂, p. 75.

20e Part.



fournis par 1000 épreuves faites à 200m avec dix fusils de même modèle, chaque tireur ayant tiré dix balles avec chaque fusil. L'accord de l'expérience avec la théorie s'est montré aussi satisfaisant que possible.

*De Jonquières*. — Nouvelles recherches sur la construction, par deux faisceaux projectifs, de la surface générale du troisième ordre. (209-214).

1° Construire la surface du troisième ordre, connaissant trois de ses droites (qui ne se rencontrent pas deux à deux), une autre droite s'appuyant sur deux de celles-ci et cinq points.

2° Construire la surface du troisième ordre, connaissant une de ses droites, sept points que l'on sait être situés sur une même courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce, et cinq autres points indépendants entre eux.

Dans chacun de ces deux problèmes, qui sont en un certain sens corrélatifs l'un de l'autre, les données sont équivalentes à dix-neuf conditions. La solution de ces nouveaux cas porte à six le nombre des cas de construction de la surface générale du troisième ordre, traités par M. de Jonquières (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CVI, p. 526 et 527). L'auteur donne quelques indications utiles pour la solution des cas qui n'ont pas encore été abordés.

*Perrin*. — Sur les *criteria* des divers genres de solutions multiples communes à trois équations à deux variables. (219-221).

Trois polynômes $u$, $v$, $w$ entiers en $x$, $y$, de degrés $m$, $n$, $p$, et dont le résultant est R, sont liés, ainsi que leurs dérivées partielles, par

$$\frac{1}{2}(mnp+1)(mnp+2)$$

relations, savoir

$$(1) \qquad R = R_{100}u + R_{010}v + R_{001}w + \frac{1}{2!}(R_{200}u^2 + \ldots) + \ldots,$$

et celles qu'on en déduit par différentiation. (Pour les notations, *voir* plus haut.)

De là, M. Perrin déduit que toute courbe $u$ qui passe par les points communs aux courbes $v$ et $w$ satisfait à une relation de la forme

$$u^{mnp} = Vv + Ww,$$

où V, W sont des polynômes en $u$, $v$, $w$ au plus de degrés $n(mp-1)$, $p(mn-1)$ en $x$ et $y$.

Si la relation (1) est décomposée en groupes homogènes par rapport à $u$, $v$, $w$, celui de ces groupes de moindre degré $q$ dont tous les coefficients ne sont pas nuls est toujours décomposable en $q$ facteurs linéaires, correspondant aux $q$ points communs aux trois courbes, et les divers cas possibles d'égalité de ces facteurs correspondent aux cas possibles de coïncidence des $q$ points entre eux.

*Painlevé.* — Sur les équations différentielles du premier ordre. (221-224).

L'auteur étudie les équations du premier ordre dont l'intégrale générale ne prend dans le plan qu'un nombre fini $n$ de valeurs ou, plus généralement, n'admet dans le plan que $n$ déterminations se permutant autour des points critiques qui varient avec la constante d'intégration.

Dans ce cas, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$y^n + A_1(x, c)y^{n-1} + A_2(x, c)y^{n-2} + \ldots + A_n(x, c) = 0,$$

les $A_i$ étant des fonctions de $x$ dont les points critiques sont fixes.

M. Painlevé se borne au cas où l'équation proposée est algébrique en $y$ et $y'$

$$F(y, y', x) = \Sigma y^\lambda y'^\mu B_{\lambda\mu}(x) = 0.$$

Quand les coefficients B ne présentent pas de coupure fermée, une intégrale qui, dans l'espace où elle est définie, ne prend que $n$ valeurs se permutant autour des points critiques mobiles, est définie dans tout le plan. Quels que soient, d'ailleurs, les coefficients B, cette intégrale vérifie une équation de la forme

$$f[y, y_0, (x)] = 0,$$

où $y_0$ représente une des $n$ valeurs de $y$, $f$ un polynôme de degré $mn$ en $y$ et $y_0$ respectivement.

Étudiant de plus près les divers modes de représentation de l'intégrale, M. Painlevé montre qu'il est toujours possible, et cela d'une infinité de manières, de la mettre sous la forme

$$C = R[y, y', (x)], \tag{1}$$

C désignant une constante, R une fonction rationnelle en $y$ et $y'$, dont les coefficients sont quelconques en $x$.

Mais on peut toujours choisir deux formes de l'intégrale

$$\gamma = C[y, y', (x)], \qquad \gamma' = C'[y, y', (x)],$$

telles qu'une intégrale (1) quelconque se déduise de ces deux-là par une transformation birationnelle

$$C = \varphi(\gamma, \gamma').$$

Entre $\gamma$ et $\gamma'$ il existe une relation algébrique, qui n'est définie qu'à une transformation birationnelle près

$$h(\gamma, \gamma') = 0.$$

Les intégrales $\gamma$ et $\gamma'$ établissent une correspondance rationnelle entre les deux courbes algébriques $h = 0$, $F = 0$.

*Schlesinger.* — Sur les courbes de genre un. (224-227).

Étant données deux fonctions doublement périodiques d'ordre $n$ aux mêmes périodes et aux mêmes infinis, les équations

$$x = X(u), \qquad y = Y(u)$$

représentent une courbe elliptique d'ordre $n$, à moins qu'à chaque point $(x, y)$ ne correspondent $p$ valeurs de $u$.

M. Humbert (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 1137; 1883) a avancé que, dans ce dernier cas, la courbe devait être unicursale et de degré $\frac{n}{p}$; ce qui n'a pas lieu, d'après M. Schlesinger; car les $p$ valeurs de $u$ devraient alors avoir une somme constante (à des multiples près des périodes), et l'auteur donne un exemple du contraire.

Il annonce d'ailleurs que les *Annales de Leipzig* publieront un Mémoire sur ce sujet, où sera complètement élucidée la question posée par M. Humbert.

## *Painlevé*. — Sur les équations différentielles du premier ordre. (320-323).

L'auteur se pose ce problème préliminaire : « Trouver toutes les courbes algébriques $(\alpha)$ qui correspondent rationnellement à une courbe algébrique donnée $(\beta)$ ».

On reconnaît, par des opérations purement algébriques, s'il existe de telles courbes $(\alpha)$ de genre plus grand que 1, et on les obtient algébriquement. Pour qu'il existe des courbes $(\alpha)$ de genre 1, il faut et il suffit qu'une intégrale de première espèce de $(\beta)$ se ramène aux intégrales elliptiques.

Ces propositions suffisent pour résoudre la question que M. Painlevé avait en vue : Reconnaître si l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre n'admet qu'un nombre fini (d'ailleurs inconnu) de déterminations se permutant autour des points critiques mobiles. On vérifie algébriquement que l'intégrale satisfait à ces conditions lorsque la relation $h(\gamma, \gamma') = 0$ (*voir* plus haut) est du genre $\pi$ plus grand que 1, et l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.

Le même problème, quand on suppose $\pi = 1$, est plus compliqué. On reconnaît algébriquement si les conditions sont vérifiées, et l'équation s'intègre alors par quadrature, ou bien se ramène à une équation linéaire d'ordre $p$ ($p$ étant le genre de l'équation différentielle proposée en $y$ et $y'$). Dans les deux cas, si $\pi = p$ ($\pi$ n'est jamais supérieur à $p$), l'intégrale n'a que des points critiques fixes.

L'hypothèse $\pi = 0$, qui seule échappe à la méthode, est réservée par l'auteur.

## *De Fontviolant*. — Sur les déformations élastiques dans les pièces à fibres moyennes. (383-385).

Cette Note, extraite d'un Mémoire étendu, contient une généralisation du principe de *réciprocité des déplacements* dû à M. Krohn.

Étant donné un système formé d'une pièce élastique unique ayant pour ligne moyenne une courbe plane ou gauche, ou d'un nombre quelconque de pièces de cette espèce, arbitrairement disposées dans l'espace et assemblées ou articulées entre elles, ce système pouvant d'ailleurs être ou non assujetti à des liaisons surabondantes :

1° Si une force égale à l'unité et de direction $\Delta_1$, appliquée à un point (1) d'une pièce, imprime à un point (2) un déplacement $\lambda'_2$ estimé suivant une direction $\Delta_2$, réciproquement une force 1, appliquée au point (2) suivant $\Delta_2$, imprime au point (1) un déplacement dont la projection sur $\Delta_1$ a pour valeur $\lambda'_2$.

2° Si un couple égal à l'unité et dont l'axe a une direction $\Delta_1$ appliquée à une section $D_1$ imprime à un point (2) une translation $\lambda'_2$ (estimée suivant $\Delta_2$), réciproquement une force 1, appliquée en (2) suivant $\Delta_2$, imprime à $D_1$, une rotation qui, reportée sur l'axe représentatif, a une projection sur $\Delta_1$, égale à $\lambda'_2$.

3° Si un couple unité d'axe $\Delta_1$, appliqué à une section $\Delta_1$ imprime à une section $D_1$ une rotation qui, reportée sur l'axe représentatif, a sur $\Delta_2$ une projection $\gamma_2$, réciproquement un couple unité, appliqué à $D_2$ et d'axe $\Delta_2$, imprime à $D_1$ une rotation qui, reportée sur l'axe représentatif, a pour projection sur $\Delta_1$ la même valeur $\gamma'_2$.

## *Lévy (M.)*. — Sur une propriété générale des corps solides élastiques. (414-416).

M. M. Lévy énonce et démontre un remarquable théorème qui joue, dans la théorie de l'élasticité, le même rôle que celui de Green dans la théorie du potentiel, mais dont la paternité, comme l'auteur l'a reconnu lui-même dans une séance ultérieure, appartient à M. Betti :

« Si à un corps ou à un système de corps élastiques on applique successivement deux systèmes de forces en équilibre, la somme des travaux des forces de l'un de ces systèmes pour les déplacements élastiques dus à l'autre est égale à la somme des travaux des forces de ce dernier pour les déplacements dus au premier. »

## *De Jonquières*. — Construction géométrique d'une surface du quatrième ordre à points doubles. (430-432).

Les méthodes employées par M. de Jonquières dans ses précédentes Communications peuvent être appliquées à la construction de quelques surfaces du quatrième ordre. Comme exemple, l'auteur résout le problème suivant :

Construire, à l'aide de deux faisceaux projectifs, la surface du quatrième ordre qui est déterminée par sept points doubles et six points simples, tous donnés de position.

## *Kœnigs*. — Sur le volume engendré par un contour lié invariablement au trièdre d'une courbe et, en particulier, sur une propriété des courbes de M. Bertrand. (474-476).

Le mouvement d'un contour fermé est supposé dirigé par une courbe, c'est-à-dire que le contour est lié invariablement au trièdre $Ox$, $Oy$, $Oz$, formé par la tangente, la normale principale et la binormale de cette courbe.

Si l'on désigne par A l'aire de la projection du contour fermé sur le plan $yOz$, par L et N les secteurs de révolution engendrés par le contour tournant d'un angle unité autour de $Ox$ et $Oz$, par $s$ l'arc parcouru sur la courbe directrice, par $\sigma$, $\tau$ les arcs correspondants de l'indicatrice sphérique des tangentes et de celle des binormales, on aura, pour expression du volume engendré par le contour,

$$V = As - L\tau + N\sigma.$$

En particulier, si l'on cherche à déterminer la courbe directrice de telle manière que le volume engendré soit proportionnel à l'arc de cette courbe, on trouve une courbe de M. Bertrand.

Les résultats obtenus par M. Kœnigs peuvent être étendus aux volumes engendrés par des contours déformables sous certaines conditions.

*Picard.* — Sur une classe d'équations linéaires aux dérivées partielles. (476-478).

Soit V une fonction de deux variables $x$ et $y$. Si l'on pose

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad V_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$$

et

$$f = AV^2 + A'V_1^2 + A''V_2^2 + 2BV_1V_2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1,$$

et que l'on considère l'intégrale double

$$\int\int f(V, V_1, V_2)\, dx\, dy,$$

l'équation exprimant que la variation première de cette intégrale est nulle quand V a des valeurs données sur le contour est

$$\frac{\partial f}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial V_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial V_2}\right) = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle on ne peut identifier l'équation linéaire générale

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} + fV = 0,$$

que sous certaines conditions imposées aux coefficients $a, b, c, \ldots, f$.

Cette condition consiste dans l'évanouissement d'un certain polynôme F entier par rapport aux coefficients de l'équation (1) et à leurs dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre. La relation $F = 0$ est manifestement invariante pour un changement quelconque des variables $x$ et $y$.

Quand la condition $F = 0$ est vérifiée, les coefficients A', B, A'' de la forme quadratique $f$ sont déterminés; B'', B' et A doivent seulement satisfaire à une équation aux dérivées partielles; la forme $f$ reste donc arbitraire dans une certaine mesure.

Les équations linéaires (1) jouissent alors de la propriété remarquable qui appartient à l'équation potentielle. Dans toute région du plan à contour simple où la forme est définie, il existe une seule fonction $V(x, y)$, uniforme et continue à l'intérieur d'un contour $c$ et prenant sur ce contour une succession donnée de valeurs.

M. Picard montre, sur quelques exemples, comment on peut profiter de la latitude relative laissée à la forme $f$ pour étendre le domaine où cette forme reste définie.

Il examine, en particulier, le cas où l'équation (1) se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + m^2 V = 0,$$

$m^2$ étant une constante positive. Il montre qu'une intégrale de cette équation est déterminée par ses valeurs le long d'un contour $c$, si elle reste uniforme et

continue à l'intérieur de ce contour et si, pour cette courbe fermée $c$, la distance minima de deux tangentes extrêmes parallèles à une direction donnée est moindre que $\frac{\pi}{m}$ $\left(\right.$le cas le plus simple est celui d'un cercle de rayon moindre que $\left.\frac{\pi}{2m}\right)$.

*Boussinesq.* — Complément à la théorie des déversoirs en mince paroi qui s'étendent à toute la largeur du lit d'un cours d'eau; influence, sur le débit, des vitesses d'arrivée des filets fluides. (513-519).

Si l'on appelle $q$ le débit par unité de longueur du déversoir; $h$ la hauteur de charge; $\varepsilon$ le relèvement éprouvé par la face inférieure de la nappe déversante depuis l'arête du déversoir jusqu'à la section contractée; $-n\rho g(h-\varepsilon)$ l'excédent de la pression exercée sous la nappe déversante sur la pression atmosphérique; $\eta$ la hauteur de la section contractée; on trouve, pour la vitesse V du fluide en un point quelconque de la section contractée situé à une hauteur $z$ au-dessus du seuil,

$$V = \sqrt{2g(h-\varepsilon)(1+n)}\,\frac{R_0}{R_0+z-\varepsilon},$$

et pour $q$, $\eta$, $R_0$, les valeurs

$$q = mh\sqrt{2gh}, \qquad \eta = [1-k^2(1+n)](h-\varepsilon), \qquad R_0 = \frac{k}{1-k}\eta,$$

où l'on a posé

$$k = \frac{R_0}{R_0+\eta},$$

$$m = k\sqrt{1+n}[1-k^2(1+n)]\frac{\log k}{k-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et $k$ étant donné en fonction de $n$ par l'équation transcendante

$$\left[\frac{1}{k^2(1+n)}-1\right]^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-k}+\frac{1}{\log k}\right).$$

Ces résultats, indiqués par M. Boussinesq dans trois Communications antérieures (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* octobre 1887), supposent négligeables les petites vitesses déjà acquises dans la section d'amont dont la surface est à la hauteur $h$ au-dessus du seuil. Quand on tient compte de ces vitesses, les formules précédentes doivent subir des corrections que l'auteur fait connaître dans la Note actuelle.

*Cesaro.* — Sur une récente Communication de M. M. Lévy. (520-522).

M. Cesaro signale, entre autres conséquences du théorème de Betti récemment retrouvé par M. M. Lévy (*voir* plus haut), l'extension aux milieux à $n$ dimensions de la formule de Laplace relative à la propagation du son.

*Bertrand.* — Généralisation d'un théorème de Gauss. (537-538).

Quel que soit le corps attirant, la valeur moyenne du potentiel aux différents points d'une sphère est égale au potentiel relatif au centre de cette sphère.

Ce théorème de Gauss suppose la sphère extérieure au corps attirant.

Si la sphère enveloppe le corps attirant, la valeur moyenne du potentiel est égale au quotient de la masse attirante par le rayon de la sphère.

Si la sphère coupe le corps attirant, la valeur moyenne du potentiel est égale au potentiel, sur le centre, de la partie extérieure de la masse, plus la masse intérieure divisée par le rayon.

*Boussinesq.* — Complément de la théorie des déversoirs en mince paroi : influence, sur le débit, des vitesses d'arrivée des filets fluides. Applications. (538-542).

*Callandreau.* — Énergie potentielle de la gravitation d'une planète. (555-557).

L'objet de cette Note est de démontrer que l'énergie potentielle de la gravitation d'une planète (c'est-à-dire le travail accompli par l'attraction pour amener les molécules de l'infini à leurs positions actuelles) peut être calculée à très peu près quand on connaît les dimensions de la planète, sa masse et la vitesse angulaire de rotation, sans faire intervenir la loi des densités internes.

Avec les notations consacrées en Astronomie et en posant comme M. Radau $\eta = \frac{a\varepsilon'}{\varepsilon}$, M. Callandreau trouve, pour expression de cette énergie potentielle,

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{M^2}{a_1}\left[1 + \frac{1}{5}(1 + \eta_1)\right] + \frac{1}{S_0}\,\frac{16\pi^2}{9}\int_0^{a_1} D^2\eta^2\,da^5.$$

Comme on admet que $\eta$ décroît avec le rayon de la courbe, il est facile, connaissant sa valeur à la surface de la Terre $\eta_1 = 0{,}54$, de constater que le terme de correction ne dépasse pas $\frac{1}{73}$. On a donc approximativement

$$W = \frac{M^2}{a_1}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\eta_1\right) = 0{,}654\,\frac{M^2}{a_1}.$$

*Picard.* — Sur la transformation de Laplace et les équations linéaires aux dérivées partielles. (594-597).

La transformation de Laplace relative aux équations linéaires à une seule variable peut être étendue aux équations linéaires aux dérivées partielles

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0.$$

Le cas le plus intéressant est celui où A, B, ..., F sont linéaires en $x$ et $y$. On doit chercher les solutions de la forme

$$\int\!\!\int e^{zx} e^{z'y} f(z, z')\,dz\,dz',$$

en déterminant convenablement $f$ et en choisissant, d'une manière appropriée, le domaine de l'intégration.

On transforme, en intégrant par parties, chacune des dérivées et leurs produits par $x$ et $y$, en supposant que

$$z^{\alpha} z'^{\beta} e^{zx} e^{z'y} f(z, z') \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

s'annule le long du contour, qui doit être choisi *ad hoc*.

On est ainsi conduit, pour déterminer $f$, à l'équation linéaire du premier ordre

$$P \frac{\partial f}{\partial z} + Q \frac{\partial f}{\partial z'} + R f = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions quadratiques de $z$ et $z'$, et dont l'intégration revient à celle de l'équation ordinaire

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{Q}{P},$$

complètement étudiée dans des cas assez nombreux.

Un exemple très général du cas où la méthode de Laplace aboutit est fourni par l'équation

$$(ax + by) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a'x + b'y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + (a''x + b''y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Cette méthode conduit alors à deux types distincts d'intégrales renfermant chacune une fonction arbitraire. M. Picard montre comment le calcul doit être conduit pour l'équation d'Euler et de Poisson

$$(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

qui est un cas particulier de la précédente.

Un autre exemple où la transformation s'applique encore avec succès correspond au cas où les coefficients A, B, C sont des constantes.

## *Stieltjes*. — Sur l'équation d'Euler. (617-618).

L'auteur fait connaître une nouvelle manière de représenter l'intégrale de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} \qquad \left(\begin{array}{l} X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 \\ Y = a_0 y^4 + 4 a_1 y^3 + 6 a_2 y^2 + 4 a_3 y + a_4 \end{array}\right),$$

savoir

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 - 2C \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + C & a_3 \\ xy & a_2 - 2C & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, on voit directement que, si l'on détermine C par l'équation

du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2C \\ a_1 & a_2 + 2C & a_3 \\ a_2 - 2C & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

le premier membre de l'intégrale devient un carré parfait, et que cette intégrale peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + C \\ xy & a_2 - 2C & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi les trois substitutions linéaires qui changent en elle-même la différentielle elliptique. Si l'on fait $x = y$, le premier membre de l'équation précédente devient un polynôme du second degré en $x$, qui ne diffère que par un facteur constant de $\sqrt{H + CX}$, H étant le hessien de X.

Réciproquement, si l'on connaît un polynôme $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ proportionnel à $\sqrt{H + CX}$,

$$\alpha xy + \beta(x + y) + \gamma = 0$$

sera l'une des substitutions qui changent en elle-même $\dfrac{dx}{\sqrt{X}}$.

*Stieltjes.* — Sur la réduction de la différentielle elliptique à la forme normale. (651-653).

La réduction de la différentielle elliptique

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \qquad (X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4),$$

à l'aide d'une substitution linéaire, peut être représentée comme il suit.

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - Sy - T}}$$

est

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & x & 0 & \frac{1}{2}y & -yx \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & C \\ x & 0 & 0 & -2 & C & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2} & C & a_1 & a_2 & a_3 \\ -xy & C & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

C étant la constante arbitraire.

Si l'on détermine C par l'équation

$$a_0 C^4 - 4a_1 C^3 + 6a_2 C^2 + 8a_3 C + a_4 = 0.$$

le premier membre de l'intégrale est un carré parfait, et cette intégrale se réduit à

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ x & 0 & 0 & -2 & C \\ 0 & 0 & -2 & a_0 & a_1 \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2} & C & a_1 & a_2 \\ -xy & C & 0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi les quatre substitutions linéaires correspondant aux quatre valeurs de C.

*Cosserat.* — Sur les surfaces de singularités des systèmes de courbes construits avec un élément donné. (653-656).

On sait qu'à tout complexe de droites est attachée une surface de singularités dont l'étude est du plus haut intérêt. On peut de même associer à chacun des systèmes de courbes construits avec un élément donné une surface de singularités.

Cette surface, que M. Cosserat définit analytiquement, jouit d'une propriété géométrique qui peut lui servir de définition :

Si l'on considère un complexe de courbes, les courbes de ce complexe, passant par un point P de l'espace, forment une surface à point conique $\Sigma$; le lieu du point P, tel que l'une des courbes soit une ligne double de $\Sigma$, est la surface de singularités; la courbe qui forme la ligne double est une courbe singulière.

Au lieu de considérer un complexe $S_3$ ou système triplement indéterminé de courbes, on peut considérer des systèmes $S_n$ d'indétermination quelconque. La définition précédente s'étend à tous les systèmes.

Les surfaces de singularités des différents systèmes présentent entre elles une liaison indiquée par les théorèmes suivants :

« 1° La surface de singularités d'un système $S_n$ contenu dans le système $S_{n+1}$ est circonscrite à la surface de singularités de $S_{n+1}$.

» 2° La surface de singularités d'un système $S_n$ contenu dans le système $S_{n+2}$ est tangente en un nombre limité de points à la surface de singularités de $S_{n+2}$. »

Ces théorèmes peuvent servir à la recherche des surfaces de singularités, comme l'auteur le montre en considérant les systèmes linéaires de cercles.

*Guccia.* — Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier. (656-658).

Expression générale du nombre des intersections de deux courbes algébriques confondues en un point singulier.

*Resal.* — Essai sur la théorie du ressort Belleville. (713-718).

*Painlevé.* — Sur les équations différentielles du premier ordre. (724-726).

M. Painlevé revient, en la posant dans des termes un peu différents, sur la question qu'il a déjà traitée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de juillet 1888 :

Reconnaître si l'intégrale de l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0$$

n'admet qu'un nombre *donné* $n$ de déterminations se permutant autour de points critiques mobiles.

On peut, par des opérations purement algébriques, reconnaître si l'intégrale d'une telle équation ne prend que $n$ valeurs autour des points critiques mobiles; l'équation s'intègre alors algébriquement, ou par quadrature, ou se ramène à une équation de Riccati. Le genre de la relation entre les constantes intégrales est plus grand que 1 dans le premier cas, égal à 1 dans le deuxième, nul dans le troisième.

Plusieurs des résultats, obtenus par M. Painlevé pour les équations du premier ordre, s'étendent aux équations d'ordre supérieur. Étant donnée, par exemple, l'équation du deuxième ordre (entière en $y, y', y''$),

$$F[y'', y', y, (x)] = 0,$$

l'intégrale générale, supposée ne prendre que $n$ valeurs autour des points critiques mobiles, satisfait à une équation

$$y^n + R_1[y''_0, y'_0, y_0, (x_0), (x)]y^{n-1} + \ldots + R_n[y''_0, y'_0, y_0, (x_0), (x)] = 0,$$

où les $R_i$ sont uniformes en $y''_0, y'_0, y_0$. Elle vérifie également des relations de la forme

$$r[y'', y', y, (x)] = \text{const.},$$

$r$ étant uniforme en $y'', y', y$. On peut choisir trois relations particulières $r' = \gamma'$, $r'' = \gamma''$, $r''' = \gamma'''$ liées par une équation algébrique

$$h(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 0$$

et telles que $r$ soit fonction uniforme de $r', r'', r'''$.

## *Gilbert.* — Groupement et construction géométrique des accélérations dans un solide tournant autour d'un point fixe. (726-729).

On sait que le lieu des points d'égale accélération est un ellipsoïde ayant pour centre le point fixe O. Tous ces ellipsoïdes étant homothétiques, il suffit de considérer l'ellipsoïde E correspondant à l'accélération 1. Voici comment on utilisera cet ellipsoïde pour construire l'accélération d'un point M de sa surface.

On mènera le plan tangent en M à l'ellipsoïde, et l'on considérera le système de trois demi-diamètres conjugués OL, OI, OH dont les deux premiers OL et OI sont l'accélération angulaire et l'axe instantané. On projettera ces trois demi-diamètres sur la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent, et l'on portera ces projections à partir de O respectivement sur les trois directions principales. La résultante prise en sens contraire donne la direction de l'accélération de M.

*Appell.* — Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires. (776-778).

Pour qu'une équation différentielle d'ordre $n$

$$\psi(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

algébrique et entière par rapport à une fonction $y$ de $x$ et à ses dérivées, admette une intégrale générale de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n+1} y_{n+1},$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ désignent $n+1$ fonctions de $x$ linéairement indépendantes et $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ autant de constantes liées par une relation algébrique entière

$$\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) = 0,$$

il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\lambda$ de $x$, telle que l'expression

$$\frac{d\psi}{dx} - \lambda\psi$$

se décompose en deux facteurs dont l'un soit linéaire et homogène en $y, y', y'', \ldots, y^{(n+1)}$.

*Gilbert.* — Sur les accélérations des points d'un solide tournant autour d'un point fixe et sur les centres de courbure des trajectoires. (830-831).

La composante tangentielle de l'accélération du point M s'obtient en multipliant le rayon vecteur de ce point par la projection de l'accélération angulaire sur la normale au cône que décrit ce rayon.

De là résulte que le lieu des points du corps dont l'accélération tangentielle est nulle est un cône du second degré. Si un angle droit, ayant son sommet au point fixe, se déplace de façon que son plan passe toujours par l'axe instantané et que l'un de ses côtés décrive le plan normal à l'accélération angulaire, l'autre côté décrira le cône en question.

L'auteur donne ensuite le moyen de construire le centre de courbure de la trajectoire décrite par un point du corps, en s'appuyant sur ce théorème :

« Tous les points du corps situés sur une droite passant par le point fixe ont les centres de courbure de leurs trajectoires sur une même droite. »

*Frolov.* — Sur les égalités à deux degrés. (831-832).

Cette Communication a trait aux propriétés des groupes de $n$ nombres, dont les premières et les secondes puissances donnent des sommes respectivement égales

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2.$$

L'auteur annonce qu'il est en possession d'une méthode pour former de pareilles égalités au moyen de simples identités ou par combinaisons données,

et d'une règle pour répartir $2n^2$ nombres consécutifs d'une progression arithmétique quelconque.

*Caspary*. — Sur une manière d'exprimer, au moyen des fonctions thêta d'un seul argument, les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont un est composé des deux autres. (859-862).

Dans son Mémoire sur la rotation d'un corps, Jacobi a exprimé les neuf coefficients d'un système orthogonal au moyen des fonctions thêta d'un seul argument : c'est de ces expressions qu'il a déduit la solution du problème de la rotation d'un solide qui n'est sollicité par aucune force.

M. Caspary, dans ses recherches générales sur les fonctions thêta, a reconnu que le résultat obtenu par Jacobi peut se déduire des identités absolues. En appliquant à ces identités les transformations du second degré relatives aux fonctions thêta, il est arrivé au théorème suivant sur les coefficients de trois systèmes orthogonaux dont l'un est composé au moyen des deux autres.

Si l'on pose

$$2\gamma c_{11} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2, \qquad 2i\gamma c_{12} = +\gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2,$$
$$2i\gamma c_{21} = \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2, \qquad 2\gamma c_{22} = -\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 - \gamma_{22}^2,$$
$$i\gamma c_{31} = \gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}; \qquad \gamma c_{32} = -\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22};$$
$$i\gamma c_{13} = +\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22},$$
$$\gamma c_{23} = -\gamma_{11}\gamma_{12} + \gamma_{21}\gamma_{22}, \qquad \gamma = \gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}\gamma_{21},$$
$$\gamma c_{33} = -\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21};$$

on voit aisément que les neuf coefficients $c_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$ représentent les coefficients d'un système orthogonal. Il en sera de même des neuf coefficients $a_{mn}$ et des neuf $b_{mn}$ obtenus en remplaçant dans les relations précédentes $\gamma_{k\lambda}$, $\gamma$, $c_{mn}$ respectivement par $\alpha_{k\lambda}$, $\alpha$, $a_{mn}$, puis par $\beta_{k\lambda}$, $\beta$, $b_{mn}$.

Si l'on fait ($w$, $x$, $y$, $z$ étant des arguments et $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$ des fonctions quelconques)

$$\alpha_{11} = A_1\,\vartheta_3(w + x, q^2), \qquad \alpha_{21} = A_2\,\vartheta_3(w - x, q^2),$$
$$\alpha_{12} = A_1\,\vartheta_2(w + x, q^2), \qquad \alpha_{22} = A_2\,\vartheta_2(w - x, q^2),$$
$$\beta_{11} = B_1\,\vartheta_3(y + z, q^2), \qquad \beta_{21} = B_2\,\vartheta_3(y - z, q^2),$$
$$\beta_{12} = B_1\,\vartheta_2(y + z, q^2); \qquad \beta_{22} = B_2\,\vartheta_2(y - z, q^2),$$

et qu'on établisse entre les $\alpha_{k\lambda}$, $\beta_{k\lambda}$, $\gamma_{k\lambda}$ les relations

$$\gamma_{k\lambda} = \alpha_{k1}\beta_{\lambda 2} - \alpha_{k1}\beta_{\lambda 2} \qquad (k, \lambda = 1, 2),$$

on arrive, en posant

$$w + x = 2u_1, \qquad w - x = 2u_2, \qquad y + z = 2v_1, \qquad y - z = 2v_2,$$

et par l'emploi des transformations du second degré, à cette expression des $\gamma_{k\lambda}$

$$\gamma_{k\lambda} = A_k B_\lambda\,\vartheta_1(u_k + v_\lambda)\,\vartheta_1(u_k - v_\lambda).$$

Alors le système orthogonal $c_{mn}$ se trouve composé au moyen des systèmes

$a_{mn}$, $b_{mn}$ de la manière suivante

$$c_{mn} = a_{m1}b_{n1} + a_{m2}b_{n2} + a_{m3}b_{n3} \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

et les $c_{mn}$ sont exprimés au moyen de la seule fonction impaire $\mathfrak{S}_1$.

*Goursat.* — Sur les invariants des équations différentielles. (898-900).

Après avoir rappelé que, depuis les recherches de M. Halphen sur les invariants différentiels des équations linéaires, divers géomètres (MM. R. Liouville, Appell, etc.) ont étendu la notion d'invariants différentiels à certaines équations, pour des catégories spéciales de transformations, M. Goursat fait remarquer que l'existence de ces invariants peut être démontrée d'une manière générale.

Les considérations, empruntées à M. Lie (*Theorie der Transformationsgruppen*), par lesquelles il établit cette proposition pour toutes les équations différentielles ordinaires, peuvent être étendues aux systèmes de pareilles équations et même d'équations aux dérivées partielles, ainsi qu'à la théorie des formes de différentielles et des paramètres différentiels.

*Caspary.* — Sur l'application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation. (901-903 et 937-938).

Cas d'un solide qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. — Cas d'un solide pesant de révolution.

*Guccia.* — Théorème concernant les courbes algébriques planes. (903-904).

Soit $f = 0$ l'équation d'une courbe algébrique plane dont le premier membre renferme linéairement des paramètres indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Si l'on désigne par $p_f$ le genre d'une quelconque des courbes $f$, par $p_{ff}$ le genre de toute courbe

$$f_r f_s + f_t f_u = 0,$$

où $f_r, f_s, f_t, f_u$ sont des polynômes $f$ linéairement indépendants, déterminés par quatre systèmes des valeurs des paramètres, et, si l'on appelle D le nombre des intersections, variables avec les $\lambda$, des deux courbes $f = 0$, on a

$$D + 2p_f - p_{ff} = 1.$$

*Picard.* — Sur une proposition générale concernant les équations aux dérivées partielles du second ordre. (939-941).

Étant donnée l'équation linéaire

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions continues de $x$ et $y$ dans les portions du plan que l'on considère, et un système $(x_0, y_0)$ de valeurs de $x$ et $y$ pour lequel $b^2 - ac < 0$, si l'on trace dans un certain domaine autour de ce point une

courbe fermée $c$, il ne pourra exister deux intégrales uniformes et continues dans l'aire limitée par $c$ et prenant sur cette courbe les mêmes valeurs.

En second lieu, il existe effectivement autour de $(x_0, y_0)$ un certain domaine, tel qu'une intégrale de l'équation sera entièrement déterminée par ses valeurs le long d'une courbe fermée $c$ appartenant à ce domaine. Ce second point, le plus intéressant des deux, est établi par M. Picard à l'aide d'un développement en série de l'intégrale qui avait déjà servi à M. Schwarz pour démontrer la même proposition relativement à l'équation moins générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0.$$

## *Du Bois-Reymond* (*P.*). — Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positifs. (941-944).

Le théorème de M. Jensen, savoir que « la série à termes positifs $\Sigma u_p$ est convergente (divergente) si, à partir d'une certaine valeur de $n$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \begin{cases} > \mu, \\ < 0, \end{cases}$$

$a_n$ et $\mu$ étant positifs, et la série $\sum \frac{1}{a_n}$ divergente », est compris, quant à la convergence, dans un théorème de M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 76, p. 61).

La forme que M. Jensen donne à son critère de divergence donne lieu à cette question : Existe-t-il une fonction $\lambda_p$, telle que pour

$$1 - \frac{u_{p+1}}{u_p} > \lambda_p$$

la série $\Sigma u_p$ soit toujours convergente? M. du Bois-Reymond démontre qu'une telle fonction n'existe pas.

## *Raffy*. — Sur la rectification des cubiques planes unicursales. (944-946).

L'arc d'une courbe unicursale s'exprime par une intégrale hyperelliptique dont le genre dépend de quatre sortes de singularités, dont M. Raffy détermine la nature et l'effet.

La connaissance de ces singularités permet de caractériser toutes les cubiques unicursales dont l'arc est de genre inférieur à trois.

1° *Genre* 2. — *a.* Rebroussement à distance finie. *b.* Contact avec la droite de l'infini. *c.* Asymptote double.

2° *Genre* 1. — *a.* Deux points d'inflexion à tangente isotrope, situés à distance finie. *b.* Rebroussement à distance finie et contact avec la droite de l'infini; *c.* Inflexion parabolique ou rebroussement parabolique à l'infini. *d.* Passage par les points cycliques.

3° *Genre zero.* — *a.* Courbes représentées en coordonnées rectangulaires par

le système

$$x = t\frac{t^3 - 3t}{t-c}, \qquad y = t\frac{3t^2 - 1}{t-c}.$$

*b*. Paraboles semi-cubiques, obliques ou droites. *c*. Cissoïdes, obliques ou droites. *d*. Lignes de courbure (E) de la surface minima d'Enneper.

Ces lignes de courbure (E) sont les seules cubiques unicursales dont la courbure soit une fonction rationnelle des coordonnées.

Les seules cubiques unicursales dont l'arc soit algébrique sont les courbes (E) et les développées des paraboles du second degré.

*De Saint-Germain*. — Sur l'extension à certains points de l'une des propriétés mécaniques du centre de gravité. (946).

*Gilbert*. — Sur les accélérations d'ordre quelconque d'un corps solide qui a un point fixe. (946-947).

Soient

$\omega$ l'axe instantané;
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les accélérations angulaires des divers ordres d'un point du solide;
$\rho$ le rayon vecteur;
$v$ la vitesse de ce point;
$j_1, j_2, \ldots, j_n$ les accélérations des divers ordres.

On a, en désignant par un point un produit géométrique, la relation

$$\omega.\dot{j}_n + n\lambda_1.\dot{j}_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda_2.j_{n-2} + \ldots + \lambda_n.v = 0,$$

qui, pour $n = 1$, se réduit à

$$\omega.\dot{j}_1 + \lambda_1.v = 0.$$

On a aussi

$$\rho.\dot{j}_n + (n+1)\,v.\dot{j}_{n-1} + \frac{(n+1)n}{2!}\dot{j}_1.\dot{j}_{n-2} + \ldots = 0;$$

égalité qui, pour $n = 2$, prend la forme remarquable

$$\Sigma\,\rho.mj_2 = -3\,\omega.G,$$

G étant l'axe du couple moteur.

Dans le cas d'un seul point libre, l'auteur indique la relation

$$\frac{1}{2}\frac{d^n j_p^2}{dt^n} = j_p.\dot{j}_{n+p} + nj_{p+1}.\dot{j}_{n+p-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\dot{j}_{p+2}.\dot{j}_{n+p-2} + \ldots,$$

qui, si l'on pose

$$p = -1, \qquad \dot{j}_{-1} = \rho, \qquad j_0 = v, \qquad n = 2,$$

donne le théorème du *viriel*.

*Poincaré*. — Sur la théorie analytique de la chaleur. (967-971).

En étudiant dans une Communication précédente (*Comptes rendus*, t. CIV,

p. 1754) le problème du refroidissement d'un solide homogène et isotrope, M. Poincaré avait considéré un polyèdre dont toutes les faces sont parallèles aux plans coordonnés, en faisant observer que l'on peut toujours trouver un pareil polyèdre différant d'un solide quelconque aussi peu que l'on veut. Il revient actuellement sur le cas d'un solide *convexe* pour le traiter avec une entière rigueur.

## *Picard.* — Sur un théorème relatif à l'attraction. (984-985).

Démonstration analytique d'un théorème énoncé par M. Bertrand et traité par lui au moyen de considérations géométriques.

On a une famille de surfaces fermées, telles que, si l'on couvre l'une quelconque d'entre elles d'une couche dont la densité soit en chaque point inversement proportionnelle à la distance à la surface infiniment voisine, l'attraction de cette couche sur tout point intérieur est nulle. Dans ces conditions, les surfaces extérieures à la couche seront pour elle des surfaces de niveau.

## *Bertrand.* — Remarques relatives à la Communication de M. Picard. (986-986).

Démonstration synthétique du théorème précédent.

## *Pincherle.* — Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes. (986-989).

Soit une équation différentielle linéaire

$$(1)\qquad R_m(x, y)\frac{\partial^m \varphi}{\partial y^m} + R_{m-1}(x, y)\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial y^{m-1}} + \ldots + R(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + R_0\varphi = 0,$$

dont les coefficients $R_h(x, y)$ sont des polynômes entiers (de degré $h$ en $y$ et de degré $k$ en $x$).

Pour toute valeur finie de $x$, il existe un développement en série de l'intégrale

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} p_n(x) y^n.$$

En faisant nuls les $m$ premiers coefficients $p_0, \ldots, p_{m-1}$, qui sont arbitraires, et en supposant que, pour toute valeur de $x$, $R_m(x, 0)$ soit égal à zéro, les fonctions $p_n(x)$ seront des polynômes en $x$.

Les fonctions $p_n(x)$ sont liées par une équation récurrente

$$A_0(n)p_{n+m} + A_1(n, x)p_{n+m-1} + \ldots + A_m(n, x)p_n = 0,$$

où les $A_h(n, x)$ sont des polynômes de la forme

$$A_h(n, x) = a_{hn0} + a_{hn1}x + \ldots + a_{hnk}x^k.$$

A cette équation récurrente on peut adjoindre la suivante

$$A_0(n-m)q_{n-m} + A_1(n-m+1, z)q_{n-m+1} + \ldots + A_m(n, z)q_n = M_n,$$

dont le second membre est nul si $n \geq m$, et qui définit un système de fonctions $q_n(z)$ adjointes à $p_n(x)$.

Si maintenant on forme les séries

$$S_k = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_{1nk} p_{n+m-1} + a_{2nk} p_{n+m-2} + \ldots + a_{mnk} p_n) q_n$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

on aura cette expression de $\frac{1}{z-x}$

$$(2) \qquad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{M_0} [S_1 + (z+x) S_2 + \ldots + (z^{p-1} + x z^{p-2} + \ldots + x^{p-1}) S_p],$$

qui permettra, à l'aide de la formule de Cauchy, de développer dans un certain domaine, toute fonction analytique régulière en série de polynômes $p_n(x)$, si l'équation (1) contient le paramètre $x$ au premier degré. Si cette équation contient $x$ au degré $k > 1$, la formule (2) fera connaître un développement de la forme

$$\sum_0^\infty (c_{n0} + c_{n1} x + \ldots + c_{n(p-1)} x^{n-1}) p_n(x).$$

---

Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. In-8°.

T. II; 1879.

*Donati* (*L.*). — Sur la mesure électrostatique des forces électromotrices d'induction. (1-82, 2 pl.).

*Tonelli* (*A.*). — Sur le théorème d'addition des fonctions abéliennes. (83-120).

L'auteur généralise la méthode suivie par Weber [*Ueber das Additionstheorem der Abelschen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 70, p. 193)], et résout la question suivante :

Étant donnés les $r$ systèmes de quantités

$$\begin{array}{llll} v_1^{(1)}, & v_2^{(1)}, & \ldots, & v_p^{(1)}, \\ v_1^{(2)}, & v_2^{(2)}, & \ldots, & v_p^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ v_1^{(r)}, & v_2^{(r)}, & \ldots, & v_p^{(r)}, \end{array}$$

et, au moyen des relations

$$v_h^i = \int_{c_1}^{x_1^i} du_h + \int_{c_2}^{x_2^i} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{x_p^i} du_h \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, p \\ i = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix},$$

étant déterminés par l'inversion, les $r$ systèmes de points

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_p^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_p^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ x_1^{(r)}, & x_2^{(r)}, & \ldots, & x_p^{(r)}, \end{array}$$

déterminer les $p$ points $z_1, z_2, \ldots, z_p$ où l'on a

$$w_h = \sum_1^r v_h^{(i)} = \int_{c_1}^{z_1} du_h + \int_{c_2}^{z_2} du_h + \ldots + \int_{c_p}^{z_p} du_h.$$

Puis il étudie le problème de la multiplication en supposant les systèmes des $v_h^{(i)}$ égaux entre eux.

## *Pennacchietti* (*G.*). — Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Dynamique. (121-178).

L'auteur donne une extension de la méthode de Korkine [*Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel* (*Math. Ann.*, Bd. II; 1870)] au cas du mouvement d'un point dans l'espace et lorsque les forces dépendent des coordonnées et des composantes de la vitesse. Puis, il étudie le cas où les forces sont des fonctions des seules coordonnées et donne des généralisations des résultats de Bertrand.

## *Bianchi* (*L.*). — Sur les surfaces applicables. (179-236).

Soient C, C' deux courbes; si, pour chacune d'elles, on construit la surface gauche engendrée par une droite perpendiculaire à la normale principale, s'appuyant à la courbe et faisant avec elle l'angle constant θ, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre lorsque l'on a

$$\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta}{T} = \frac{\cos\theta}{R'} + \frac{\sin\theta}{T'},$$

R, T étant les rayons de courbure et de torsion de C, et R', T' de C'.

Si, dans l'expression de l'élément linéaire d'une surface

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

les E, F, G sont des fonctions d'une seule des variables, la surface est applicable sur une surface de révolution, et les lignes qui correspondent à cette variable sont les transformées des parallèles.

Les surfaces de révolution engendrées par la rotation de cycloïdes quelconques autour de leurs tangentes aux sommets sont toutes applicables les unes sur les autres.

L'auteur donne aussi d'autres résultats importants qui se rapportent aux hélicoïdes, et leur applicabilité sur les surfaces de révolution aux surfaces ayant un système de lignes de courbure en des plans parallèles. Il démontre, par exemple, que si l'on a sur une surface un système de lignes géodésiquement parallèles, et telles que sur chacune le rapport entre la courbure de la surface et la courbure géodésique de la ligne soit constant, la surface est applicable

sur une moulure et les trajectoires orthogonales de ces lignes sont les transformées des profils. Il démontre aussi qu'entre les surfaces moulures, ayant pour profil une tractrice, il n'y a que celles trouvées par M. Dini qui soient applicables sur des surfaces de révolution.

Enfin, il résout le problème suivant : « Chercher s'il est possible de déformer une surface donnée, de manière qu'un système de lignes tracé sur elle devienne un système de lignes de courbure pour la déformée » ; problème dont un cas particulier (celui où les lignes sont des lignes de courbure de la surface donnée) a été traité par Codazzi (*Ann. de Tortolini*, 1856). Les expressions des coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la surface déformée sont les suivantes :

$$\xi = \int\left(r_2 \frac{dX}{du} du + r_1 \frac{dX}{dv} dv\right),$$

$$\eta = \int\left(r_2 \frac{dY}{du} du + r_1 \frac{dY}{dv} dv\right),$$

$$\zeta = \int\left(r_2 \frac{dZ}{du} du + r_1 \frac{dZ}{dv} dv\right),$$

X, Y, Z étant les coordonnées des points de la sphère représentative exprimées par $u$, $v$ et $r_1$, $r_2$ les rayons de courbure de la déformée, relatifs à $u$ et $v$ respectivement. Après les avoir trouvées, l'auteur en fait l'application aux surfaces gauches, aux surfaces moulures et aux surfaces de révolution.

*Gremigni (M.).* — Sur la théorie des lignes de courbure. (237-284).

Le travail est divisé en quatre Parties. Dans les deux premières, l'auteur démontre l'existence des lignes de courbure, la propriété de leurs développées et autres propriétés, entre lesquelles nous signalerons la notion de *surface des centres géodésiques des lignes de courbure d'un système.* Dans la troisième, il rassemble les propositions principales de la théorie, et les démontre au moyen de la représentation sphérique. Dans la quatrième, il établit les deux formules suivantes

$$\frac{r_{gv}}{r'_{gv}} = r_2, \qquad \frac{r_{gu}}{r'_{gu}} = r_1,$$

$r_{gu}$ et $r_1$ étant les rayons de courbure géodésique et principale correspondant à une ligne (quelconque) de courbure du système $u$ ; $r_{gv}$ et $r_2$ les quantités analogues pour le système $v$ ; $r'_{gu}$, $r'_{gv}$ les rayons de courbure géodésique des lignes sphériques correspondantes. De ces formules, il déduit ensuite les formules de M. Dini

$$(a)\qquad \begin{cases} (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{E}}{dv} - \dfrac{dr_2}{dv} = 0, \\[2ex] (r_1 - r_2)\dfrac{d\log\sqrt{G}}{du} + \dfrac{dr_1}{du} = 0; \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{E}}{dv} - \dfrac{d\dfrac{1}{r_2}}{dv} = 0, \\[2ex] \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{d\log\sqrt{G}}{du} + \dfrac{d\dfrac{1}{r_1}}{du} = 0; \end{cases}$$

enfin, il trouve l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = \left(\frac{dr_g}{du}\right)^2 du^2 + 2\frac{dr_g}{du}\left(\frac{dr_g}{dv} - \sqrt{G}\right) du\, dv + \left[G\frac{r_g^2}{\rho_u^2} + \left(\frac{dr_g}{dv} - \sqrt{G}\right)^2\right] dv^2$$

de la surface des centres géodésiques de courbure, expression que, en substituant à $u$ une certaine variable $\alpha$, il transforme en la suivante

$$d\sigma^2 = \left(\frac{dr_g}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{dr_g}{dv}\right)^2 \frac{r_{g0}^2}{\rho_u^2} dv^2,$$

dont il fait quelques applications. Dans ces formules, $\rho_u$ est le rayon de courbure ordinaire des lignes $u =$ const.

## *Bianchi* (*L.*). — Recherches sur les surfaces hélicoïdales et sur les surfaces à courbure constante. (285-340).

L'auteur appelle *surfaces complémentaires* les deux nappes de la développée d'une surface quelconque et donne, pour la complémentaire S′ d'une surface S par rapport à un système de géodésiques donné par S, la construction suivante :

Sur chaque tangente aux géodésiques du système, on prend un segment égal au rayon de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des géodésiques au point considéré. Le lieu des extrémités de ces segments est S′.

Si une surface de révolution se déforme, la série des surfaces complémentaires des déformées est constituée de surfaces applicables sur une même surface de révolution, pourvu que les systèmes de géodésiques par rapport auxquels on prend les complémentaires soient le système des déformées des méridiens.

La surface complémentaire d'une surface à courbure constante négative $-\frac{1}{A^2}$ par rapport à un système de géodésiques de première espèce est une surface à courbure constante négative $-\frac{1}{A^2}$; par rapport à un système de seconde espèce elle est une surface applicable sur la surface de rotation ayant pour méridien la courbe logarithmique; enfin, par rapport à un système de troisième espèce est une surface de rotation ayant pour méridien une *tractrice raccourcie,* c'est-à-dire une courbe que l'on obtient en projetant la tractrice sur un plan passant par l'asymptote. Particulièrement remarquable est le cas des géodésiques de seconde espèce. Dans ce cas, l'auteur obtient une surface applicable sur la surface logarithmique de rotation, et dont l'équation en coordonnées cylindriques est

$$r\theta = A\cosh\frac{z}{A}.$$

Quand on applique la surface logarithmique sur cette surface, les parallèles deviennent des chaînettes égales, pliées sur des cylindres circulaires concentriques. Il démontre ensuite que cette dernière propriété n'appartient qu'à la chaînette.

Après cela, M. Bianchi passe à traiter des surfaces hélicoïdales. La surface complémentaire d'un hélicoïde est un hélicoïde ayant même axe et même pas. L'hélicoïde complémentaire d'un hélicoïde réglé est aussi réglé et applicable

sur lui. La développée d'un hélicoïde gauche minimum est un hélicoïde possédant un système de courbes gauches du quatrième ordre ayant un point double au point à l'infini de l'axe. L'hélicoïde complémentaire d'un autre qui ait un système de lignes de courbure planes est applicable sur la surface logarithmique de rotation. L'auteur retrouve aussi les hélicoïdes remarquables de M. Dini, et en déduit une classe de surfaces ayant une différence constante entre les rayons de courbure, et dont la développée est formée par deux hélicoïdes de Dini qui ne diffèrent que par une translation suivant l'axe. Puis il démontre que la surface des centres géodésiques des lignes de courbure d'un hélicoïde est un hélicoïde ayant même axe et même pas. Cet hélicoïde, si le premier est de ceux de Dini à courbure constante négative, peut être engendré comme les hélicoïdes minima par une hélice d'un cylindre ayant pour base une chaînette, le pas de l'hélice et le sens étant seuls différents dans les deux cas. L'auteur détermine aussi la surface de révolution applicable sur cet hélicoïde. Enfin, il trouve une classe d'hélicoïdes applicables sur la surface de révolution à courbure moyenne constante. De cette classe de surfaces, il donne la construction suivante très remarquable :

On prend une sphère de rayon R et l'on en coupe un fuseau, dont l'angle soit $\alpha$; puis, on referme la surface (qui est supposée flexible et inextensible). Si l'on donne au méridien de la nouvelle surface de révolution un mouvement hélicoïdal qui ait pour paramètre

$$m = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2},$$

on obtient un hélicoïde applicable sur une surface de révolution à courbure moyenne constante, et cette courbure moyenne $\frac{1}{c}$ est donnée par la formule

$$\frac{1}{c} = \frac{4\pi}{R(2\pi - \alpha)}.$$

Tome III; 1883.

*Venturi (A.).* — Sur le mouvement perturbé des comètes. (1-67).

L'auteur apporte des modifications à la méthode de Hansen principalement dans le but d'avoir des séries plus rapidement convergentes. Il se rapporte aux équations relatives aux coordonnées polaires, données par Hansen et les transforme par des développements en séries et puis par l'introduction d'une nouvelle variable qu'il appelle *anomalie partielle*.

*Antonelli (G.-B.).* — Sur les relations indépendantes entre les coordonnées d'une forme fondamentale dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions et sur la forme normale d'une fonction homogène de ces coordonnées. (71-77).

L'auteur trouve ces relations, qui sont, comme on sait, au nombre de

$$\binom{k}{r} - r(k-r) - 1$$

pour les coordonnées d'une forme fondamentale $(k-r, r)$.

La forme normale d'une fonction des coordonnées en question est donnée par

$$f = \Phi - \frac{\sum_1^n P_s \Delta_s \Phi}{n+1} + \frac{\sum_1^n P_s^2 \Delta_s^2 \Phi}{(n+1)2n} - \ldots \pm \frac{\sum_1^n P_s^q \Delta_s^q \Phi}{(n+1)2n \ldots q(n-q+2)} \mp \ldots$$

## *Lazzeri* (*G.*). — Sur la représentation plane des surfaces développables rationnelles. (81-170).

Après avoir établi des formules analogues à celles de Cayley-Salmon pour exprimer les singularités ordinaires d'une surface développable en fonction de son ordre, de celui de son arête de rebroussement et des singularités extraordinaires, l'auteur étudie la représentation plane des développables rationnelles.

La correspondance entre les points $x_1, x_2, x_3$ de la surface et les points $\xi, \eta, \zeta$ du plan est donnée par la relation

$$\rho x_i = \Theta_i + \zeta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi},$$

les $\Theta_i$ étant des fonctions homogènes des variables $\xi, \eta$, dont l'ordre est égal à celui de l'arête de rebroussement; l'auteur expose les propriétés générales de cette représentation et puis il s'applique aux développables des sept premiers ordres. Dans un Tableau ajouté à ce Mémoire, l'auteur a réuni les valeurs des singularités de ces surfaces pour le cas où elles n'ont pas de singularités extraordinaires.

## *Rindi* (*S.*). — Sur les surfaces polaires inclinées. (175-206).

Ce sont les surfaces lieux des points dont les plans polaires (par rapport à une surface générale donnée de l'ordre $n$) font un angle donné avec les rayons vecteurs joignant leurs pôles à un point fixe. Ce travail est une extension des recherches faites par M. le général Ed. Dewulf sur les courbes planes dans son Mémoire : *Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées,* publié dans ce Recueil, 2e série, t. II; 1878. Le Mémoire de M. Rindi a été aussi publié dans ce *Bulletin* (2e série, t. IX, Ire Partie, p. 32; 1885), et c'est pourquoi nous nous dispensons d'en rendre compte avec plus de détail.

## *Volterra* (*V.*). — Sur quelques problèmes de la théorie du potentiel. (209-270).

L'auteur commence par étudier les fonctions associées, correspondantes aux potentiels indépendants d'une coordonnée, et introduit des fonctions analogues à celles de Green. Ensuite, il s'occupe de la détermination de ces fonctions. Puis, en appliquant les résultats trouvés, il étudie la distribution de l'électricité en des surfaces conductrices non homogènes. Enfin, par l'emploi des potentiels dans les espaces de plusieurs dimensions, il résout quelques problèmes relatifs à la distribution de l'électricité dans des corps conducteurs non homogènes, lorsque les potentiels sont indépendants d'une ou de plusieurs coordonnées

Tome IV; 1887.

Liste des élèves sortis de l'École Normale granducale depuis 1847 à 1862. (VII-XI).

Liste des élèves sortis de l'École Normale royale de Pise depuis 1862 à 1886. (XII-XXX).

*Sadun* (*E.*). — Sur la théorie des fonctions implicites. (3-52).

M. Sadun apporte des simplifications à la méthode rigoureuse de M. Dini (Cours autographié d'Analyse infinitésimale), et traite contemporanément, autant qu'il est possible, les deux cas, celui des variables réelles et celui des variables complexes. Nous citerons le théorème suivant :

« Si le système

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

de $m$ équations entre $n+m$ variables est satisfait par les valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$; $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$, et si dans un champ à $n+m$ dimensions, dont le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_2^0, \ldots, y_m^0)$ est un point intérieur, les $f_i$ sont des fonctions à une valeur finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, et le déterminant fonctionnel relatif aux $y_i$ est différent de zéro, ces équations définissent les $y_i$ comme autant de fonctions des $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à une valeur, finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, et ces dérivées peuvent être obtenues par le théorème de la dérivation des fonctions composées. »

*Boggio-Lera* (*H.*). — Sur la cinématique des milieux continus. (55-99).

L'auteur étudie les déformations définies par des déplacements donnés par des fonctions homogènes du second degré des coordonnées, déformations qu'il appelle *homogènes et du deuxième degré*. Une telle déformation peut être décomposée en trois autres plus simples :

1° Une déformation à potentiel de mouvement;

2° La résultante de trois torsions autour de trois droites orthogonales passant par l'origine;

3° Une flexion autour d'une droite passant par l'origine.

L'auteur entend par *flexion autour d'une droite* (axe) une déformation dans laquelle les droites qui rencontrent l'axe et lui sont perpendiculaires se réduisent à des arcs de parabole en restant chacune dans un même plan avec l'axe qui reste fixe.

Ensuite, il définit la *vitesse de flexion* d'un point, qui est le rapport entre sa vitesse dans la direction de l'axe et le carré de sa distance de l'axe. Si $u$, $v$, $w$ sont les composantes de la vitesse d'un point, les composantes de sa vitesse de flexion sont

$$\lambda = -\frac{1}{6}\Delta^2 u,$$

$$\mu = -\frac{1}{6}\Delta^2 v,$$

$$\nu = -\frac{1}{6}\Delta^2 w.$$

Puis l'auteur démontre que les molécules liquides, pour lesquelles les torsions sont stationnaires, ont aussi la flexion stationnaire.

Dans les parties du liquide où les molécules n'ont pas de flexion, et dans ces parties seules, existe toujours une certaine fonction que l'auteur définit et qu'il appelle *potentiel de rotation*. La fonction

$$\int_s \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$$

est appelée par l'auteur *vorticosité* de la courbe $s$, et les courbes

$$\frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{\mu} = \frac{dz}{\nu}$$

*lignes de flexion*. Il considère ces courbes et les surfaces engendrées par les lignes de flexion passant par les points d'une directrice quelconque. Les vorticosités des courbes tracées sur ces surfaces (surfaces de flexion) ont des propriétés analogues à celles des circulations sur les *vorticoïdes* de M. Beltrami.

Dans une masse liquide indéfinie et en repos à l'infini, le mouvement a lieu comme si chaque molécule ayant flexion induisait instantanément en chaque autre point, dans la direction de l'axe de flexion, une vitesse proportionnelle à son volume et à sa vitesse de flexion et inversement proportionnelle à la distance.

Le travail se termine par l'examen de deux cas particuliers; ceux où les lignes de flexions sont des droites parallèles, ou des cercles disposés symétriquement autour d'un axe.

## *Somigliana (Ch.).* — Sur l'équilibre d'un corps élastique isotrope limité par une ou deux surfaces sphériques. (103-172).

L'auteur résout le problème de l'équilibre d'une sphère isotrope sans employer les développements en série, en supposant connues les forces agissant sur les points du corps et supposant connus les déplacements à la surface, ou bien les forces externes.

Puis il applique la transformation par rayons vecteurs réciproques au cas d'un corps limité par deux surfaces sphériques concentriques.

Tome V; 1888.

*Bettazzi* (*R.*). — Sur la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables réelles. (3-47).

En étendant au cas des fonctions de plusieurs variables réelles la méthode donnée par M. Dini pour les fonctions d'une seule variable (*Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, Pisa, Nistri), l'auteur démontre qu'une fonction finie et continue de $n$ variables réelles, définie dans un champ fini, a dans ce champ un nombre infini de représentations analytiques.

*Bazzi* (*E.*). — Sur le déplacement des lignes de niveau que l'on observe dans un disque métallique tournant traversé par des courants voltaïques. (51-75).

Les lignes de niveau se déplacent dans le sens opposé au mouvement de rotation, et le déplacement est proportionnel à la vitesse de rotation.

*Fibbi* (*C.*). — Sur les surfaces contenant un système de géodésiques à torsion constante. (77-164, 1 pl.).

Soit $\frac{1}{T_2}$ la torsion constante des lignes $v=$ const., $T_2$ étant une fonction de $v$ seulement. On a alors

$$ds^2 = du^2 + T_2^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

$$\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

$$\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = T_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right),$$

$\varphi$ étant une fonction de $u$ et $v$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2T_2^2}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{1}{T_2^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}}{2\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right).$$

L'auteur étudie aussi une transformation de ces surfaces, qu'il appelle *transformation de Bäcklund* par son analogie avec la transformation connue des systèmes de Weingarten.

Ensuite il traite le cas de $T_2 = 1$. Les surfaces sont alors appelées par l'auteur

*surfaces asymptotiques des systèmes de Weingarten*. Il les appelle *asymptotiques cycliques* lorsque les trajectoires orthogonales des géodésiques à torsion constante sont des cercles de même rayon, *asymptotiques hypercycliques* lorsque ces trajectoires sont des courbes ayant même flexion constante. Ces surfaces se changent par une transformation de Bäcklund en d'autres qui sont respectivement de la même espèce. L'auteur donne une interprétation géométrique de la transformation de Bäcklund pour le cas où elle se réduit à la *transformation complémentaire*, et puis, il démontre que les surfaces asymptotiques sont les plus générales possibles qui contiennent un système de géodésiques à torsion constante.

*Paladini* (*B.*). — Sur le mouvement de rotation d'un corps rigide autour d'un point fixe. (167-226).

La position des axes principaux d'inertie $O(\xi, \eta, \zeta)$ relatifs au point fixe O, par rapport à trois axes orthogonaux passant par ce point et fixes dans l'espace, est donnée par les neuf quantités $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ qui entrent dans les relations

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta,$$
$$y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta,$$
$$z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta,$$

et l'on peut exprimer $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ par les angles eulériens $\theta$, $\varphi$, $\psi$. L'auteur suppose que le potentiel V des forces agissant sur le corps ait la forme

$$H_1\omega^2 + H_2\omega,$$

$H_1$, $H_2$ étant des constantes et $\omega = \cos\theta$, et que le corps soit symétrique par rapport à l'axe $\zeta$. Les intégrales du mouvement sont alors

$$t - t_0 = \int \frac{-A\,d\omega}{\sqrt{F(\omega)}},$$
$$\varphi - \varphi_0 = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)(t - t_0) - \int \frac{(Cr_0 - g\omega)\,d\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{F(\omega)}},$$
$$\psi - \psi_0 = \int \frac{(Cr_0\omega - g)\,d\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{F(\omega)}},$$

A, A, C étant les trois moments d'inertie, $g$ la constante de l'intégrale des aires relatif à l'axe $z$, $r_0$ la composante de la vitesse angulaire de rotation dans la direction de l'axe de symétrie, et

$$F(\omega) = [2A(V + h) - ACr_0^2](1 - \omega^2) - (Cr_0\omega - g)^2,$$

où $h$ est la constante des forces vives. L'auteur réduit la seconde et la troisième de ces quadratures aux suivantes

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(Cr_0 - g)\,d\omega}{(1 - \omega)\sqrt{F(\omega)}},$$
$$\psi_2 = \frac{1}{2}\int \frac{(Cr_0 + g)\,d\omega}{(1 + \omega)\sqrt{F(\omega)}},$$

et distingue deux cas :

1° L'équation $F(\omega) = 0$ a toutes ses racines réelles;
2° Elle a deux racines réelles et deux imaginaires.

Dans le premier cas, si $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ sont les racines et si l'on a

$$a_1 < \omega < a_2 \quad \text{et} \quad -2AH_1 = L < 0,$$

posons

$$k^2 = \frac{(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)}{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)},$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{-L(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)},$$

$$u = -\frac{m}{A}(t - t_0);$$

supposons aussi (puisque nous nous bornons ici à ce cas) que les racines $a_1$ et $a_2$ soient entre 1 et $-1$ et les $a_3$, $a_4$ entre 1 et $+\infty$, et posons

$$\frac{(a_2 - a_1)(1 - a_4)}{(a_4 - a_2)(1 - a_1)} = -k^2 \operatorname{sn}^2(i\varpi_1 + K),$$

$$\frac{(a_2 - a_1)(1 + a_4)}{(a_4 - a_2)(1 + a_1)} = -k^2 \operatorname{sn}^2 i\varpi_2.$$

En introduisant aussi la constante $i\tau$ définie par la relation

$$\frac{a_4 - a_2}{a_1 - a_2} = \sin^2 i\tau,$$

on obtient, après des calculs,

$$\cos\theta = \frac{\Theta(i\varpi_2 + i\tau)\Theta(i\varpi_2 - i\tau)\Theta_1(u - i\varpi_1)\Theta_1(u + i\varpi_1) + \Theta_1(i\varpi_1 + i\tau)\Theta_1(i\varpi_1 - i\tau\Theta(u + i\varpi_2)\Theta(u - i\varpi_2)}{H_1(i\varpi_2 + i\varpi_1)H_1(i\varpi_2 - i\varpi_1)H(u + i\tau)H(u - i\tau)},$$

et

$$\varphi = \Phi u + \varphi_0 + \varphi', \qquad \psi = \Psi u + \psi_0 + \psi',$$

étant

$$\Phi = -\frac{d}{d\tau}[\pi(i\tau, i\varpi_1 + K) + \pi(i\tau, i\varpi_2)] + \frac{d\log\Theta_1(i\varpi_1)}{d\varpi_1} + \frac{d\log\Theta(i\varpi_2)}{d\varpi_2} + \frac{A - C}{m} r_0,$$

$$\Psi = \frac{d}{d\tau}[\pi(i\tau, i\varpi_1 + K) - \pi(i\tau, i\varpi_2)] - \frac{d\log\Theta_1(i\varpi_1)}{d\varpi_1} + \frac{d\log\Theta(i\varpi_2)}{d\varpi_3},$$

$$\varphi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u + i\varpi_1)\Theta(u + i\varpi_2)}{\Theta_1(u - i\varpi_1)\Theta(u - i\varpi_2)},$$

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u - i\varpi_1)\Theta(u + i\varpi_2)}{\Theta_1(u + i\varpi_1)\Theta(u - i\varpi_2)},$$

et la rotation du corps se compose de trois mouvements périodiques : une rotation autour de l'axe de symétrie du corps, une rotation autour de l'axe fixe des $z$, et une rotation oscillatoire des axes principaux autour des axes fixes $x$, $y$, $z$. Nous n'entrerons pas dans les détails relatifs au second cas. L'auteur donne aussi pour les deux cas l'expression des neuf cosinus $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ par les fonctions jacobiennes des arguments $u \pm i\varpi_1$, $u \pm i\varpi_2$, $u \pm i\tau$, $u\varpi_1 \pm i\tau$, $i\varpi_2 \pm i\tau$, $i\varpi_2 \pm i\varpi_1$, et les formules de l'auteur contiennent comme cas particulier ($i\tau = iK'$) celles de Jacobi et de Lottner. Citons le théorème suivant qui donne la représentation cinématique du mouvement :

La rotation d'un corps symétrique par rapport à un axe autour d'un point

fixe de cet axe, le potentiel des forces étant $H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$, où $\theta$ est l'angle que l'axe fait avec une droite fixe passant par le point fixe, peut être représenté par celui d'un cône ayant pour axe l'axe du corps et roulant sur une surface de révolution du deuxième degré dont l'axe soit la droite fixe.

Un dernier Chapitre est dédié à l'étude du mouvement d'un corps solide dans un fluide homogène incompressible, sous l'hypothèse que le potentiel soit encore de la forme $H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta$, que le corps soit symétrique par rapport à un axe et la force vive totale du corps et du fluide soit donnée par

$$2T = a_{11}(u^2 + v^2) + a_{33} w^2 + a_{44}(p^2 + q^2) + 2a_{14}(up + vq) + 2a_{36} wr + a_{66} r^2,$$

*u*, *v*, *w* étant les composantes de la vitesse de l'origine d'un système d'axes orthogonaux fixes dans le corps, prises suivant les axes mêmes, et *p*, *q*, *r* les composantes de la vitesse angulaire de rotation autour de ces axes.

L'auteur part des équations canoniques et en déduit les intégrales par la méthode de Jacobi.

## Tome VI; 1889.

### *Ciani (E.)*. — Sur les courbes diamétrales des courbes algébriques planes et en particulier sur leurs axes de symétrie (3-160, 4 pl.).

L'auteur commence par rappeler la notion de *courbe polaire $r^{ième}$ d'une courbe* par rapport à une autre, qui est l'enveloppe des polaires $r^{ièmes}$ des points de la première par rapport à la seconde. Ensuite il définit et distingue les *courbes diamétrales $r^{ièmes}$* d'une courbe $C_\nu$ comme il suit :

Les *ordinaires* sont les polaires $r^{ièmes}$ des points de l'infini par rapport à $C_\nu$.

La *principale* est la polaire $r^{ième}$ de la droite de l'infini par rapport à $C_\nu$.

Un axe de symétrie ou bien est lui même une ligne diamétrale (diamètre), ce qui a toujours lieu pour les courbes d'ordre pair, où il fait partie d'une courbe diamétrale, ce qui arrive lorsque la courbe est d'ordre impair; dans ce cas l'axe et l'asymptote qui lui est perpendiculaire (qui existe toujours) constituent une conique diamétrale ordinaire. La condition qu'une courbe de l'ordre $n$ ait un axe de symétrie donné équivaut à

$$\frac{n(n+2)}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)^2}{4}$$

conditions linéaires suivant que $n$ est pair ou impair. Une courbe ne peut avoir un nombre d'axes de symétrie supérieur à son degré.

Une courbe d'ordre impair $2r+1$ non dégénérée peut avoir

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2r+1$$

axes de symétrie, qui passent toujours par un même point et sont disposés symétriquement autour de lui. La hessienne, la steinérienne et la cayleyenne ont la même symétrie que la courbe primitive. Les asymptotes et les axes constituent des couples de tangentes orthogonales de la cayleyenne.

Une courbe d'ordre pair peut avoir un nombre quelconque d'axes inférieur à son degré. Elle peut même en avoir un nombre égal à son degré; il y a exception seulement pour la classe de courbes d'ordre pair $n$ que la droite de l'infini touche $\frac{n}{2}$ fois aux points cycliques, et que l'auteur appelle *courbes hypercycliques*.

L'auteur applique ensuite ses résultats aux cas particuliers des courbes du troisième et du quatrième ordre.

*Bigiavi (C).* — Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (163-252).

Le travail est divisé en trois Parties. Dans la première l'auteur expose les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

soit uniforme et ait seulement des singularités polaires aux points où les coefficients deviennent infinis. Dans la seconde partie il indique une méthode pour construire ces équations, et l'applique au cas du second et du troisième ordre. Il y a cinq types d'équations du second ordre, et treize du troisième. La troisième partie est dédiée à l'intégration de ces équations.

S. R.

---

MÉMOIRES couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°, t. XL. Bruxelles, F. Hayez, octobre 1887 [1].

*De Tilly (J.-M.).* — Recherches sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. (1-98) [2].

Voici un aperçu des nombreux résultats obtenus d'une manière systématique par l'auteur de ce Mémoire, au moyen d'une seule et même transformation.

I. L'équation linéaire du second ordre

$$y'' = y\,\mathrm{F}(x) + \varphi(x),$$

devient

$$\frac{d^2 v}{du^2} = v\left[\mathrm{F}(f)f'^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}\right] + \left[f'^{\frac{3}{2}}g(f) + \frac{f''g'}{f'^{\frac{3}{2}}} - \frac{g''}{f'^{\frac{1}{2}}}\right] + \varphi(f)f'^{\frac{3}{2}},$$

si l'on pose

$$x = f(u), \qquad y = vf'^{\frac{1}{2}}(u) + g(u).$$

On déduit de là les théorèmes suivants : « On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait déduire l'intégrale générale de l'équation $y'' = \mathrm{X}y$, où X est une fonction qui ne contient pas $y$ : 1° de l'intégrale supposée connue de $y'' = k\mathrm{X}y$ ; X contient $k$, si $k$ est littéral ; 2° des intégrales supposées connues de $y'' = \mathrm{X}y + \mathrm{U}y$, $y'' = \mathrm{X}y + k\mathrm{U}y$, U étant une fonction déterminée ou une constante, X contient $k$ et U si ces quantités sont des constantes littérales ; 3° de l'intégrale supposée connue de $y'' = \mathrm{X}y + \mathrm{U}$, U étant une fonction ou une constante ; X contient U, si U est une constante littérale.

---

[1] *Bulletin*, XIII$_2$, 26-27.
[2] *Voir* aussi *Mathesis*, 1887, t. VII, 2e Supplément.

L'auteur donne ensuite de nombreuses conséquences de ces théorèmes, d'abord en donnant à F, $\varphi$ ou $g$ des formes particulières, puis en déterminant F de manière que l'on puisse ensuite, pour une certaine forme de $f$, trouver celle de $v$.

II. On peut trouver les équations différentielles linéaires qui ont pour solutions les produits $m$ à $m$ des solutions d'une autre équation linéaire du second ordre; on peut aussi tirer l'intégrale de celle-ci de la connaissance d'une seule intégrale de celle-là. Application au cas où $m=2$ et $m=4$; dans ce dernier cas, l'auteur trouve une formule relative à une transformation du second ordre de la seconde intégrale elliptique. On peut aussi trouver l'équation linéaire qui a pour intégrales deux puissances semblables de deux intégrales particulières d'une équation du second ordre.

III. Essai de réduction de $y''=\mathrm{X}y$ à un système de deux équations simultanées du premier ordre, pour résoudre la première.

IV. Si $y'=uy$, l'équation $y''=\mathrm{X}y$ devient $u'+u^2=\mathrm{X}$. L'auteur remarque que l'on pourrait intégrer celle-ci si l'on connaissait l'intégrale de $v'+v^2=-\mathrm{X}$; il essaye d'y parvenir, sans succès, mais en trouvant divers théorèmes spéciaux intéressants, en ramenant l'équation en $u$ à une équation de Clairaut, et aussi par l'application d'un théorème de Ch. Lagrange. Ainsi, en particulier, il réduit la question de l'intégration des équations du second ordre à celle de l'équation $u'(v^2+x)+v'(u^2+x)=0$, où $v$ est connu. La recherche du facteur d'intégrabilité de l'équation en $u$ ne conduit à aucun résultat saillant.

V. L'auteur essaye d'intégrer l'équation $y''=y\,\mathrm{F}(x)$ par les intégrales définies de la forme

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^v\,du, \qquad v=e^{-\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}-\frac{1}{2u^2}},$$

$\theta_1$ et $\theta_2$ étant des fonctions de $x$ à déterminer. L'auteur détermine la valeur de la dernière intégrale, quand $\theta_1\theta_2=k$.

VI. Essais d'intégration par réduction aux équations aux dérivées partielles. L'auteur intègre $y''+(k+l)y'+kly=y^{-1+\frac{2l}{k}}\varphi(ye^{kx})$, $\varphi$ désignant une fonction quelconque. On pourrait intégrer $y''=y\mathrm{F}x$ si l'on pouvait trouver l'intégrale de $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $v$ étant connu.

*Mailly* (*Ed.*). — Étude pour servir à l'histoire de la culture intellectuelle à Bruxelles, pendant la réunion de la Belgique à la France. (48 pages).

Il n'y avait alors en Belgique qu'un seul mathématicien dont le nom mérite d'être cité, *de Nieuport*.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE DU TOME XIV.



# TABLES

DES

# MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

## TOME XIV; 1890. — SECONDE PARTIE.

---

# TABLE ALPHABÉTIQUE

## DES MATIÈRES.

---

### RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica; T. VII, 1885-1886. — T. VIII, 1886. — T. IX, 1886. — T. X, 1887. — 59-74, 122-144, 227-240.

Annales des Ponts et Chaussées; 6e série, T. XI, 1er semestre 1886. — T. XII, 2e semestre 1886. — T. XIII, 1er semestre 1887. — T. XIV, 2e semestre 1887. — T. XV, 1er semestre 1888. — T. XVI, 2e semestre 1888. — 5-26.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure; 3e série, T. IV, 1887. — 3e série, T. V, 1888. — 58-59, 189-203.

Annali della R. Scuola Normale superiore de Pisa; T. II, 1879. — T. III, 1883. — T. IV, 1887. — T. V, 1888. — T. VI, 1889. — 258-270.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles; T. XXII, 1888. — T. XXIII, 1889. — 169-173.

Atti della Reale Accademia dei Lincei; in-4°, 4e série, Rendiconti. — T. IV, 1re Partie, 1er semestre, 2e semestre. — 210-216.

Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; in-8°, 6e série, T. III, 1884-85. — T. IV, 1885-86. — Appendice au T. IV. — T. V, 1886-87. — T. VI, 1887-88. — 159-164, 185-188.

Bulletin de la Société mathématique de France; T. XVI, 1888. — 203-210.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; t. CVI, 1888. — T. CVII, 1888. — 75-122, 240-258.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass, T. XCVIII, 1885. — T. XCIX, 1886. — 27-36, 216-226.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 270-271.

Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier; années 1885-86. — 188-189.

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, in-4°, T. II, 1881, — T. III, 1882. — T. IV, 1883. — T. V, 1884. — T. VI, 1885-86. — 179-185.

Nieuw Archief voor Wiskunde; T. XIV, 1888. — T. XV, 1889. — T. XVI, 1889. — 164-169.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par M. Ch. Brisse et E. Rouché; 3e série, T. VII, 2e semestre 1888. — T. VIII, 1889. — 142-159.

Overigt aver det Kogelige Danske Videnskabernes Selskabs Forrhandlinger; Année 1884. — Année 1885. — Année 1886. — Année 1887. — Année 1888. — 43-44.

Revue d'Artillerie; T. XXVIII, avril-septembre 1886. — T. XXIX, octobre 1886, mars 1887. — T. XXX, avril-septembre 1887. — T. XXXI, octobre 1887, mars 1888. — T. XXXII, avril-septembre 1888. — 37-42.

Tidsskrift for Mathematik; T. II, 1884. — T. III, 1885. — T. IV, 1886. — T. V, 1887. — T. VI, 1888. — 44-52.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, te Amsterdam; 3e série, in-8°, T. IV, 1888. — T. V, 1889. — T. VI, 1890. — 173-179.

# TABLE DES NOMS D'AUTEURS

## PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.


Abetti (A.). 161, 162, 163, 185, 187.
Alby. 17.
A. M. 143.
Amigues. 149.
Andrade (J.). 151.
Andrades. 156.
Anglin (A.-H.). 32.
Anonyme. 8.
Antomari (X.). 143.
Antonelli (G.-B.). 262.
Appell (P.). 71, 149, 198, 252.
Arneberg (A.). 48.
Arzelà (C.). 182.
Astor (A.). 158.
Autonne. 84.
B. (Ch.). 142.
Balitrand. 157.
Bang (A.-S.). 45, 49, 51.
Barbet (A.). 10.
Barisien (E.), 159.
Bassani (A.). 186.
Battaglini (G.). 215.
Bazin (H.). 16, 26.
Beltrami (E.). 180, 181, 182, 183, 185.
Bendixon (I.). 122.
Bérard. 11.
Berger. 133.
Bernardi (E.). 162, 187.
Bertrand (J.). 74, 75, 76, 79, 82, 87, 88, 91, 93, 94, 96, 97, 99, 101, 102, 105, 109, 112, 240, 247, 256.
Bazzi. 266.
Bettazzi (R.). 266.
Betti (E.). 214.
Beyens (I.). 146.
Bianchi (L.). 212, 213, 214, 259, 261.
Biehler (Ch.). 155, 158, 159.
Bierens de Haan (D.). 173, 177.
Bigiavi (C.). 270.
Bioche (Ch.). 98, 206.
Birkeland (K.). 50.
Boggio-Lera (H.). 264.
Bohling. 229.
Bois-Reymond (P. du). 255.
Boltzmann (Ludwig). 29.
Bonhomme (P.). 25.
Bordiga (G.-A.). 161, 162, 163. 186, 187
Borel (Em.). 157.
Bortnicker (M^elle^). 98.
Bougaief. 95, 104.
Bourlet (C.). 155.
Boschi (P.). 180, 181, 184.
Bosramier (E.). 17.
Boussinesq. 102, 106, 246, 247.
Boys (P. du). 5, 9.
Brambilla (A.). 161.
Brillouin. 92.
Brioschi (F.). 212, 215.
Brocard (H.). 188, 189.
Bronden (T.). 51.
Brunel. 89.
Bucchia (G.). 161, 162.
Buchwaldt (F.). 45, 48. 51, 52.
Busche (E.). 223.
Buys-Ballot (C.-H.-D.). 177.
Callandreau. 247.
Cantor. (G.). 61.
Cardinaal (J.). 116, 177.
Carvallo, 86, 100.
Casorati. 74.
Caspary (E.). 219, 253, 254.
Cassani (P.). 161, 162.
Castelnuovo (G.). 161, 163, 186, 187.
Catalan (E.). 207.
Cavallin (C.-B.-S.). 44, 46.
Cayley (A.). 30, 101.
Cerruti (V.). 214.
Cesàro (E.). 109, 114, 119, 122, 144, 145, 146, 150, 156, 210, 211. 213, 214, 216, 246.
Chicchi (P.). 162.
Christiansen (C.). 43. 48.
Ciani (E.). 269.
Clavenad, 15, 19.
Cœlingh (D.). 168.
Colette (J.). 157.

Collet. 55.
Collignon (E.). 9, 11, 25.
Comberousse (Ch. de). 148.
Combescure (Ed.). 188, 191.
Considère, 15.
Cosserat. 116, 117, 250.
Crépin (A.). 16.
Croizé (A.). 42.
Crone (C.). 45, 47, 53.
Dainelli (U.). 183.
Darboux (G.). 95, 192.
Da Schio (A.). 160, 163.
Dautheville. 188.
Defforges. 121.
Delannoy. 206.
Del Re (A.). 143.
Demartres. 56, 77, 86, 104.
Desdouits. 6.
Desprez (H.). 17.
Dobriner (H.). 129, 230.
Dojes (P.-H.). 175, 169.
Dolbnia (J.). 146, 152, 156.
Donati (L.). 258.
Durand-Claye (L.). 6, 7.
Eecen (A.). 165. 166.
Eiffel (G.). 11.
Ekama (H.). 167.
Engelmann (Th.-W.). 169, 170.
Emilio (R. d'). 160
Fabry. 97, 149, 207.
Fais (A.). 181.
Falk (M.). 64.
Farjon (F.). 143, 152.
Faure (H.). 150.
Favaro (Antonio). 159, 160, 162, 186, 187.
Favero (G.-B.). 212.
Faye. 97.
Fibbi (C.). 266.
Fiorini (M.). 181, 183.
Flamant. 7.
Fleischer (J.-S.). 50.
Floquet. 54.
Foldberg (P.). 49.
Fontaneau (E.). 157.
Fontviolant (de). 243.
Fouret (G.). 86, 108, 109, 149.
Franke, 220.
Frobenius (G.). 33, 223.
Frolov. 252.
Galliot, 7, 19.
Gambey. 155.
Garburi (G.). 162, 163, 186.
Garibaldi (P.-M.).
Gazzaniga (P.). 163.
Genocchi (A.). 224.
Genty (Max). 143, 145.
Gerstner (Franz von). 12.
Gilbert (Ph.). 144, 251, 252, 255.
Gino Loria. 129.
Gomes Teixeira (F.). 54, 144, 150.
Goursat. 57, 81, 121, 254.
Govi (M.). 213.
Gram (J.-P.). 46, 49, 50, 52.
Gremigni (M.). 160.
Grimois (C.-H.-C.). 175.
Gros. 18.
Grube (F.). 31.
Crünfeld (E.). 36.
Guccia. 250, 254.
Guichard, 63, 58, 197.
Guldberg (A.-S.). 46, 47.
Gundelfinger (S.). 220.
Gutzmer (A.). 138, 150.
Guyou. 109, 112, 151.
Gyldèn (H.). 62, 118, 121, 135.
Haare (K.). 47.
Hacks. 226, 132.
Hadamard. 84.
Halphen. 110, 113.
Hauck (Guido), 36.
Hausen (H.-J.). 51.
Hazzidakis (J.-N.). 28.
Heiberg (J.-L.). 43, 45.
Hermite. (Ch.). 225.
Hertzsprung (S.). 50.
Hesse (Otto). 218.
Hétier. 7.
Heude (H.). 26.
Heymann (W.). 33
Hill (W.). 69.
Hjort (V). 51.
Hofmann (Fritz). 34,
Holst. 70.
Humbert (G.). 83, 91, 234.
Hurwitz (A.). 220.
Jaggi (G.). 143.
Issaly (l'abbé). 203.
Jamet. 98, 152, 207.
Jensen (J.-L.-W.-V.). 45, 46, 47, 49, 51, 99, 118, 240.
Joffroy (J.). 146, 149.
Jonquières (de). 75, 79, 83, 92, 99, 241, 244.
Juel (C.). 49, 51.
Julius (W.-H.). 169, 170, 174.
Kalakoutski (N.-V.). 40, 41.
Killing (W.). 27.
Kluyver (J.-C.). 165.
Kobb (Gustaf). 228.
Kœnigs (G.). 76, 100, 116, 195, 203, 237, 244.
Königsberger (L.). 30, 217.
Korteweg (D.-J.). 190, 173.

Krause (Martin). 31.
Krey (H.). 61.
Kronecker (L.). 225.
Laisant. 208, 209.
Lallemant (C.). 18.
Landré (Corn. L.). 165.
Lardillon. 42.
Laroche. 24.
Laterrade. 15, 24.
Laurent (P.). 37, 39.
Lazzeri (Dr G.). 159, 160, 187, 263.
Lecornu. 120, 232.
Lefèvre (L.). 151, 155.
Leinekugel (G.). 154.
Lelieuvre. 80.
Lemaire. 153, 155, 157.
Lemoine. 208, 240.
Lerch. 208.
Lévy (L.). 150, 158.
Lévy (M.). 10, 11, 111, 244.
Leygue (L.). 6, 8, 14.
Liouville (R.). 119.
Lilienthal (R. von). 31, 221.
Lindagen (A.). 1, 6.
Lindstedt. 141.
Lipschitz. 61, 229, 230.
Loir. 105.
Longchamps (G. de). 158.
Lorentz (H.-A.). 171.
Lorenzoni (G.). 160, 185, 187.
Lucas (F.). 78, 85, 93, 94, 105.
Madsen (N.). 51, 52.
Mailly (Edm.). 271.
Malo (E.). 142.
Mannheim. 98, 154.
Mantel. 169.
Marchand (E.). 105, 146, 150, 155.
Markoff (A.). 129.
Martin (J.). 10.
Maschke (H.). 211.
Mellin. 69. 130.
Méray (Ch.). 58, 94, 155.
Meyer (A.). 32, 50.
Millosevich (E.). 211, 213, 215.
Minkowaski (H.). 64, 216.
Moch (G.). 37, 38, 40, 42.
Monchel (J.). 144.
Montesano (D.). 188, 212, 213.
Monteux (B.). 40,
Moret-Blanc. 142.
Murer (V.). 186.
Murgue (D.). 18.
Nacarri (G.). 160.
Nazimow. 190.
Netto (E.). 61, 133.
Niewenglowski (B.). 144.
Noblemaire. 19.
Nœther. 70.
Ocagne (M. d'). 16, 19, 24, 25, 26, 57, 82, 97, 145, 147, 159, 209.
Olsson (O.). 48, 49, 50.
Oudemans (J.-A.-C.). 173, 174, 178.
Padova (E.). 213, 216.
Painlevé. 91, 92, 242, 243, 250.
Paladini (B.). 212, 267.
Paraf. 108.
Paraira (M.-C.). 169.
Pascal (E.). 211.
Payet (P.). 142.
Pellet. 96, 103, 206.
Pelletreau. 9.
Pennachietti (G.). 259.
Perrilli (M.). 24.
Perott (J.). 219.
Perrin. 106, 122, 204, 240, 241.
Perrodil (de). 8.
Pesso (L.). 24.
Petersen (Jules). 43, 44, 47, 51, 52.
Petot. 117, 202.
Pétrini (H.). 52.
Phragmèn (E.). 60, 61.
Pomey (Et.). 145, 149, 158.
Pomey (J.). 157
Poincaré (H.). 59, 64, 72, 118, 133, 257.
Porchiesi (A.). 182, 183.
Poulain. 90.
Picard (E.). 78, 115, 148, 245, 247, 254, 257.
Picquet (H.). 222.
Pincherle (S.). 68, 84, 180, 184, 185, 210, 213, 230, 257.
Pirondini (G.). 146.
Pittarelli (G.). 213, 214.
Prange (A.-J.-A.). 166.
Préaudeau (A. de). 5, 9.
Presle (de). 208.
Putz (H.). 41.
Quiquet. 115.
Raffy. 255.
Rados (Gustave). 223.
Ragona (D.). 186.
Razzaboni (C.). 179, 181, 183.
Renou (A.). 154.
Resal (H.). 250.
Retali (V.). 183, 185.
Réveille. 207.
Reye (Th.). 35, 221.
Riccardi (P.). 182
Ricci (G.). 161, 212.
Ricco (A.). 216.
Ricour. 16.
Riemann (G.). 78, 200.
Righi (A.). 182, 185.
Rindi (S.). 263.

Robin. 88.
Rouché. 76, 83, 85, 147, 208.
Roussel (L.). 143.
Roux (M.). 144.
Ruffini (F.-P.). 15, 179, 180, 181, 182, 183, 184.
Runge (C.). 63, 69, 218.
Sadun (F.). 264.
Salvert (vicomte de). 152.
Saporetti (A.). 183, 185.
Sarrau. 147.
Sauvage. 189.
Saint-Germain (de). 148, 151, 256.
Saint-Loup. 240.
Saint-Venant (B. de). 14.
Schläfli (L.). 63.
Schmidt (E.). 46, 50.
Schœnflies (Arthur). 34, 221.
Schoute (P.-H.). 178, 179, 218.
Schouten (G.). 164, 167, 169, 170, 174, 175.
Schrœter (H.). 219, 222.
Schubert. 70.
Schwering. 228.
Segre (Corrado). 36, 220.
Séjourné. 10.
Servais (Cl.). 144, 152.
Siégler. 15.
Somigliana (Ch.). 165.
Stahl (Wilhelm). 220.
Staude (O.). 69, 231,
Steen (A.). 46, 47.
Steuberg (A.). 70, 240.
Stern. 70, 227.
Stieljess (T.-J.). 131, 141, 156, 205, 236, 248, 249.
Stolp (C.). 165.
Stouff. 199.
Sturm (R.). 224.
Sylvester. 87. 89, 91, 94.
Tacchini (P.). 210, 211, 212, 213, 215.
Tchebycheff (P.). 126, 132.
Thiele (T.-N.). 43, 44, 46.
Thiéry (E.). 24.
Thomsen (J.). 43.
Thomé (L.-W.). 217.
Thue (A.). 47, 48.
Thurninger. 14.
Tilly (de). 270.
Tisserand. 182.
Tonelli (A.). 216, 258.
Tourtay. 8.
Turazza. (D). 187.
Valentiner (E.-C.). 48, 52.
Vallier (E.). 38, 39.
Van den Berg (F.-J.). 164, 166, 167, 168, 173, 175, 176, 178,
Vander Stok (J.-P.). 173, 178.
Van Geer (P.). 169.
Van Laar (J.-J.). 169.
Vedel (P.). 52.
Venturi (A.). 262.
Vicaire. 89.
Viola (C.). 210.
Volterra (V.). 211, 215, 263.
Voyer. 83.
Vries (J. de). 165, 171, 172, 173, 174, 176. 177, 178.
Weber. 71, 130.
Weill. 145, 208.
Weingarten (J.). 34, 137.
Widmer (E.). 17,
Williot. 208.
Wiltheiss (Ed.). 222.
Wolf. 121.
Wolfskehl (Paul). 221.
Worontzoff. 143, 151.
Zeller (Ch.). 130.
Zeuthen (H.-G.). 44, 45, 48, 49, 50, 52, 225.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XIV.



15899 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.